

بسمه تعالی



دانشکده فنی و کشاورزی مراغه

جزوه درسی استاتیک

استاد : مصطفی رحمتی



Subject :

Year. Month. Date. ()

تعریف استاتیکی: استاتیکی شاخه‌ای است از مکانیک نظری که استاتیکی اجسام
در حال تعادل بررسی می‌نماید در این درس تغییر شکل اجسام مانند فنرها، گمانش
برش در لبه‌ها، مطلقاً لغوی می‌شود هم چنین جنبش اجسام نیز بررسی می‌گردد و هرگاه
این دو مورد اخیر بررسی شود در درس مقاومت مصالح اکتفا به خود حد می‌شود.
در درس استاتیکی بیشتر با جهت تعادل و نیروی داخلی و خارجی سروکار داریم از
آنجایی که نیروی کمیت برداری است نسبت به جهت بردار آن می‌پردازیم
به طور کلی کمیت‌هایی به دو دسته اسکالر و وکتور می‌توانیم تقسیم‌بندی کنیم
کمیت‌هایی که از جهت فقط با یک مقدار مشخص می‌شوند و نیازی به جهت ندارند مانند
در جهت، همان انرژی، همان استاتیکی، جرم و ... اما بعضی از کمیت‌ها در جهت
دارند که فقط با یک مقدار قابل بیان نیستند بلکه جهت آنرا نیز مطرح است مثل نیرو
یعنی وقتی جهت از نیرو می‌شود علاوه بر آنکه مقدار آنرا با یک معلوم شود
جهت نیرو نیز باید مشخص گردد در اینجا که در مباحث کینماتیک جهت را مطرح می‌کنیم از
کمیت برداری نمی‌توانیم به‌گشاوره‌تر و آسان‌تر اشاره کرد.

Subject:

Year. Month. Date. ()

انفصاح بردار: ① بردار آزاد: برداری است که جهت و محل اثر آن آزادانه انتخاب شود. مثل کشور

دارد بر اجسام صلب به صورت کپول (نیزدهای ولد بردار اتومیل ۱)

۲- بردار لغزان: برداری است که نیروی وارده در یک راستای مشخص است.

که محل اثرش تنها در راستای مورد نظر آزادانه انتخاب شود مثل نیروی وارده

بر اجسام صلب

۲- بردار ثابت: برداری که هم راستای آن و هم محل اثر آن کاملاً مشخص

است. مثل نیروهای وارده بر اجسام غیر صلب

اعمال نیروی بردارها:

جمع یا تفریق	} جمع هندسی	دو مثلث
		دو متوازی الاضلاع
غیر داخلی	} جمع تحلیلی	دو مثلث
		دو متوازی الاضلاع
غیر خارجی		

مثال:

مثلاً نیروی مطابق شکل به یک نقطه وارد می شود و برداری وارده در آن مرکز مثلث

مستقیم ایجاد می شود. است بر آنکه اگر در یک راستا درونی اگر نیروی 3 بار

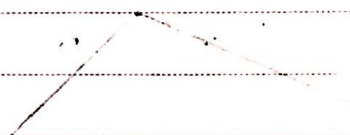
Subject:

Year. Month. Date. ()

نسبتہ سینوس $\frac{R}{\sin 120} = \frac{8}{\sin \beta} = \frac{10}{\sin \alpha}$

یاد رکھو

قانون سینوس $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$



$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

وہ $R^2 = 8^2 + 10^2 - 2 \times 8 \times 10 \times \cos 120$

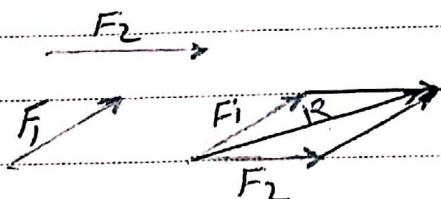
$R^2 = 64 + 100 - (160 \times -1/2)$ $R^2 = 244$ $R = 15.6$

$\frac{15.6}{\sin 120} = \frac{8}{\sin \beta} \Rightarrow \sin \beta = 0.44$ $\beta = 26^\circ$

$120 + 26 + \alpha = 180 \Rightarrow \alpha = 34^\circ$

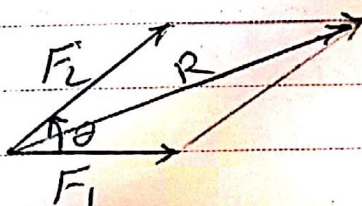
بات چیت R با سمت راستی جابر 164° است

$30 + 34 = 64^\circ$



روش متوازی الاضلاع (ترسبی)

روش متوازی الاضلاع (تحلیلی)



$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \theta$

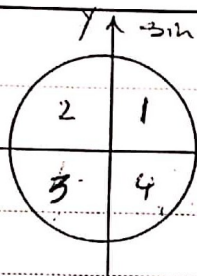
Subject:

Year.

Month.

Date.

()

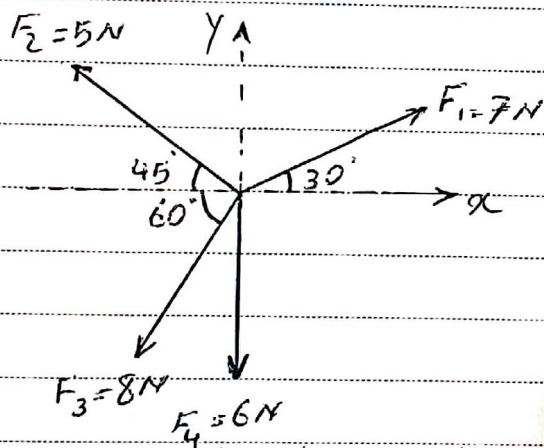


$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

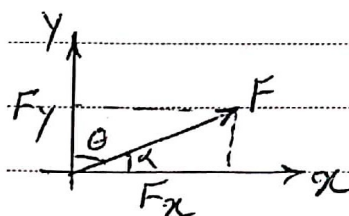
$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\pi - \theta)$$

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \theta$$



مثال: برای نیروهای بالا در نقطه O

محاسبه کنید.



$$\begin{cases} F_x = F \sin \beta \\ F_y = F \cos \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = F \cos \alpha \\ F_y = F \sin \alpha \end{cases}$$

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 \quad \tan \alpha = \frac{F_y}{F_x}$$

$$F_1 = \begin{cases} F_{1x} = 7 \times \cos 30 = 6 \\ F_{1y} = 7 \times \sin 30 = 3.5 \end{cases}$$

$$F_2 = \begin{cases} F_{2x} = -5 \times \cos 45 = -3.5 \\ F_{2y} = 5 \times \sin 45 = 3.5 \end{cases}$$

$$F_3 = \begin{cases} F_{3x} = -8 \times \cos 60 = -4 \\ F_{3y} = -8 \times \sin 60 = -7 \end{cases}$$

$$F_4 = \begin{cases} F_{4x} = 0 \\ F_{4y} = -6 \end{cases}$$

Subject:

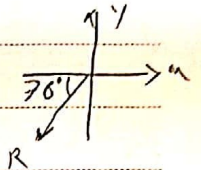
Year. Month. Date. ()

$$\sum F_x = 6 - 3.5 - 4 = -1.5$$

$$\sum F_y = 3.5 + 3.5 - 7 - 6 = -6$$

$$R^2 = (\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 = (-1.5)^2 + (-6)^2 = 2.25 + 36 = 38.25$$

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{-6}{-1.5} = 4 \quad \theta = \arctan 4 \approx 76^\circ$$

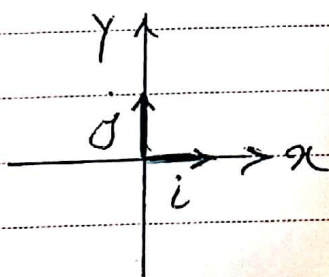


بردار یک خط هوکاه بردار را براندازه اش تقسیم کنیم بردار یک به دست می آید به عبارت دیگر بردار یک برداری است هم استاندارد و هم واحد و این دو اصطلاح را می توانیم به کار ببریم.

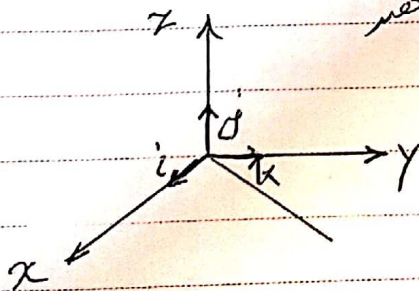
$$\vec{e} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \quad n \in \mathbb{R} \quad \text{عضو اعداد حقیقی}$$

$$\vec{AB} = n \cdot \vec{e}$$

بردارهای پایه در فضای سه بعدی قائم



اگر مختصات سه بعدی باشد و دل در K باشد می توانیم به کار ببریم



Subject :

Year .

Month .

Date .

()

هر بردار را می توان به صورت $F = ai + bj + ck$ نوشت که در آن i, j, k بردارهای

یواخت هستند. i, j, k بردارهای یواخت هستند. یعنی i, j, k بردارهای یواخت هستند.

درجهت i, j, k بردارهای یواخت هستند. i, j, k بردارهای یواخت هستند.

درجهت i, j, k بردارهای یواخت هستند. i, j, k بردارهای یواخت هستند.

درجهت i, j, k بردارهای یواخت هستند. i, j, k بردارهای یواخت هستند.

بردار i, j, k بردارهای یواخت هستند. i, j, k بردارهای یواخت هستند.

$$\cos \theta_x = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \cos \theta_y = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \cos \theta_z = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

لذا به یاد آوری است که اندازه هر بردار $F = ai + bj + ck$ از رابطه

$$|F| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

تعیین می شود. F بردار k مقدار آن $40N$ است. با محور y

زاویه 30° و با محور x زاویه 70° و با محور z زاویه 45° است.

با محور x زاویه 70° و با محور y زاویه 30° و با محور z زاویه 45° است.

$$(\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z) = 1$$

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 30^\circ + \cos^2 70^\circ = 1$$

$$\cos^2 \theta_x + 0.75 + 0.12 = 1 \quad \cos^2 \theta_x = 0.13$$

$$\cos \theta_x = \sqrt{0.13} \Rightarrow \cos \theta_x = \pm 0.36 \quad \begin{cases} \theta_x = 69^\circ \\ \theta_x = 111^\circ \end{cases}$$

$$F_x = F \cos \theta_x = 40 \times \cos 69^\circ = 14.4 \text{ N}$$

$$F_y = F \cos \theta_y = 40 \times \cos 30^\circ = 34.6 \text{ N}$$

$$F_z = F \cos \theta_z = 40 \times \cos 70^\circ = 13.7 \text{ N}$$

خوب داخل بردار حاصل ضرب داخل بردار یعنی است اسکالر و نه بردار

$$F_1 = a_i + b_j + c_k \quad \text{جهت هر اکس}$$

$$F_2 = a'_i + b'_j + c'_k$$

$$F_1 \cdot F_2 = |F_1| |F_2| \cos \theta \quad \text{جهت آمدن زاویه بین بردار مسعود}$$

کاربرد گانج (همان زاویه بردار هم از حاصل ضرب داخل جهت بردار)

لذا همان ثابت که حاصل ضرب داخل از رابطه زیر جهت هر اکس

$$F_1 \cdot F_2 = aa' + bb' + cc' \quad (2)$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

وایس که اگر دو بردار را با هم جمع کنیم و آنرا با هم ضرب کنیم

$$|F_1| \cdot |F_2| \cdot \cos \theta = a a' + b b' + c c'$$

$$\cos \theta = \frac{a a' + b b' + c c'}{|F_1| \cdot |F_2|}$$

مثال:

حاصل ضرب داخلی دو بردار $F_1 = i - j + 3k$ و $F_2 = 2i + k$ را بیابید و زاویه بین آن‌ها را بیابید.

$$F_1 \cdot F_2 = 1 \times 2 + (-1) \times 0 + 3 \times 1 = 5$$

$$|F_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{11} \quad \text{و} \quad |F_2| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\cos \theta = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{11}} \Rightarrow \cos \theta = \frac{5}{\sqrt{55}} \Rightarrow \theta = 47.6^\circ$$

خواص حاصل ضرب داخلی دو بردار:

$$F_1 \cdot F_2 = F_2 \cdot F_1 \quad \text{①} \quad \text{ضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد یعنی}$$

$$\text{②} \quad \text{ضرب داخلی دو بردار صفر است}$$

$$\text{③} \quad \text{اگر دو بردار بر هم عمود باشند حاصل ضرب داخلی آن‌ها صفر است و برعکس یعنی اگر}$$

$$\text{④} \quad \text{حاصل ضرب داخلی صفر شود آن دو بردار بر هم عمود اند}$$

مثال: با استفاده از m و n که بردار F_1 و F_2 بر هم عمود باشند

$$F_1 = m i + 2 j - 3 k \quad \text{و} \quad F_2 = 3 i - m j + 5 k$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$F_1 \perp F_2 \rightarrow F_1 \cdot F_2 = 0 \quad 3m + 2m - 3 \times 5 = 0 \quad |m = 15|$$

مثال:

برای اینکه A بر B عمود باشد F_1 و F_2 باید عمود باشند.

$$F_1 = a\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \quad F_2 = (a-3)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

$$a(a-3) + 3 \times 2 + 5(-7) = 0 \quad a = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times (-29)}}{2}$$

$$a^2 - 3a - 29 = 0 \quad a = 7 \text{ و } a = -4$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

حاصل ضرب خارجی:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 3 \times 1 = -1$$

برای آسانی از دترمینان:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

$$= aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

$$F_1 = ai + bj + ck$$

حاصل ضرب خارجی دو بردار

$$F_2 = a'i + b'j + c'k$$

بردارهای آن در آن جهت از راست به چپ می آید

$$|F_1 \wedge F_2| = |F_1| |F_2| \sin \theta$$

و جهت آن بر صفحه دو بردار عمود است به طوری که

F_1 و F_2 حاصل ضرب خارجی آن دو کج مستقیم از جهت حاصل ضرب خارجی

$$|F_1 \wedge F_2| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = bci + a'cj + dhk - a'b'k - a'cj - b'ci$$

دو بردار از راست به چپ می آید

مثال:
حاصل ضرب خارجی دو بردار $F_1 = 2i - 3j + 4k$ و $F_2 = i - j + k$ را بدست آورید و اندازه

حاصل ضرب خارجی را نیز محاسبه کنید

$$F_1 \wedge F_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 4j - 2k + 3k + 4i = 4i + 4j + k$$

$$|F_1 \wedge F_2| = \sqrt{4^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{33}$$

بنابراین حاصل ضرب خارجی:

(a) حاصل ضرب خارجی دو بردار خاصیت جابجایی ندارد یعنی $F_2 \wedge F_1 \neq F_1 \wedge F_2$

$$F_1 \wedge F_2 = -(F_2 \wedge F_1)$$

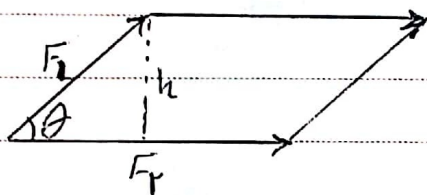
(b) حاصل ضرب خارجی یک بردار با خودش برابر صفر است

Subject:

Year: Month: Date: ()

⑧ اگر دو بردار در یک خط مستقیم باشند و در امتداد هم باشند یعنی زاویه بین آن‌ها 0° و 180° باشد، حاصل ضرب خارجی آن‌ها صفر است.

⑨ ثابت می‌کنیم اندازه حاصل ضرب خارجی دو بردار با برابر است با مساحت متوازی الاضلاع که با آن دو بردار ساخته می‌شود.



$$|F_1 \wedge F_2| = |F_1| \cdot |F_2| \cdot \sin \theta$$

$$\Delta F_1 \wedge k = F_1 \cdot F_2 \cdot \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{h}{F_2} \rightarrow h = F_2 \cdot \sin \theta$$

مثال: اگر بردار F_1 و F_2 مفروض است

$$F_1 = i + j - k \quad \text{و} \quad F_2 = 2i - 3j + k$$

الف) اندازه هر بردار (ب) برآیند آن‌ها به صورت i, j, k محاسبه اندازه بردار برآیند آن‌ها

د) بردار R هر بردار E حاصل ضرب داخلی دو بردار F و G را بیابید

الف)

الف) حاصل ضرب خارجی دو بردار

$$|F_1| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$|F_2| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$b) R = F_1 + F_2 = i + j - k + 2i - 3j + k = 3i - 2j$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

$$c) |R| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$d) e_{F_1} = \frac{F_1}{|F_1|} = \frac{i+j+k}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k)$$

$$e_{F_2} = \frac{F_2}{|F_2|} = \frac{2i-3j+k}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(2i-3j+k) = \frac{2}{\sqrt{14}}i - \frac{3}{\sqrt{14}}j + \frac{1}{\sqrt{14}}k$$

$$e) F_1 \cdot F_2 = a a' + b b' + c c' = 1 \times 2 + 1(-3) + (-1)(1) = -2$$

$$f) \cos \theta = \frac{a a' + b b' + c c'}{|F_1| |F_2|} = \frac{-2}{\sqrt{3} \times \sqrt{14}} = \frac{-2}{\sqrt{42}}$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{42}}\right) \Rightarrow \theta = 108^\circ$$

$$g) F_1 \wedge F_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = i - 2j - 3k - 2k - j - 3i =$$

$$= -2i - 3j - 5k$$

گشتاور نیرو و گشتاور نیرو و هم یک است به طریقی است از حاصل ضرب خاص نیرو

فاصله جهت هر یک در محاسبه است و جهت است که جهت آوردن

عکس العمل سطح عمود بر محور است به در یک مفهوم گشتاور از اهمیت خاص برخوردار

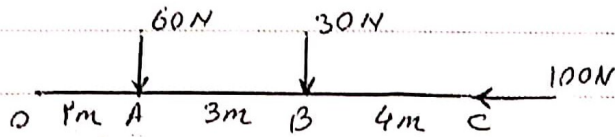
است به طور کلی اگر فاصله عمودی یک نیرو از یک استقرار نقطه معلوم باشد به هم

جهت آوردن گشتاور نیرو را به فاصله عمودی آن ضرب می کنیم

Subject:

Year: Month: Date: ()

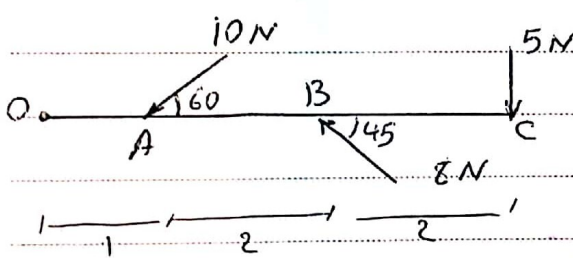
$$M = F \times d$$



$$\vec{M}_O = 60 \times 2 + 30 \times 5 + 100 \times 0 = 270 \text{ N.m}$$

$$\vec{M}_A = 60 \times 0 + 30 \times 3 = 90 \text{ N.m}, \quad \vec{M}_B = 30 \times 0 + 100 \times 0 - 60 \times 3 = -180 \text{ N.m}$$

$$\vec{M}_C = 100 \times 0 - 30 \times 4 - 60 \times 7 = -540 \text{ N.m}$$



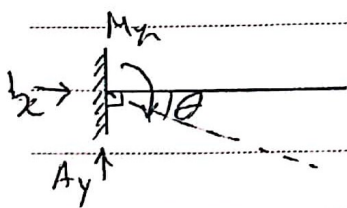
گشتاور حول نقطه O را محاسبه کنید

$$\vec{M}_O = 10 \times \sin 60 \times 1 + 5 \times 5 - 8 \times \sin 45 \times 3$$

$$\vec{M}_O = 16.7 \text{ (N.m)}$$

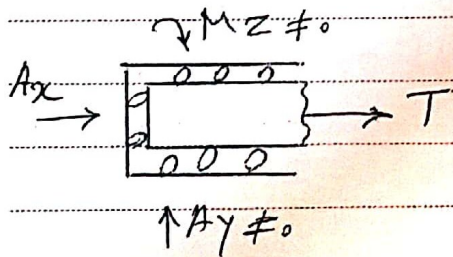
Subject:

Year. Month. Date. ()



تکیه گاه گیردار آویز

گیردار نیست $\theta \neq 0$ گیردار $\theta = 0$



تکیه گاه لیردار آویز

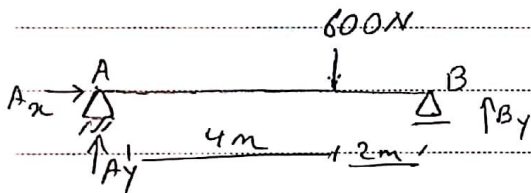
Subject:

Year. Month. Date. ()

یک مجهول دو مجهول سه مجهول
 یک درجه آزادی یک درجه آزادی یک درجه آزادی

هر چهاره تعداد مجهولات یکله گاه + تعداد درجات آزادی در صفحه
 برابر سه می باشد.

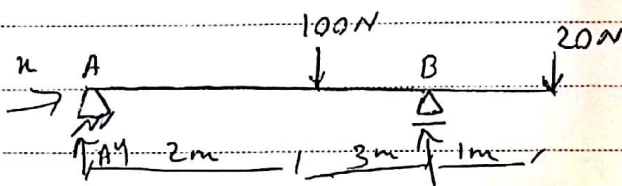
مثال: مجهولات یکله گاه تیر زیر را ببینید.



$$\sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad 600 \times 4 - B_y \times 6 = 0 \quad B_y = 400 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \quad -600 + 400 + A_y = 0 \quad A_y = 200$$



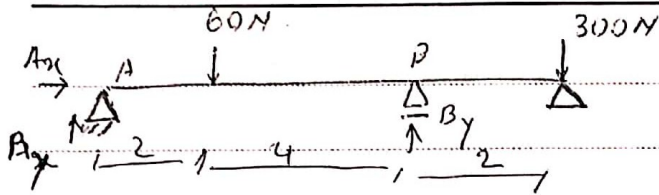
$$\sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0 \quad 100 \times 2 - B_y \times 5 + 20 \times 6 = 0 \quad B_y = 64 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + 64 - 100 - 20 = 0 \quad A_y = 56$$

Subject:

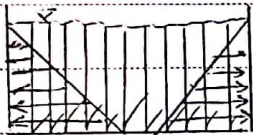
Year. Month. Date. ()



$$\sum M_A = 0 \quad 60 \times 2 + 300 \times 8 - B_y \times 6 = 0 \quad B_y = 420 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + 420 - 60 - 300 = 0 \quad A_y = -60 \text{ N}$$

استقرار



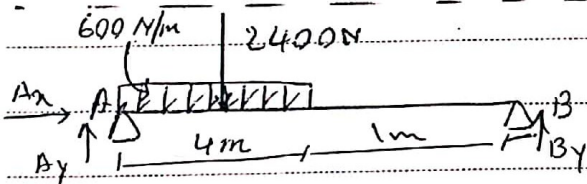
یادآوری

بارکشی

۱- حجمی $\text{N/m}^3 \text{ یا } \text{kg/m}^3$

۲- سطحی $\text{N/m}^2 \text{ یا } \text{kg/m}^2$

۳- خطی $\text{N/m} \text{ یا } \text{kg/m}$



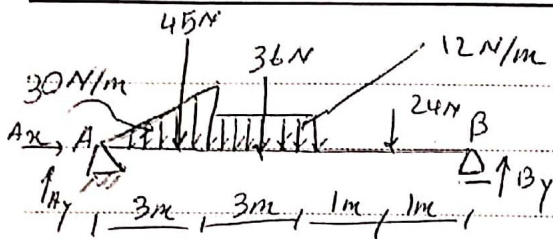
$$F_{\text{نتیجه}} = 4 \text{ m} \times \frac{600 \text{ N}}{\text{m}} = 2400 \text{ N}$$

$$\sum M_A = 0 \quad 2400 \times 2 - B_y \times 5 = 0 \quad B_y = 960 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + 960 - 2400 = 0 \quad A_y = 1440 \text{ N}$$

Subject:

Year: Month: Date: ()



$$\sum M_A = 45 \times 2 + 30 \times 4.5 + 24 \times 7 - B_y \times 8 = 0$$

$$B_y = 52.5 \quad \uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y + 52.5 - 45 - 36 - 24 = 0 \quad A_y = 52.5$$

دیagram نیروهای داخلی:

تعداد نیروهای داخلی:

به منظور به دست آوردن مقادیر نیروهای داخلی و معادلات آنرا باید در هر ناحیه

از تیر یا قاب برش زده و نیروهای داخلی را ظاهر کنیم برای این منظور از تیر برادر

نیروهای داخلی به شرح زیر استفاده می‌کنیم تا در خط چین معمولاً در زده می

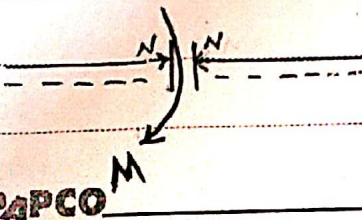
شیر و قابی ملک عمل قرار می‌گیرد.

$N =$ نیروی محوری

$V =$ نیروی برشی

$M =$ گشتاور خمشی

تعداد نیروی در داخل



Subject:

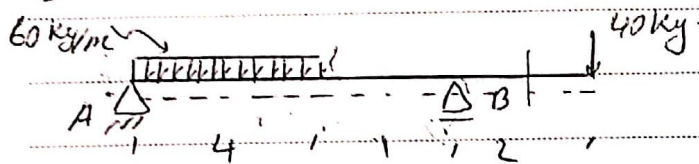
Year:

Month:

Date:

()

برای بدست آوردن معادلات نیروهای داخلی از معادلات تعادل استفاده می‌کنیم.



مثال: در زیر متغیرهای مطلوب است:

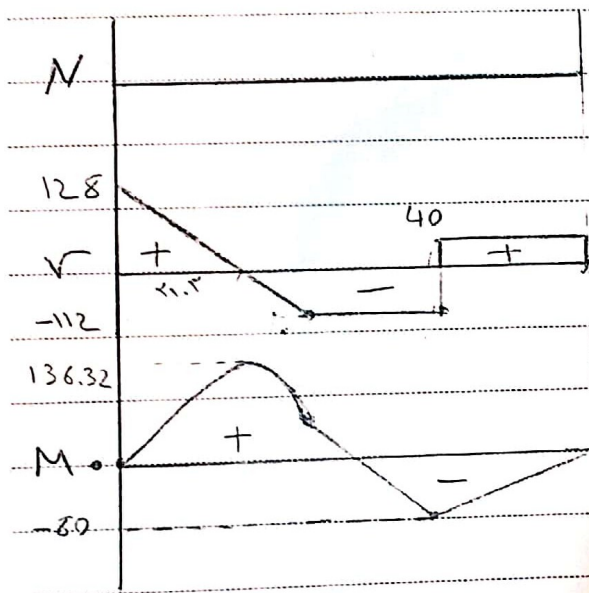
الف) محاسبه تنش عمودی و تنش برشی در مقطع

ب) جهت آوردن معادلات نیروهای

داخلی در هر قسمت

ج) ترسیم دیاگرام‌های نیروهای داخلی در هر قسمت

جهت آوردن معادلات متغیرهای داخلی

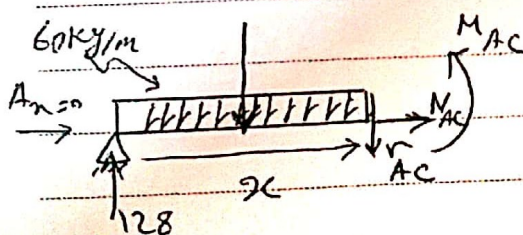


$$\sum M_A = 0 \quad 240 \times 2 - B_y \times 5 + 40 \times 7 = 0 \quad B_y = 152 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + 152 - 240 - 40 = 0 \quad A_y = 128 \text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0 \quad A_x = 0$$

برای محاسبه معادلات نیروهای داخلی در هر قسمت با نسی در هر قسمت می‌توانیم از معادلات تعادل استفاده کنیم.



$$\sum F_x = 0 \quad N_{Ac} = 0$$

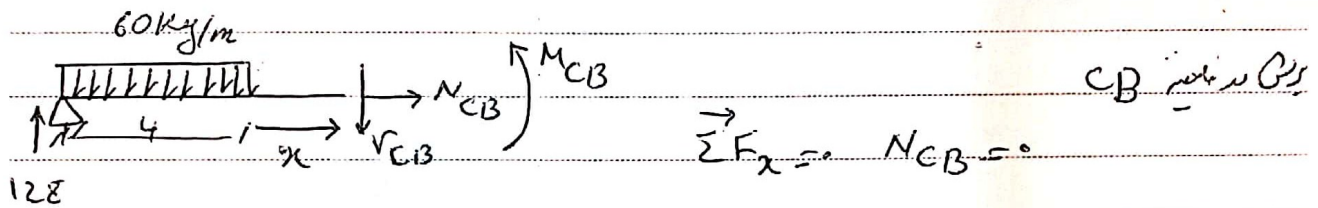
برای بدست آوردن

Subject:

Year: Month: Date: ()

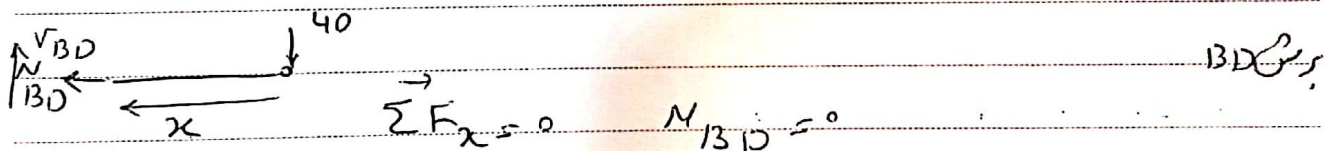
$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 128 - 60x - V_{AC} = 0 \quad \underline{V_{AC} = -60x + 128} \quad 0 \leq x \leq 4$$

$$\curvearrowright \sum M = 0 \quad -M_{AC} + 128x - 60x \times \frac{x}{2} = 0 \quad \underline{M_{AC} = -30x^2 + 128x} \quad 0 \leq x \leq 4$$



$$\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow 128 - 240 - V_{CB} = 0 \quad \underline{V_{CB} = -112 \text{ kN}} \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\curvearrowright \sum M = 0 \quad -M_{CB} + 128(4+x) - 240 \times (x+2) = 0 \quad \underline{M_{CB} = -112x + 32} \quad 0 \leq x \leq 1$$



$$\sum F_y = 0 \quad V_{BD} - 40 = 0 \quad V_{BD} = 40$$

$$\curvearrowright \sum M = 0 \quad M_{BD} + 40x = 0 \quad \underline{M_{BD} = -40x} \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$V_{AC} = 0 \quad -60x + 128 = 0 \quad x = 2.13 \text{ m}$$

$$128 - 60x = 0 \quad x = 2.13 \text{ m}$$

P4PCO $M_E = E \times \text{حاصل ضرب} = \frac{128 \times 2.13}{2} = 136.32$

Subject:

Year:

Month:

Date:

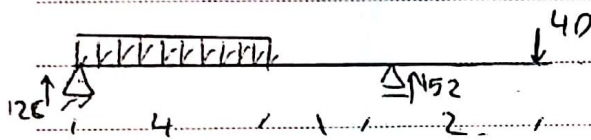
()

$$V_{max} = 128 \text{ ky}$$

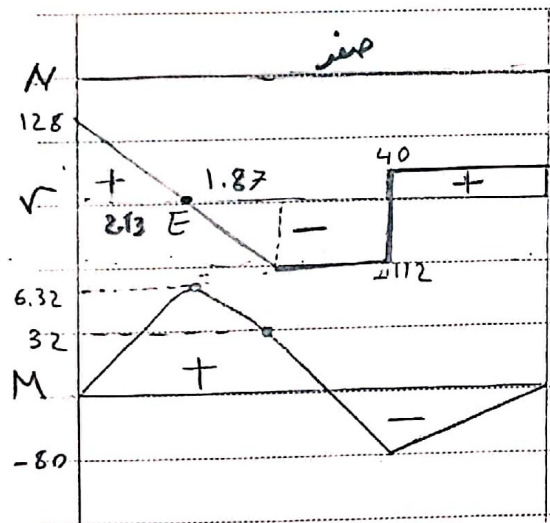
$$M_{max} = 136.32 \text{ ky/m}$$

$$M' = V \quad \text{①} \quad \leftarrow \text{نکته}$$

$$M' = V \quad \text{②} \quad \text{درجه اول بار گسترده ی ثابت}$$



رو به دم



$$M_E = 0 + \frac{128 \times 2.13}{2} = 136.32$$

$$M_C = 136.32 + \left(\frac{-112 \times 1.87}{2} \right) = 32$$

$$M_B = 32 + (-112 \times 1) = -80$$

$$M_D = -80 + 40 \times 2 = 0$$

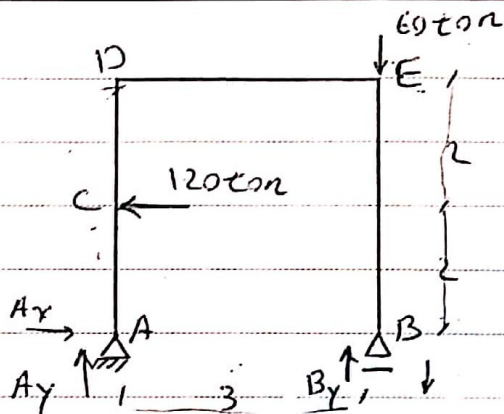
نکته ①: اگر جهت محاسبه در معادله کنیم مقدار M و V تغییر نمی کند. و فنی علامت V منفی در برعکس.

نکته ②: سطح زیر بار را که برابر از نقطه به نقطه نقطه به نقطه + کنکور در نقطه به نقطه = کنکور در نقطه به نقطه

Subject:

Year. Month. Date. ()

مسئله:



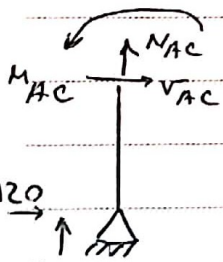
$$\sum F_x = 0 \quad A_x - 120 = 0 \quad A_x = 120 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + (-20) - 60 = 0 \quad A_y = 80$$

$$\sum M^A = 0 \quad -120 \times 2 + 60 \times 3 - B_y \times 3 = 0$$

AC عضو

$$B_y = -20 \text{ N}$$



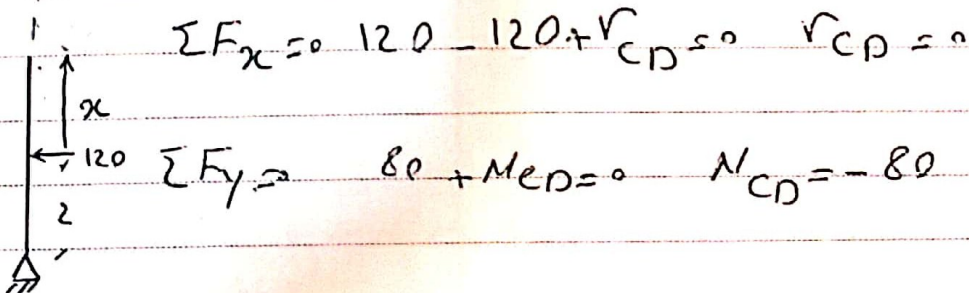
$$\sum F_x = 0 \quad 120 + V_{AC} = 0 \quad V_{AC} = -120$$

$$\sum F_y = 0 \quad 80 + N_{AC} = 0 \quad N_{AC} = -80$$

$$\sum M = 0 \quad -M_{AC} - 120 \times 2 = 0 \quad M_{AC} = -120 \times 2$$

عضو

CD عضو



$$\sum F_x = 0 \quad 120 - 120 + V_{CD} = 0 \quad V_{CD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad 80 + M_{CD} = 0 \quad N_{CD} = -80$$

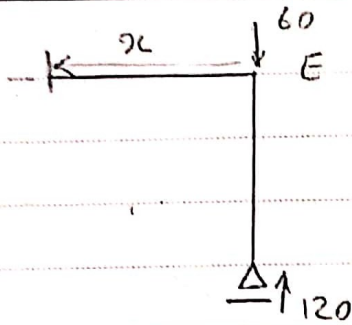
$$\sum M = 0 \quad -M_{CD} + 120x - 120(x+2) = 0$$

$$M_{CD} = -240$$

??

Subject:

Year. Month. Date. ()



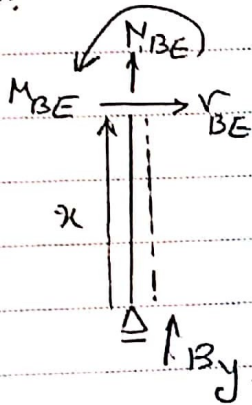
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_{DE} = 0$$

DE OK

$$\sum F_y = 0 \quad V_{DE} = 60 + (-20) = 0 \quad V_{DE} = 80$$

$$\sum M = 0 \quad M_{DE} + 60x - (-20)x = 0 \quad x = 80$$

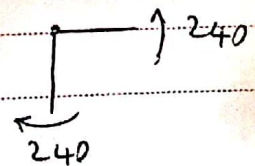
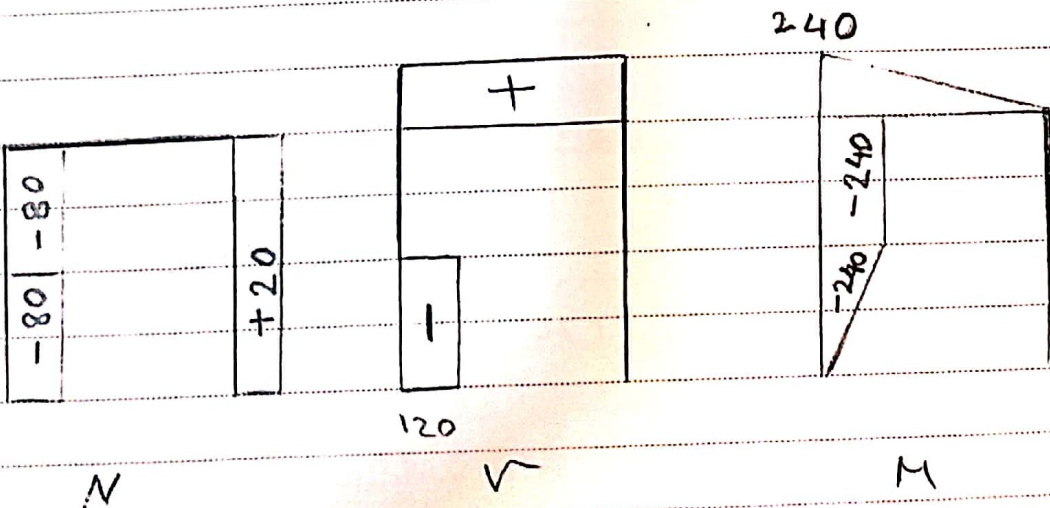
EB OK



$$N_{BE} + (-20) = 0 \quad N_{BE} = 20$$

$$V_{BE} = 0$$

$$M_{BE} = 0$$



Subject:

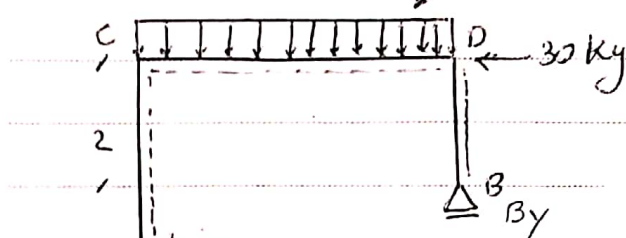
Year:

Month:

Date:

() 100 kg/m

نیم



در قیاب متقابل دیاگرام های محوری و برشی در

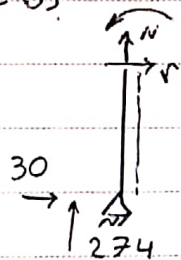
نگار می سازیم

$$\sum F_x = 0 \quad A_x = 30 \text{ kg}$$

$$\sum M_A = 0 \quad 100 \times 5 \times 2.5 - 30 \times 4 - B_y \times 5 = 0 \quad B_y = 226 \text{ kg}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + 226 - 100 \times 5 = 0 \quad A_y = 274 \text{ kg}$$

AC برش



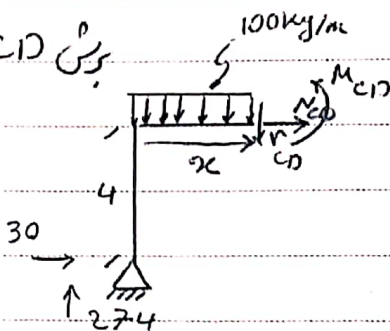
$$\sum F_x = 0 \quad 30 + V_{AC} = 0 \quad V_{AC} = -30 \text{ kg}$$

$$\sum F_y = 0 \quad 274 + N_{AC} = 0 \quad N_{AC} = -274$$

$$\sum M = 0 \quad -M_{AC} - 30 \times x = 0 \quad M_{AC} = -30x$$

$$0 \leq x \leq 4$$

CD برش



$$\sum F_x = 0 \quad 30 + N_{CD} = 0 \quad N_{CD} = -30 \text{ kg}$$

$$\sum F_y = 0 \quad 274 - 100x - V_{CD} = 0$$

$$N_{CD} = -30$$

$$V_{CD} = -100x + 274 \quad 4 \leq x \leq 5$$

$$\sum M = 0 \quad -M_{CD} - 30 \times 4 + 274 \times x - 100 \times x \times \frac{x}{2} = 0$$

$$M_{CD} = -50x^2 + 274x - 120 \quad 0 \leq x \leq 5$$

Subject:

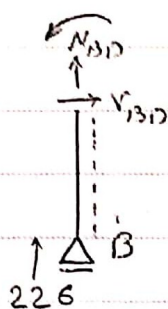
Year:

Month:

Date:

()

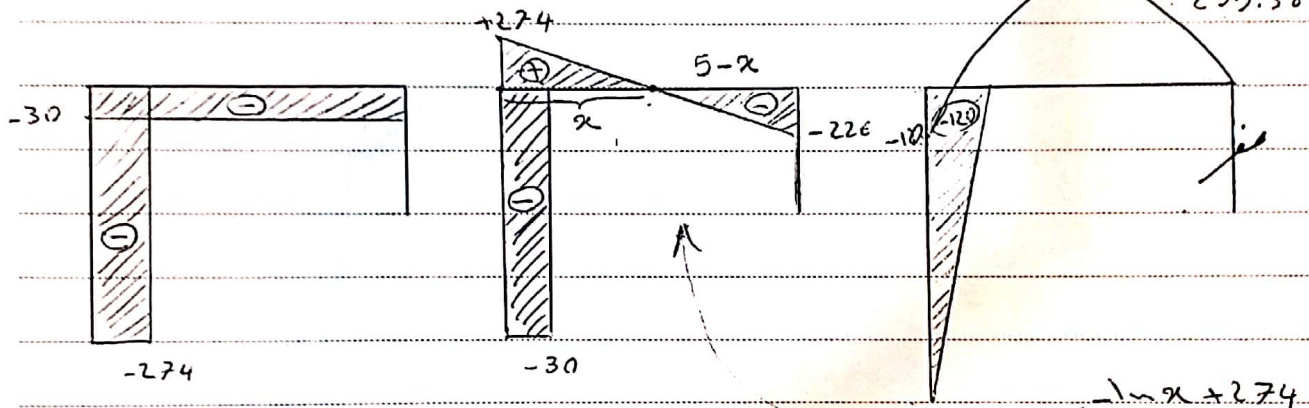
3D و



$$\sum F_x = 0 \quad V_{BD} = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad N_{BD} + 226 = 0 \quad N_{BD} = -226$$

$$\sum M = 0 \quad -M_{BD} = 0 \quad M_{BD} = 0$$



$$V_{CD} = -1 - m + 274$$

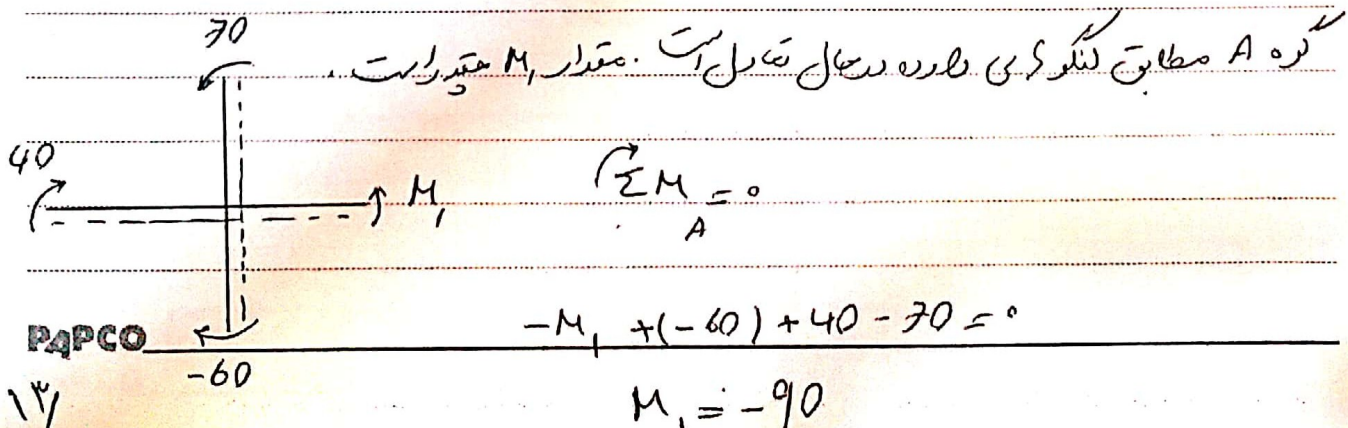
$$m = 2.74 \text{ m}$$

$$m = 0 \rightarrow 274$$

$$m = 5 \rightarrow -226$$

$$M_{max} = -50(2.74)^2 + 274 \times 2.74 - 120 = 255.38$$

$$M_{max} = 255.38$$



Subject :

Year . Month . Date . ()

و مفعول مفعول در تریج و قاهر :

مفعول : مفعول جابر است که مفعول در آن است و مفعول در آن مفعول است

برای طاهر درجه نامعنی تریج و قاهر از مفعول است و در مفعول در تریج درجه از

نامعنی می باشد و در قاهر به یاد تریج می باشد و در تریج به یاد تریج می باشد

نامعنی تریج و قاهر به یاد تریج می باشد و در تریج به یاد تریج می باشد

تعالی که ۳ تا ۴ باشد و در آن کم کنیم
درجه نامعنی 4-3-1
مفعول (شکل اول)

نما تریج ب که در آن مفعول تعبیه شده است درجه نامعنی است مفعول مفعول است

هر مفعول در تریج درجه از نامعنی می باشد و اگر تریج در آن درجه نامعنی مفعول

به یاد آن در مفعول تریج
درجه نامعنی 4-3-1-0
مفعول (شکل دوم)

اگر مفعول مفعول به یاد کنیم مفعول تریج به حالت نایب در آن در آن در آن

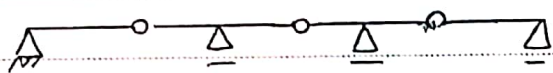
تشیخ نایب در آن در آن در آن در آن در آن در آن در آن در آن در آن

مفعول مفعول

در درس محاسباتی فکر حاصل عبارت زیر منفرگ کرده تغییراتی را بر خواص جدول

((تعداد مفصل ها) - تعداد معادلات تعادل - تعداد عکس العمل های تکیه گاه ها))

مثلاً تغییر مطابق شکل زیر نباید را است. زیرا حاصل عبارت منفرگ کرده



$$5 - 3 - 3 = -1 < 0 \text{ نا پایداری}$$

روشن هندسی:

در درس هندسی باید امکان نا پایداری از دیدگاه فنی بررسی شود و می توان گفت

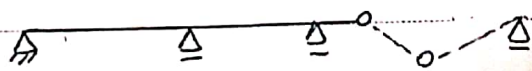
تیرهای از نظر محاسباتی پایداری جلوده نباید اما از نظر هندسی نا پایداری باشد. مثلاً مطابق شکل زیر

که در آن حاصل عبارت فوق مثبت است. اما نا پایداری است زیرا نا پایداری آن به علت

مورمان مفصل ها امکان پذیر می باشد در شکل زیر رسم شده است

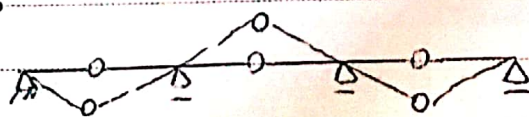


تکیه گاه

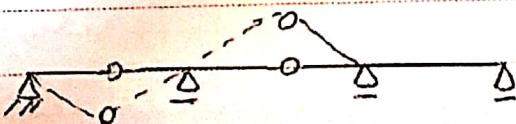


((تغییر از تکیه گاه پیدا نمی شود))

مثال



تغییر نا پایداری



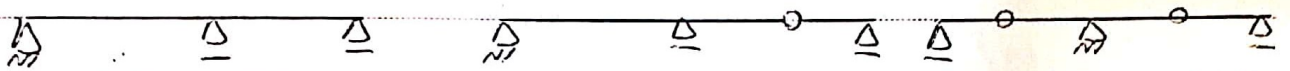
تغییر نا پایداری

Subject:

Year. Month. Date. ()

هر مفصل در ترکیب درجه‌ها از درجه‌ها نام معنی را می‌کاهد.

در مفصل کمتر خشت می‌آید ، در مفصل امکان دوران می‌باشد.



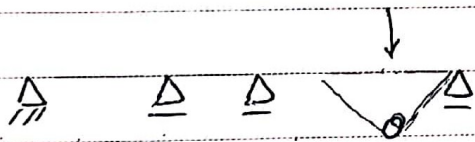
کمتر درجه معین

معین

نام و برار

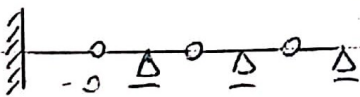
۰ روابط درونی - روابط خارجی - محمولات متبک

در تیر
مترقب
نام و براری
هندسی

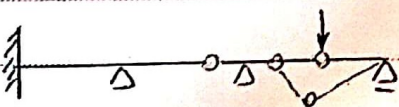


نام و برار هندسی

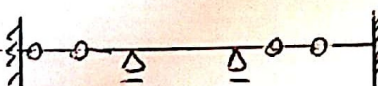
می‌نامد و برار از ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ نام و برار ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶



نام و برار از ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ نام و برار هندسی است.



نام و برار هندسی ، نام و برار از ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

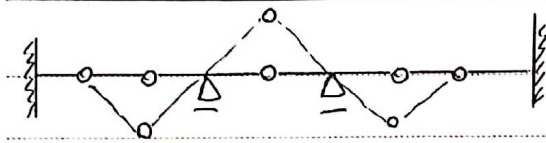


۸-۳-۴=۱

نام و برار از ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ نام و برار هندسی

Subject :

Year . Month . Date . ()



8-3-5=0

یا بار زده ای

نمای بار زده ای

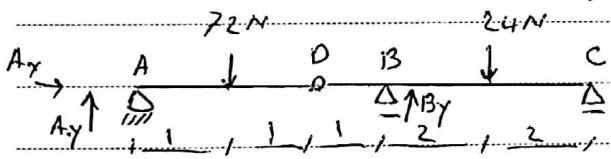
نکته :

۱- تیر از گنجه گاه جدا نمی شود

۲- گنجه گاه گیر دار دوران ندارد

تقریب در تیر مفصل بار زیر عکس العمل گنجه گاه را محاسبه کرده و در گنجه گاه ای نیروی برشی و خمشی را

رسم کنید



مقطع هر تیر در ای ۴ عکس العمل گنجه گاه را بنویسید

که در مقابل آن ۳ معادله تعادل و یک مفصل معادله

دارد. لذا بار زده ای است و با توجه به تیر باردار

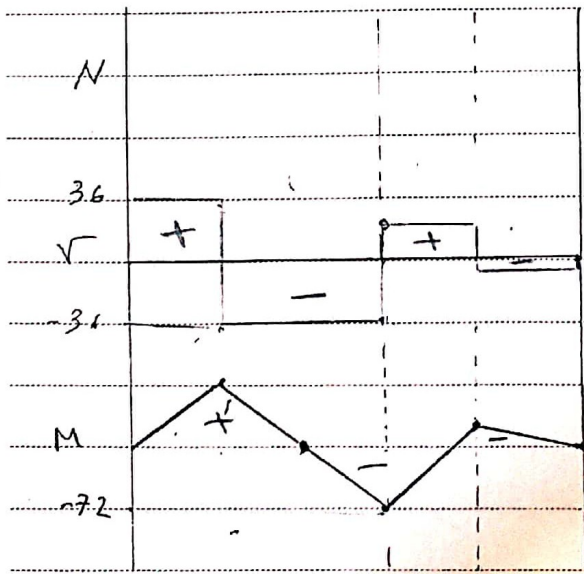
هندس نیروی برش را می توان تیر شکل و رسم

نمود

ظواهر آن عکس العمل گنجه گاه را

عکس العمل گنجه گاه افقی A صفر است

زیرا بار افقی بر تیر وارد نشده است

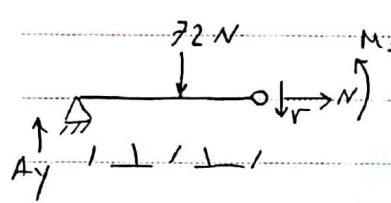


Subject,

Year. Month. Date. ()

در تیرهای مفصل دار برای بدست آوردن کلیه تیر را از مفصل می بریم تا به وقت
تیم شود. یکی از وقت را برداشته و نسبت به مفصل لنگر می نویسیم و آن را مساوی

صفر قرار می دهیم. زیرا در مفصل لنگر صفر است



$$\sum M_B = 0 \quad A_y \times 3 - 72 \times 1 = 0 \quad A_y = 36 \text{ N}$$

حل مفصل به سمت چپ

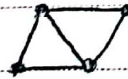
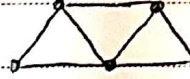
در کل تیر

$$\sum M_B = 0 \quad 24 \times 2 - C_y \times 4 - 72 \times 2 + 36 \times 3 = 0 \quad C_y = 3 \text{ N}$$

در کل تیر

$$\sum F_y = 0 \quad 36 + 3 + B_y - 72 - 24 = 0 \quad B_y = 57 \text{ N}$$

مجموعه های مفصلی و (خواب)

			
$m=3$	$m=5$	$m=7$	$m=9$
$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$
$2 \times 3 - 3 = 3$	$2 \times 4 - 5 = 3$	$2 \times 5 - 7 = 3$	$2 \times 6 - 9 = 3$

برای ایجاد خوابی باید از صفه ای از سگ شروع می کنه زیرا سگ کو بهترین الزام

باید از صفه ای است به طوری که با ی تو به خواب معود (نه صبه) یک گره

Subject:

Year. Month. Date. ()

در دو مدیم افغانه می کشند که اصطلاحاً هاگوسن خریا میگویند به سبب ساخته شدن آن.

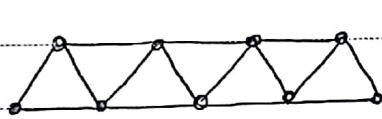
در خریا ای دو صبری و بایر و معین رابطه $m=3$ - $2j$ برقرار است.

که این رابطه نقش اساسی در تشخیص بایر و معین و درجات معنی خریا بازی

می کنند در اشکال های زیر که خریا های مختلف بدون توجه به تکیه گاه ها رسم

شده اند صرفاً بر اساس رابطه آخر مدخلین گردد.

مثلاً خریای مطابق شکل زیر بایر و معین است زیرا:

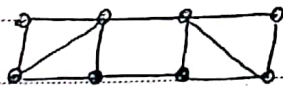


$$m=15$$
$$j=9$$

$$2j - m = 3$$

$$18 - 15 = 3$$

بایر و معین
بایر و صبری



معنی
داخلی
خارجی

$$m=12, j=8$$

$$2j - m = 3$$

می نایر و معین است.

$$2 \times 8 - 12 = 4 \neq 3$$

نایر و معین از ۱ است.

Subject:

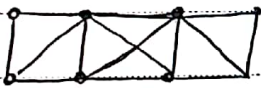
Year: Month: Date: ()

$$3 - (2j - m) \quad \begin{cases} \text{مثبت} & \text{یا برابر از می است} \\ \text{صفر} & \text{یا برابر از می است} \\ \text{منفی} & \text{نا یا برابر از می است} \end{cases}$$

بهمی تشخیص نا یا برابری از می خرابی های دو بعدی عبارت است از $3 - (2j - m)$

را می سبب می کنیم اگر این عبارت مثبت باشد یا صفر شود خرابی نا یا برابر از می است

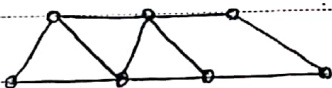
و اگر منفی شود نا یا برابر از می است. مثلاً خرابی زیر نا یا برابر از می است



$$3 - (2 \times 8 - 14) = 1 > 0$$

زیر

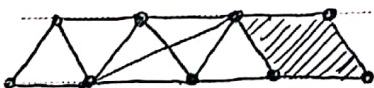
و بی خرابی مطابق شکل زیر نا یا برابر از می است. زیرا



$$3 - (2 \times 7 - 10) = -1 < 0$$

ممکن است خرابی از نظر نا یا برابر از می یا صفر باشد. اما از نظر هندسی نا یا برابر از می

صفری مقدار $3 - (2j - m)$ مثبت یا صفر باشد. اما خرابی نا یا برابر از می



مثلاً خرابی مطابق شکل زیر نا یا برابر هندسی است.

زیرا قسمت ها مورد توجه در آن تغییر شکل می دهد.

یا برابر از می است و نا یا برابر هندسی است هر دو کل نا یا برابر است $3 - (2 \times 9 - 15) = 0$

Subject :

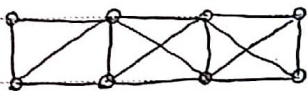
Year, Month, Date, ()

وَتَبَعِي خَرِیَ بَدِیَارِ شَرِّ (صم هندسی و هم سازه ای) و تَبَعِی درجه نامعنی آن را محاسب
که درجه نامعنی خوربه دو قسم است، یکی درجه نامعنی داخلی و دیگری درجه نامعنی
خارجی تقسیم می گردد.

درجه نامعنی از رابطه زیر بدست می آید:

$$3 - (2j - m)$$

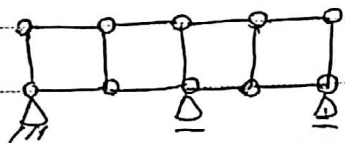
مثلاً خرابای مطابق شکل زیر ۲ درجه نامعین است زیرا:



$$3 - (2 \times 8 - 15) = 2$$

و درجه نامعنی خارجی به تعداد عکس العمل های تکیه گاه مربوطه می شود که

مثل تیرها عمل می گردد. مثلاً در خرابای مطابق شکل زیر یک درجه نامعنی خارجی



$$4 - 3 = 1$$

وجود دارد زیرا

Subject,

Year, Month, Date, ()

روش حل خرپا: منتقله از حل خرپا به دست آمدن نیروی داخلی میله در آن است

۱- روش گره

۲- روش مقطع

۳- ترکیبی از دو روش فوق

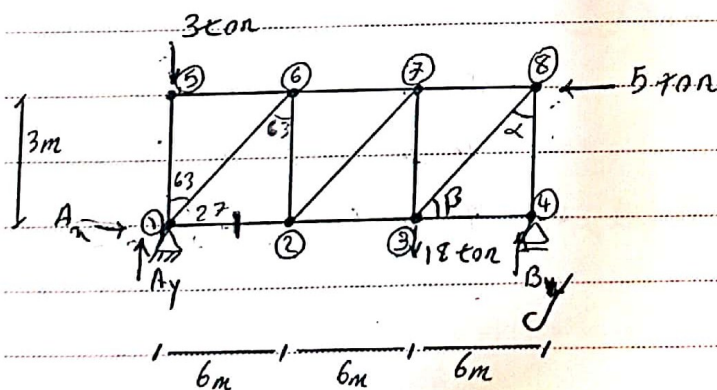
نوشته گوی: در این روش از گره ای شروع می کنیم که حداقل ۲ مجهول داشته باشد به صورتی که

آن را از خرپا جدا کرده و روابط تعادل را که $\sum F_x = 0$ و $\sum F_y = 0$ را به دست آوریم

البته در خرپای ۲ رابطه دیگر به کار می رود و روشی از خرپای فضایی باشد $\sum F_z = 0$

نیز کاربرد خواهد داشت در مثال زیر روشی حل خرپا به صورت گره به گره روشی نوشته است.

مثال: در خرپای شکل زیر اعضای نیروهای داخلی میله در آن را بدست آوریم.



لوس قدم در حل خرپا تشخیص یابداری یا

نابایداری آن است که در این مثال علم از نظر

ساده ای هم از نظر هندسی خرپا یابداری است.

درین قدم می سه عکس العمل گویه گاهی است.

Subject:

Year: Month: Date: ()

$$\sum F_x = 0 \quad A_x = 5 \text{ ton}$$

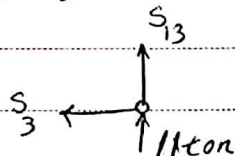
$$\sum M^A = 0 \Rightarrow 18 \times 12 - 5 \times 3 - B_y \times 18 = 0 \quad B_y = 11 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + 11 - 3 - 18 = 0 \quad A_y = 10 \text{ ton}$$

درین قدم با استفاده از روش گره کردن از گرهی است که کمتر از ۲ مجهول دارد، یکی این مفاصل

گره که در مسیر بار قرار می‌گیرد تا آکریس دخی راحت تر باشد

گره ۴

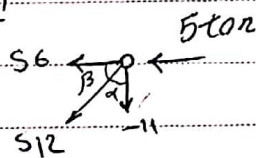


$$\sum F_x = 0 \quad S_3 = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad 11 + S_{13} - 5 = 0 \quad S_{13} = -11$$

$$\tan \alpha = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow \alpha = 63^\circ, \beta = 27^\circ$$

گره ۸

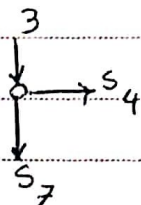


$$\sum F_y = 0$$

$$-(11) - S_{12} \sin 63^\circ = 0 \quad S_{12} = 24 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \quad -S_6 - 5 - 24 \times \sin 63 = 0 \quad S_6 = -26$$

گره ۵



$$S_4 = 0$$

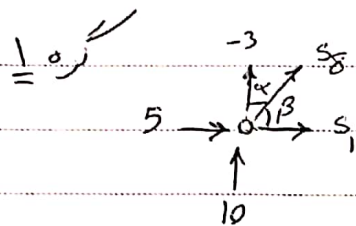
$$S_7 = -3$$

P4PCO

W

Subject:

Year. Month. Date. ()

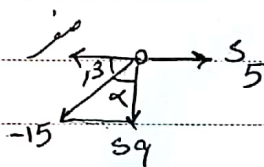


$$\sum F_y = 0$$

$$10 - 3 - S_8 \sin 63^\circ = 0 \Rightarrow S_8 = -15 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow S_1 + 5 + (-15) \cos 63^\circ = 0 \Rightarrow S_1 = 8 \text{ ton}$$

گره ۶

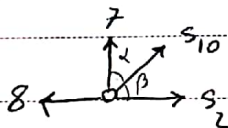


$$\sum F_x = 0$$

$$S_5 - (15 \cos \alpha) = 0 \Rightarrow S_5 = -13 \text{ ton}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -S_9 - (15 \sin \alpha) = 0 \Rightarrow S_9 = 7 \text{ ton}$$

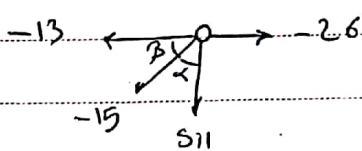
گره ۲



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow 7 + S_{10} \sin \beta = 0 \Rightarrow S_{10} = -15 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow -8 + S_2 + (-15) \cos \beta = 0 \Rightarrow S_2 = 21 \text{ ton}$$

گره ۷



$$\sum F_y = 0$$

$$-(-15 \cos \alpha) = S_{11} = 0 \Rightarrow S_{11} = 7 \text{ ton}$$

در حل خرابی روش گره به گره و عدالت یک گره ۱ با بدون استفاده بازنه مانند
که آن ها گره کنترل هر گره نیز یعنی باستی در این گره جمع جبرکی نیروها حاصل می

Subject:

Year:

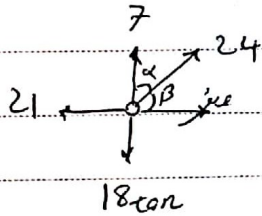
Month:

Date:

()

مصدر در نحوه به بار ضرب باشد. مثلاً در سازه‌های اخیر گره ۲ را استفاده
کردیم می‌خواهم صحت محاسبات را در این گره کنترل کنیم از یک صحت اختلاف
چند درصدی می‌آید که نام‌ها از گره‌های استاندارد باشد.

گره ۲



$$\sum F_x = 0$$

$$-21 + 24 \cos 27^\circ = 0 \quad -21 + 21 = 0 \quad \checkmark \text{ok}$$

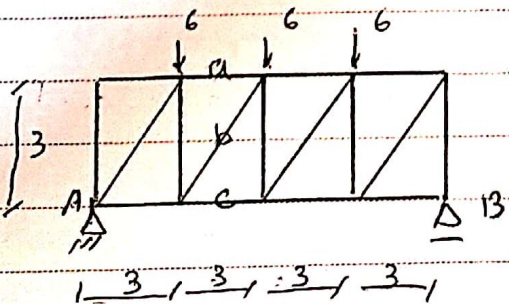
$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -18 + 7 + 27 \times \sin 27^\circ = 0 \Rightarrow 21$$

روش مقاطع یا روش گره

در این روش خرابی را به دو قسمت تقسیم شده، و مقابل هر قسمت بررسی می‌گردد.

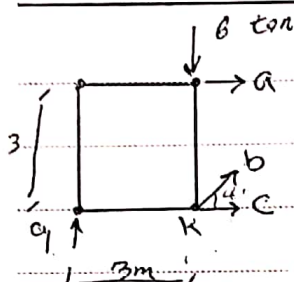
۱- میل به مورد نظر را قطع کنند. ۲- خرابی را به دو قسمت تقسیم کردند.

محل خرابی با استفاده از برش ۱ صادر از زیر می‌توان استفاده کرد.



Subject:

Year: Month: Date: ()



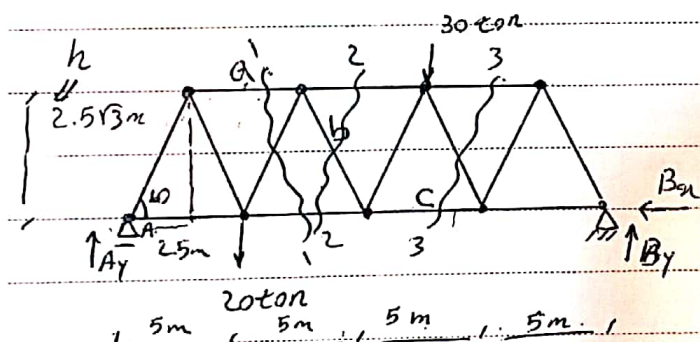
$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad 9 - 6 - b \sin 45 = 0$$

$$b = 3\sqrt{2} \text{ ton}$$

$$\uparrow \sum M_K = 0 \quad a \times 3 + 9 \times 3 = 0 \quad a = -9 \text{ ton}$$

$$\sum F_x = 0 \quad -9 + c - 3\sqrt{2}(\cos 45) = 0 \quad c = 12 \text{ ton}$$

نکته: در خنثی مطابق شکل زیر نیروی داخلی c و b و a را برابر گیریم



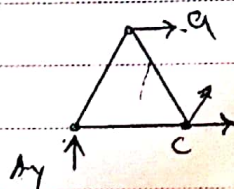
همه زوایا 60° می باشد

$$\sin 60 = \frac{h}{5} \rightarrow h = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2.5\sqrt{3}$$

$$\uparrow \sum M_A = 0 \quad 30 \times 12.5 + 20 \times 5 - B_y \times 20 = 0 \quad B_y = 23.75 \text{ ton}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 \quad A_y + 23.75 - 20 - 30 = 0 \quad A_y = 26.25 \text{ ton}$$

برای 1-1



$$\uparrow \sum M_C = 0 \quad 26.25 \times 5 + a \times 2.5\sqrt{3} = 0$$

$$a = -30.31 \text{ ton}$$

Subject:

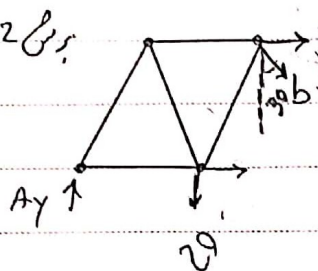
Year:

Month:

Date:

()

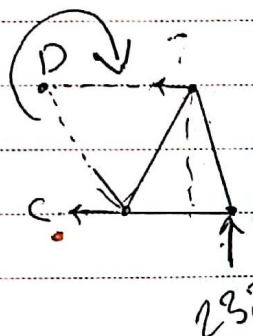
2-2 بر



$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$26.25 - 20 - b + 30 = 0 \Rightarrow b = 7.21 \text{ ton}$$

3-3 بر



$$\rightarrow \sum M_D = 0$$

$$C \times 2.5\sqrt{3} - 23.75 \times 7.5 = 0 \Rightarrow C = 41.1 \text{ ton}$$

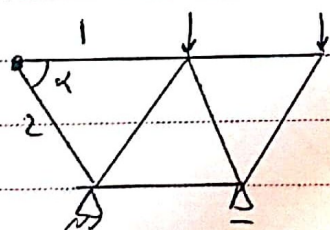
یا در آوری میله های صفر در خرابی در بعضی از خرابی ها تعدادی از میله ها دارای نیروی

داخلی صفر هستند البته این امر ناشی از فرضیات حل خرابی و نحوه اعمال بارهای

خرابیست و در عمل میله های که نیروی داخلی آنها صفر است نیز حذف شوند.

هرگاه در یک خرابی در بعضی به یک گره فقط دو میله وارد شود و نیروی خارجی

به آن گره وارد نشود هر دو میله صفر اند مثلاً



در خرابی مطابق شکل میله های ۱ و ۲ صفر اند

$$\uparrow \sum F_y = 0$$

$$-S_2 \sin \alpha = 0 \Rightarrow S_2 = 0$$

PAPCO

$$\rightarrow \sum F_x = 0$$

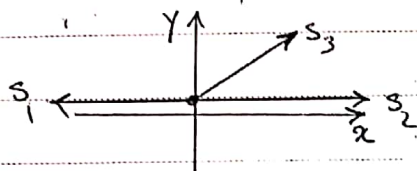
$$S_1 = 0$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

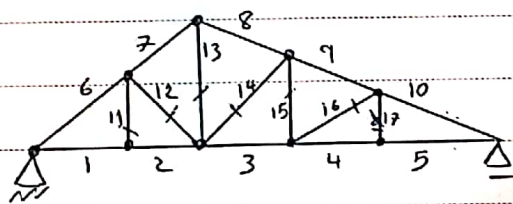
اگر یک گره خرابی 3 میل طوری وارد شوند که 2 میل از آن را متراکم باشد.

و به این گره نیروی خارجی وارد شود نیروی داخلی سازه را متراکم می کند.



زیر سازه است

مثال:
سازه‌ای که سازه‌ای متراکم و نیروی داخلی را تقویت کند.



۷ گره متراکم

خراب‌های بزرگ:

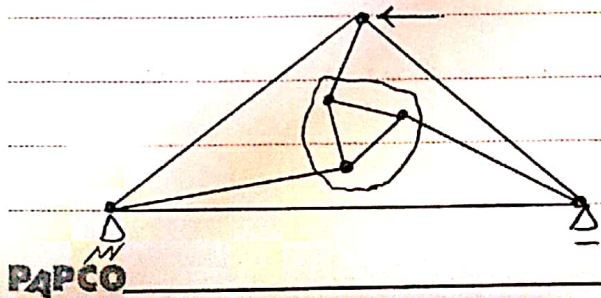
همان طوری که قبلاً گفته شد برای حل خرابی در سازه وجود

دارد که گاهی ترکیبی از آن‌ها نیز به کار می‌رود. در بعضی از خرابی‌ها تقویت سازه حل می‌شود.

در سازه‌های بزرگ و در وقت بیشتری می‌توان به سازه‌ها تغییر داد.

که آن‌ها خرابی‌های بزرگ می‌شوند.

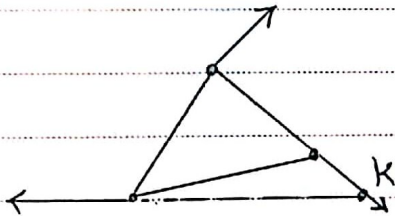
مثال: خرابی از آن است.



Subject:

Year: Month: Date: ()

این خرابی بصورت وایدیوار است. اگر بخواهیم به روش گره میل کنیم از هیچ گرهی
غیر تکیه شروع نمی توانیم زیرا گره وجود ندارد که بدست آورده شود.
پس باید به سراغ دیوار رفت که در این خرابی زدن برش را تسهیل
میکند.



Subject:

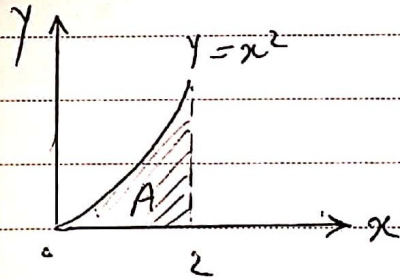
Year. Month. Date. ()

موضوعات هندسی مقطع:

- ۱- مساحت
- ۲- همان استاتیکی
- ۳- مرکز سطح
- ۴- همان انفرسی
- ۵- همان انفرسی حاصل ضرب
- ۶- همان انفرسی قطبی
- ۷- همان انفرسی محورهای مختصات
- ۸- شعاع گویا
- ۹- طول مقطع

۱) مساحت

$$A = \int_{x_0}^{x_1} y \, dx$$

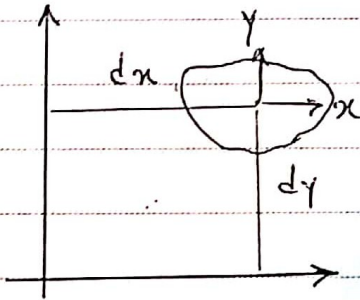


$$A = \int_0^2 x^2 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^2 = \frac{8}{3}$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

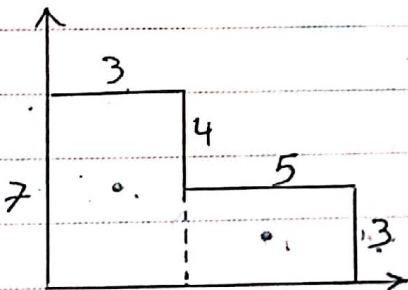
من استیک کدر سطح نب به محور با راست:



محصول آن سطح x فاصله مرکز سطح از آن محور

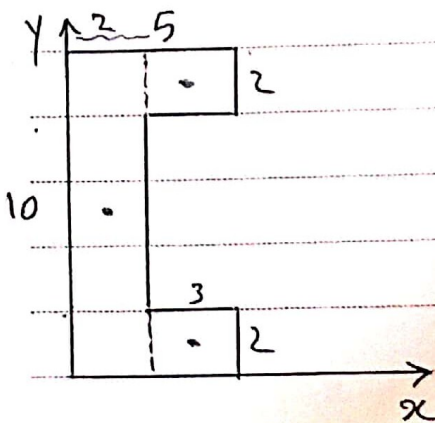
$$S_x = A \times dy$$

$$S_y = A \times dx$$



$$S_x = 3 \times 7 \times 3.5 + 3 \times 5 \times 1.5 = 96 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 3 \times 7 \times 1.5 + 3 \times 5 \times 5.5 = 114.5 \text{ cm}^3$$



$$S_x = 2 \times 3 \times 1 + 2 \times 3 \times 9 + 10 \times 2 \times 5 =$$

$$S_x = 160$$

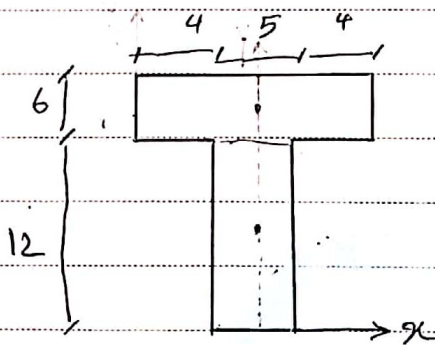
$$S_y = 10 \times 2 \times 1 + 2 \times 3 \times 3.5 + 2 \times 3 \times 3.5 =$$

$$S_y = 62$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

فاصله x به سمت = همان است که با یک در اول به سطح

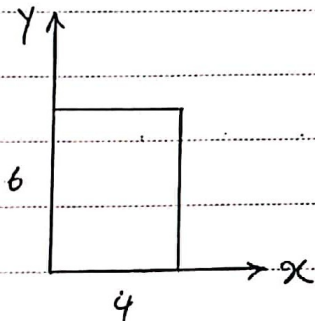


$$S_x = 12 \times 5 \times 6 + 13 \times 6 \times 15 = 1530 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 12 \times 5 \times 6.5 + 13 \times 6 \times 6.5 = 897 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 12 \times 5 \times 0 + 13 \times 6 \times 0 = 0$$

همان است که یک سطح نسبت به محور قرار دارد از مرکز قرار است



$$S_x = 4 \times 6 \times 3 = 72 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 4 \times 6 \times 2 = 48 \text{ cm}^3$$

$$S_x = \int_a^b \int_c^d y \, dy \, dx$$

$$S_y = \int_a^b \int_c^d x \, dx \, dy$$

مربعان همان است که با یک در اول

انگشت در گانه زیر یک در اول

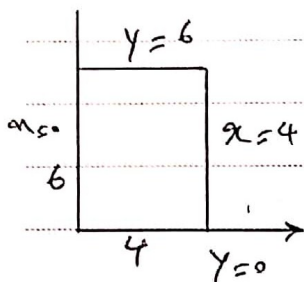
Subject:

Year:

Month:

Date:

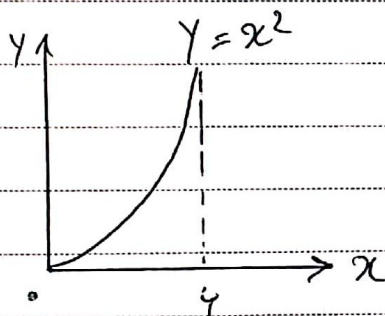
()



$$S_x = \int_0^4 \left(\int_0^6 y \, dy \right) dx$$

$$= \int_0^4 \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^6 dx = \int_0^4 (18 - 0) dx = \int_0^4 18 dx =$$

$$18 \times 4 - 0 = 72 \text{ cm}^3$$



$$S_x = \iint y \, dy \, dx$$

$$\int_x = \int_0^4 \int_0^{x^2} y \, dy \, dx =$$

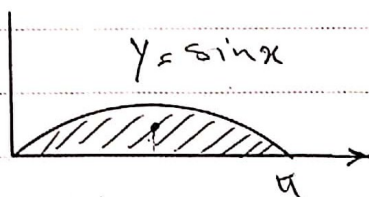
$$= \int_0^4 \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^{x^2} dx = \int_0^4 \left(\frac{x^4}{2} - 0 \right) dx = \frac{1}{2} x^5 \Big|_0^4 = 102.4 \text{ cm}^3$$

$$S_y = \iint x \, dx \, dy = \int_0^4 \int_0^{x^2} x \, dx \, dy = \int_0^4 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{x^2} dy =$$

$$\int_0^4 (x^3 - 0) dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^4 = 64 \text{ cm}^3$$

Subject:

Year: Month: Date: ()



$$S_x = \int_0^a \int_0^{\sin x} y \, dy \, dx =$$

$$= \int_0^a \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sin x} dx = \frac{1}{2} \int_0^a \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1 - \cos 2x}{2} dx$$

$$S_x = \frac{1}{4} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^a = \frac{1}{4} \{ (a - 0) - (0 - 0) \} =$$

$$= \frac{a}{4} \text{ cm}^3 = 0.785 \text{ cm}^3$$

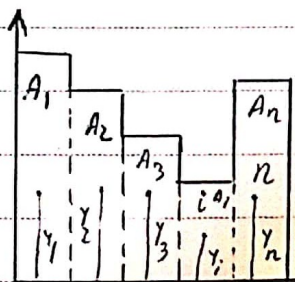
$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) + \sin^2 \alpha =$$

$$= 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$2\sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \checkmark$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \checkmark$$



$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_i y_i + A_n y_n$$

P4PCO

$$S_x = \sum_{i=1}^n A_i y_i \quad , \quad S_y = \sum_{i=1}^n A_i x_i$$

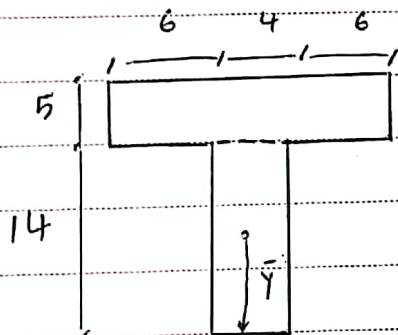
Subject:

Year, Month, Date, ()

مرکز سطح $\left. \begin{matrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{matrix} \right\}$

مان است نسبت به محور $\bar{y}$ فاصله مرکز سطح از محور $\bar{y}$ $\bar{y} = \frac{\text{مساحت مقطع} \times \text{فاصله مرکز سطح از محور}}{A}$

مان است نسبت به محور $\bar{x}$ فاصله مرکز سطح از محور $\bar{x}$ $\bar{x} = \frac{\text{مساحت مقطع} \times \text{فاصله مرکز سطح از محور}}{A}$



$$\bar{y} = \frac{4 \times 14 \times 7 + 16 \times 5 \times 15}{14 \times 4 + 16 \times 5}$$

$$\bar{y} = 12.5 \text{ cm}$$

مجموع مساحت

$$\bar{y} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} \rightarrow \text{مجموع مساحت}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i} \rightarrow \text{فاصله از مرکز مساحت}$$

مرکز ثقل

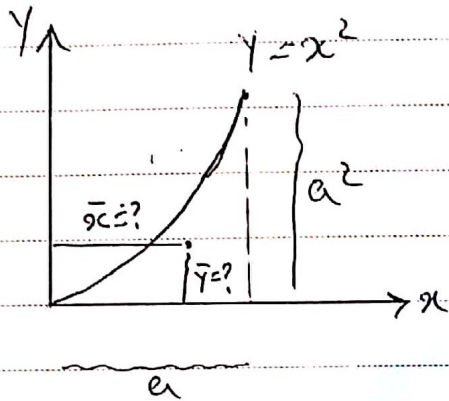
$$\bar{y} = \frac{\iint_A x \, dx \, dy}{A}$$

$$\bar{x} = \frac{\iint_A y \, dx \, dy}{A}$$

مرکز ثقل

Subject: _____

Year: _____ Month: _____ Date: _____ ()



$$\bar{y} = \frac{\iint_A x \, dx \, dy}{A}$$

$$= \frac{\int_0^a \int_0^{x^2} x \, dy \, dx}{\int_0^a \int_0^{x^2} dx \, dy}$$

$$= \frac{\int_0^a x y \Big|_0^{x^2} dx}{\int_0^a y \Big|_0^{x^2} dx} = \frac{\int_0^a x x^2 dx}{\int_0^a x^2 dx} = \frac{\frac{x^4}{4} \Big|_0^a}{\frac{x^3}{3} \Big|_0^a} = \frac{\frac{a^4}{4}}{\frac{a^3}{3}} = \frac{3}{4} a$$

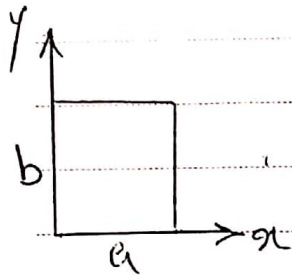
$$A = \int_0^a y \, dx = \int_0^a x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{a^3}{3}$$

$$\bar{x} = \frac{\iint_A y \, dx \, dy}{A} = \frac{\int_0^a \int_0^{x^2} y \, dy \, dx}{\frac{a^3}{3}} = \frac{\int_0^a \frac{y^2}{2} \Big|_0^{x^2} dx}{\frac{a^3}{3}}$$

$$= \frac{\int_0^a \frac{x^4}{2} dx}{\frac{a^3}{3}} = \frac{\frac{x^5}{5} \Big|_0^a}{\frac{a^3}{3}} = \frac{\frac{a^5}{5}}{\frac{a^3}{3}} = \frac{3}{5} a^2 = 0.6 a^2$$

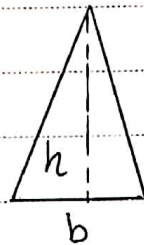
Subject:

Year: Month: Date: ()



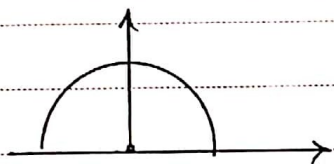
$$\bar{x} = \frac{b}{2}$$

$$\bar{y} = \frac{a}{2}$$



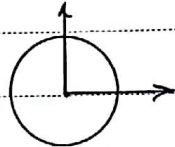
$$\bar{x} = 0$$

$$\bar{y} = \frac{h}{3}$$

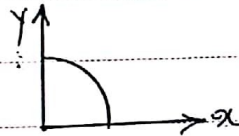


$$\bar{x} = 0$$

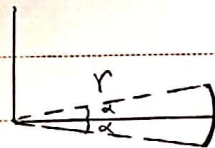
$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$



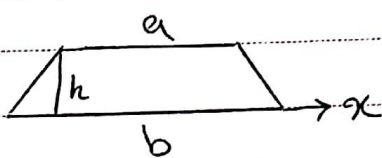
$$\bar{x} = \bar{y} = 0$$



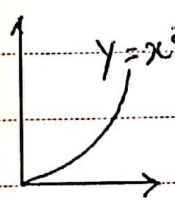
$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$



$$\bar{y} = 0, \bar{x} = \frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$$

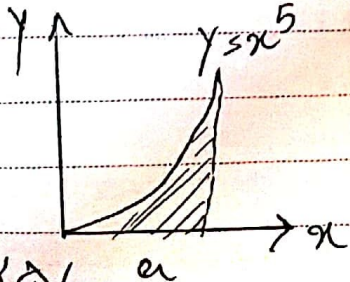


$$\bar{y} = \frac{h}{3} \times \frac{2a+b}{a+b}$$



وقتی $y = x^2$ از منحنی

$$A = \frac{ah}{3}$$



$$y = x^n \rightarrow A = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

$$A = \frac{a^6}{6}$$

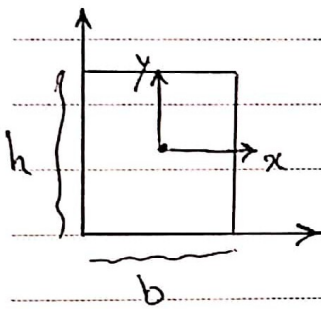
Subject:

Year. Month. Date. ()

مان انترسی، شتاد و دوم سطح

عزبر فاصلہ $\times$ ماحت = مان انترسی

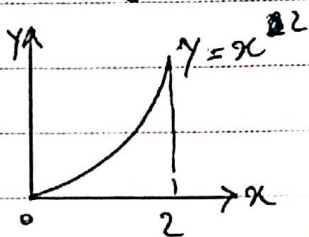
$$I_x = \int_a^b \int_c^d y^2 dx \quad , \quad I_y = \int_a^b \int_c^d x^2 dy dx$$



$$I_x = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy dx$$

$$= \int_{-b/2}^{b/2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} dx = \int_{-b/2}^{b/2} \left(\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24} \right) dx$$

$$\frac{h^3}{12} \int_{-b/2}^{b/2} dx = \frac{h^3}{12} \left[x \right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{h^3}{12} \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \right) = \frac{bh^3}{12}$$



$$I_x = \int_0^2 \int_0^{x^2} y^2 dy dx = \int_0^2 \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^6}{3} dx = \frac{x^7}{21} \Big|_0^2 = \frac{128}{21} \text{ cm}^4$$

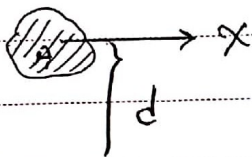
Subject:

Year. Month. Date. ()

تقسیم دعوای مولاری: برای بدست آوردن میان انرسی نسبت به دعوای که از مرکز مقطع نمی گذرد، از این قسمة استفاده می کنند.

میان انرسی نسبت به محوری که از مرکز مقطع نمی گذرد را برای بدست میان انرسی نسبت به محور گذراند.

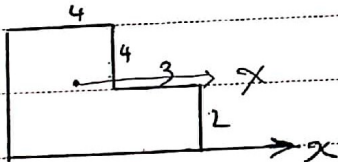
لذا در ادامه در این مقطع ضرب در مجذور فاصله دو محور



$$I_x = I_{x'} + A d^2$$

مثال: مقصود مطابق شکل متوزن است مطلوب است (A) بدست آوردن $I_{x'}$ مقطع

13) محاسبه $I_{x'}$



$$\bar{y} = \frac{\text{میان استاتیگ نسبت به محور } x}{A}$$

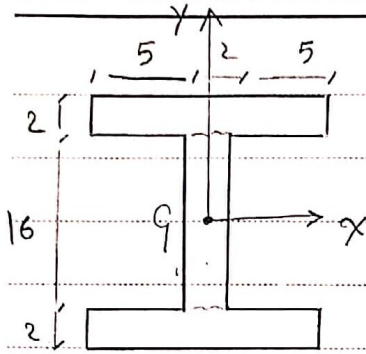
$$\bar{y} = \frac{4 \times 6 \times 3 + 3 \times 2 \times 1}{4 \times 6 + 3 \times 2} = \frac{78}{30} = 2.6 \text{ m}$$

$$I_{x'} = \left[\frac{4 \times 6^3}{12} + 4 \times 6 \times 3^2 \right] + \left[\frac{3 \times 2^3}{12} + 3 \times 2 \times 1^2 \right] =$$

$$I_{x'} = 296$$

Subject:

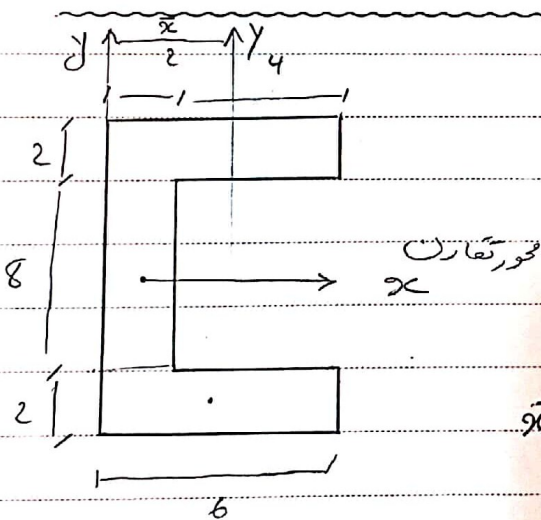
Year. Month. Date. ()



$$I_x = 2 \left[\frac{12 \times 2^3}{12} + 12 \times 2 \times 9^2 \right] +$$

$$+ \left[\frac{2 \times 16^3}{12} \right] \Rightarrow I_x = 4586.6 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 2 \left[\frac{2 \times 12^3}{12} \right] + \left[\frac{16 \times 2^3}{12} \right] = 586.6 \text{ cm}^4$$



$$I_y, I_x$$

این است که نسبت به محورها
محور تقارن

$$\bar{x} = \frac{2 \times 6 \times 3 + 2 \times 8 \times 1 + 2 \times 6 \times 3}{2 \times 6 + 2 \times 8 + 2 \times 6}$$

$$\bar{x} = \frac{88}{40} = 2.2 \text{ cm}$$

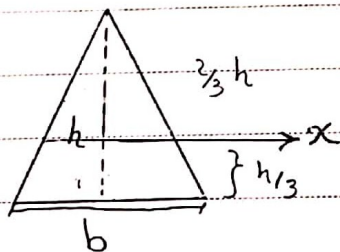
$$I_x = 2 \left[\frac{6 \times 2^3}{12} + 12 \times 5^2 \right] + \left[\frac{2 \times 8^3}{12} \right]$$

$$I_y = 2 \left[\frac{2 \times 6^3}{12} + 2 \times 6 \times (3 - 2.2)^2 \right] + \left[\frac{8 \times 2^3}{12} + 2 \times 8 \times (2.2 - 1)^2 \right]$$

$$I_y =$$

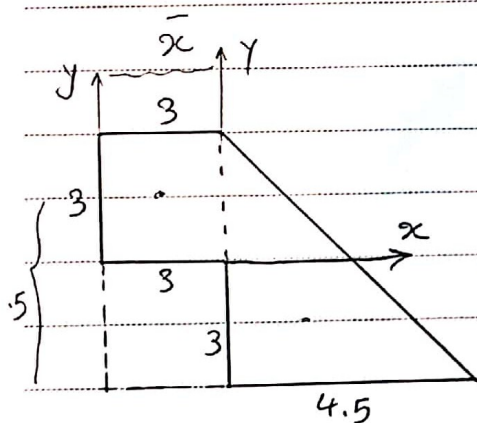
Subject:

Year. Month. Date. ()



$$I_x = \frac{bh^3}{36}$$

نقطه به محور نزدیکتر از مرکز



$$I_x, I_y \text{ ؟}$$

$$\bar{x}, \bar{y} \text{ ؟}$$

$$\bar{y} = \frac{3 \times 3 \times 4.5 + 6 \times 4.5 \times 2}{3 \times 3 + \frac{6 \times 4.5}{2}} = \bar{y} = 3$$

$\frac{6}{3} = 2$

$$\bar{x} = \frac{3 \times 3 \times 1.5 + \frac{6 \times 4.5}{2} \times 4.5}{22.5} = 3.3 \quad \bar{x} = 3.3$$

$$I_x = \left[\frac{3 \times 3^3}{12} + 3 \times 3 \times 1.5^2 \right] + \left[\frac{4.5 \times 6^3}{36} + \frac{4.5 \times 6}{2} \times 1^2 \right] =$$

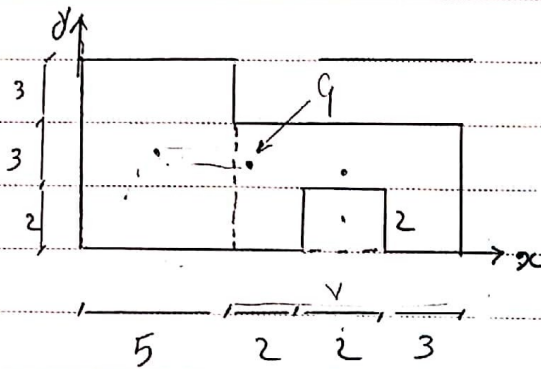
$$I_x =$$

$$I_y = \left[\frac{3 \times 3^3}{12} + 3 \times 3 \times (1.8)^2 \right] + \left[\frac{6 \times 4.5^3}{36} + \frac{4.5 \times 6}{2} \times (4.5 - 3.3)^2 \right] =$$

$$I_y =$$

Subject:

Year. Month. Date. ()



برای مقطع مطابق شکل معلوم است

الف) محاسبه مرکز ثقل مقطع نسبت به محورهای x و y

ب) محاسبه I_x و I_y

ج) استقرار محورهای اصلی اینرسی در مقطع

محورهای $(x$ و $y)$ محاسبه I_x و I_y

مان است نسبت به محور x و y
مساحت سطح

$$\bar{y} = \frac{5 \times 8 \times 4 + 5 \times 7 \times 2.5 - 2 \times 2 \times 1}{5 \times 8 + 5 \times 7 - 2 \times 2} = \bar{y} = \frac{243.5}{71} = 3.4 \text{ cm}$$

$$\bar{x} = \frac{5 \times 8 \times 2.5 + 5 \times 7 \times 8.5 - 2 \times 2 \times 8}{71} \Rightarrow \bar{x} = \frac{361.5}{71} = 5.1 \text{ cm}$$

$$I_x = \left[\frac{5 \times 8^3}{12} + 5 \times 8 \times 4^2 \right] + \left[\frac{7 \times 5^3}{12} + 7 \times 5 \times (2.5)^2 \right] - \left[\frac{2 \times 2^3}{12} + 2 \times 2 \times 1^2 \right]$$

$$I_x = 1140 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \left[\frac{8 \times 5^3}{12} + 5 \times 8 \times (2.5)^2 \right] + \left[\frac{5 \times 7^3}{12} + 5 \times 7 \times (8.5)^2 \right] -$$

$$\left[\frac{2 \times 2^3}{12} + 2 \times 2 \times 8^2 \right] \Rightarrow I_y = 2748 \text{ cm}^4$$

$$I_x = \left[\frac{5 \times 8^3}{12} + 5 \times 8 \times (4 - 3.4)^2 \right] + \left[\frac{7 \times 5^3}{12} + 5 \times 7 \times (3.4 - 2.5)^2 \right] -$$

Subject:

Year. Month. Date. ()

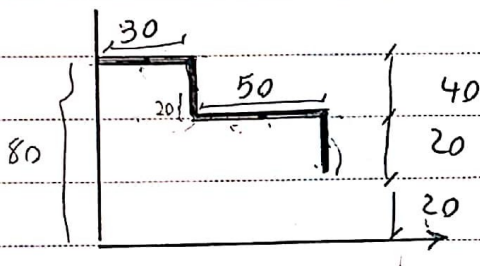
$$-\left[\frac{2 \times 2^3}{12} + 2 \times 2 \times (13.4 - 1)^2\right] = 305 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \left[\frac{8 \times 5^3}{12} \times 5 \times 8 \times (5.1 - 2.5)^2\right] + \left[\frac{5 \times 7^3}{12} \times 5 \times 7 \times (8.5 - 5.1)^2\right]$$

$$-\left[\frac{2 \times 2^3}{12} + 2 \times 2 \times (8 - 5.1)^2\right] = 866 \text{ cm}^4$$

نکته: همان انفرسی نسبت به یک محور میجوئیت صفرا منتفی نمی گردد.

سوال: مرکز ثقل مطابق شکل را حساب کنید.

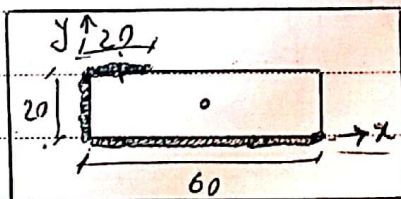


$$\bar{y} = \frac{30 \times 80 + 40 \times 60 + 50 \times 40 + 20 \times 30}{30 + 40 + 50 + 20} \Rightarrow \bar{y} = \frac{6800}{140} = 48.57 \text{ cm}$$

$$\bar{x} = \frac{30 \times 15 + 40 \times 30 + 50 \times 55 + 20 \times 80}{140} = \bar{x} = 43 \text{ cm}$$

پس A به نسبت B مطابق شکل جوئی شده است. اگر بعد جوئی در هر دو یکسان باشد.

مرکز جوئی را نسبت به محورهای داده شده.



حساب کنید.

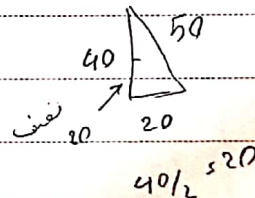
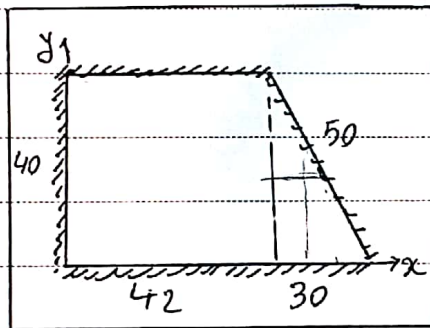
Subject:

Year. Month. Date. ()

$$\bar{y} = \frac{20 \times 20 + 20 \times 10 + 60 \times 0}{20 + 20 + 60} = \frac{600}{100} = 6 \text{ cm}$$

$$\bar{x} = \frac{20 \times 10 + 20 \times 0 + 60 \times 30}{100} = \frac{2000}{100} = 20 \text{ cm}$$

ج ۲



$$\bar{y} = \frac{72 \times 0 + 40 \times 20 + 42 \times 40 + 50 \times 20}{72 + 40 + 42 + 50} = \frac{3080}{204} = 15.1 \text{ cm}$$

$$\bar{x} = \frac{72 \times 36 + 40 \times 0 + 42 \times 21 + 50 \times (42 + 15)}{204} = \frac{6324}{204} = 31 \text{ cm}$$

مان انزسی قطبی بر مقطع

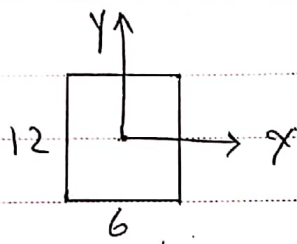
$$I_p = I_x + I_y$$

مان انزسی قطبی بر مجموع دو مان انزسی I_x و I_y است.

Pole = قطب

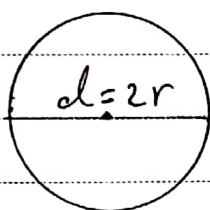
Subject:

Year. Month. Date. ()



$$I_p = ?$$

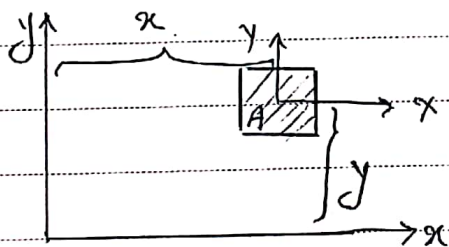
$$I_p = I_x + I_y = \frac{6 \times 12^3}{12} + \frac{12 \times 6^3}{12} = 1080 \text{ cm}^4$$



$$I_p = I_x + I_y$$

$$= \frac{\pi d^4}{64} + \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{32}$$

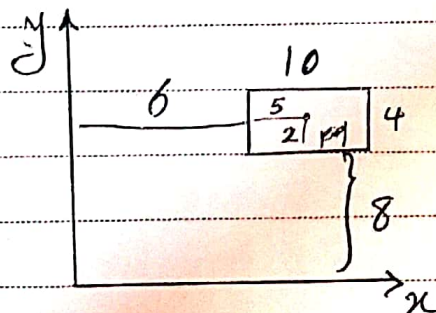
$$= \frac{\pi r^4}{4} + \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi r^4}{2}$$



مکان انبری حاصل ضرب:

فاصله مرکز مقطع از دو محور بوده:

$$I_{xy} = A \times x \times y$$



$$I_{xy} = 10 \times 4 \times 10 \times 11 = 4400 \text{ cm}^4$$

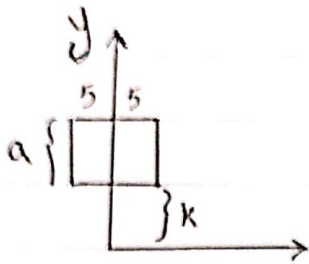
Subject :

Year :

Month :

Date :

()



$$I_{xy} = 0$$

اگر محور دوری محور بیفتد همان انری حاصل ضرب
صفر است.

همان انری حداقل و حداکثر مقطع :

در صورت کمانش همان انری حداکثر و حداقل کاربرد دارد. زیر مقاطع فکری

همواره حول محور ضعیف یعنی محوری که همان انری حداقل دارد کمانش می کند.

مقاطع متقارن که از دو همان انری I_x و I_y حداقل و حداکثر می باشد.

اما اگر مقطع متقارن نداشته باشد. زیر به زیر همان انری حداقل و حداکثر

را به دست می آوریم (اگر ضعیف است با انتفا به کنیم همان انری حداکثر و اگر

ضعیف منفرجه با انتفا به کنیم همان انری $\min$ را به دست می آوریم.)

در فرمول زیر I_x و I_y همان انری حاصل ضرب در مرکز است.

$$I_{\max, \min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}}$$

Subject:

Year:

Month:

Date:

()

شعاع دور استوار: در محب کمانش که انداز و اثر دای که از آن شعاع دور استوار

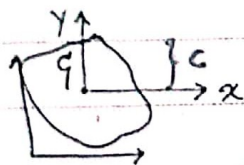
مقطع است که از تابان دور استوار است

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

اصل مقطع:

در محب غرض اصل مقطع لازم است که از تابان دور استوار است



$$w_x = \frac{I_x}{c}$$

$$w_y = \frac{I_y}{c'}$$

c : فاصله دور ترین تار از محور

c' : فاصله دور ترین تار از محور