بنام خداوند بخشنده مهربان

مقاومت مصالح (۲)

سرفصل دروس :

۱- تبدیل تنش و کرنش

- مولفه ی تنش روی یک صفحه مایل ، تنشهای اصلی ، تنش برشی ماکزیمم ، دایره مور و روشهای ترسیم آن (Mohr circle) - کرنش های اصلی - دایره مور کرنش ، رابطه بین دایره مور تنش و کرنش

۲- خیز در تیرهای نامعین

- روش انتگرال گیری - روش پرانتز شکسته (پرانتز ماکولی) - روش گشتاور سطح (تکرار ....) روش جمع آثار (superposition)

۳- انرژی و کار مجازی

- انرژی الاستیک کرنشی - کار خارجی - تعیین خیز از روش بقا انرژی - قضایای کاستیلیانو و استفاده آنها در حل سیستم های نامعین

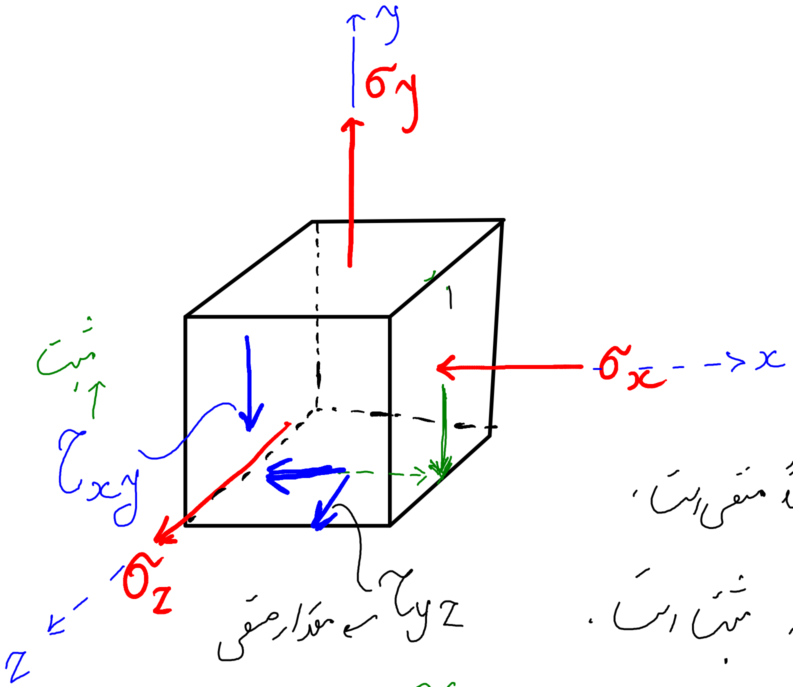
۴- ستونها

مفهوم پایداری و ناپایداری ستونها - تئوری پایداری ستونها - تعیین بار بحرانی اولر برای ستونها - بار محوری خارج از مرکز و فرمول سکانت

مرجع : کتاب مقاومت مصالح پرجانستون

تنش: مفهوم مثبت و منفی بودن تنش

یادآوری: تنش های نرمال را با σ، تنش های برشی را با τ نشان می دهیم



در شکل مقابل: تنش در راستای x، فشاری و نتیجتاً منفی است.

" " " " " y و z، کششی و " " مثبت است.

τ راستای نرمال صفحه ای که تنش بر آن صفحه وارد می شود، راستای تنش

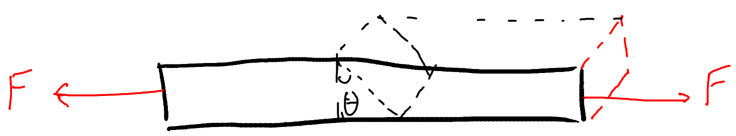
یادآوری: نرمال یک صفحه، محور بر صفحه به جهت خارج صفحه می باشد.

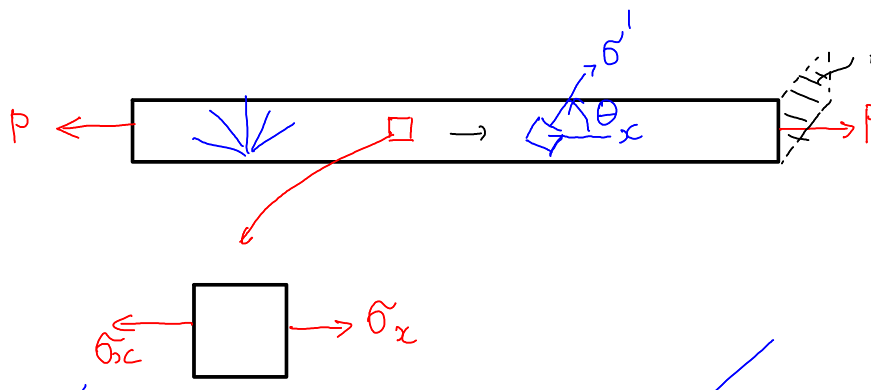
نکته: هرزمانیکه اندیس های تنش برشی، مخالف یکدیگر باشند، تنش برشی منفی در غیر اینصورت تنش برشی مثبت خواهد بود. برای مثال:

اگر:
جهت نرمال صفحه → (-)
جهت تنش → (+)
⟶ تنش منفی خواهد بود

جهت نرمال صفحه → ~~(-)~~ +
جهت تنش → ~~(-)~~ +
⟶ تنش مثبت

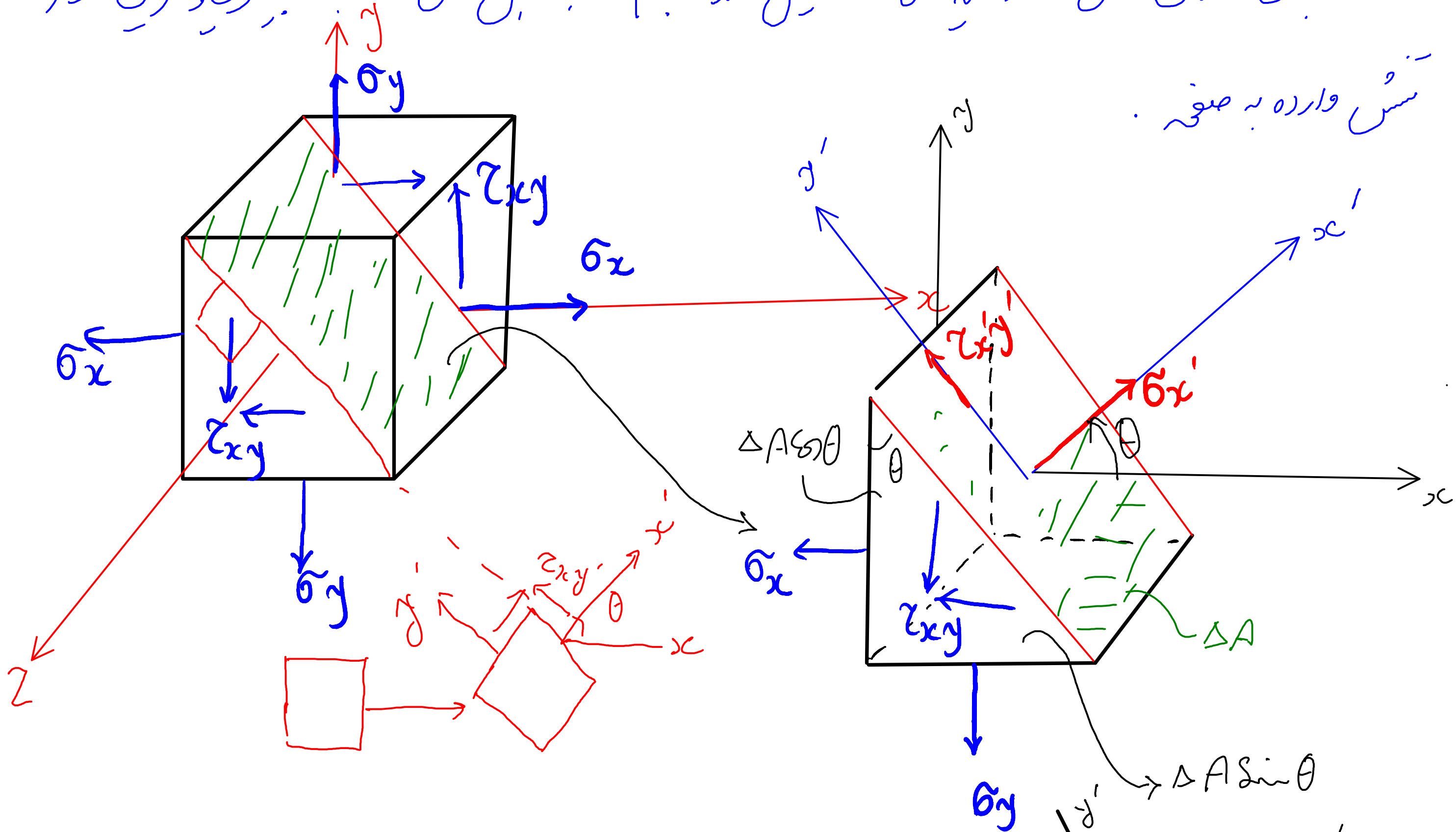
یادآوری:



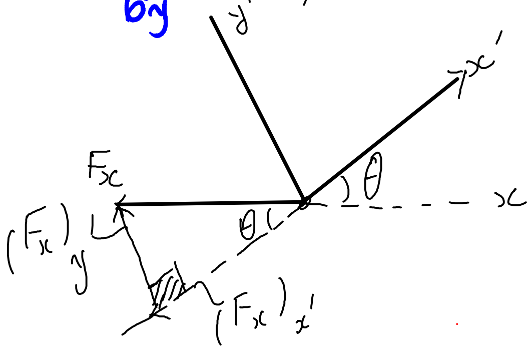


$\sigma = P/A$

هدف: بدست آوردن تنش ها در کلیه صفحات تشکیل دهنده جسم و به دنبال آن محاسبه بیشترین و کمترین مقدار تنش وارده به صفحه.



$\sum F_{x'} = 0$; $\sum F_{y'} = 0$

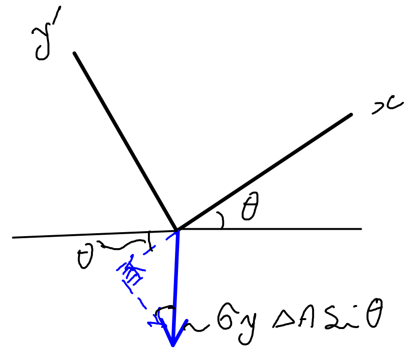


نیروی σ_x $= \sigma_x (\Delta A \cos\theta)$

نیروی ناشی از σ_x در راستای x' $= -\sigma_x \Delta A \cos^2\theta$

نیروی ناشی از σ_x در راستای y' $= +(\sigma_x \Delta A \cos\theta)\sin\theta$

نیروی ناشی از σ_y $= \sigma_y \Delta A \sin\theta$



پس از نوشتن کلیه نیروهای ناشی از تنش‌های نشان داده شده، مقادیر $\sigma_{x'}$ و $\tau_{x'y'}$ بدست خواهند آمد.

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta \\ \tau_{x'y'} = -\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta \end{cases}$$

برای بدست آوردن تنش نرمال در راستای y'، کافیست در رابطه $\sigma_{x'}$، بجای θ مقدار $(\frac{\pi}{2}+\theta)$ قرار دهیم.

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos(\pi+2\theta) + \tau_{xy}\sin(\pi+2\theta)$$

$$\boxed{\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta}$$

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

نتیجه: چون $\sigma_z = 0$؛ بنابراین در مورد تنشهای نرمال یک سطح، مجموع این تنشها بستگی به موقعیت فضایی المان ندارد.

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta & (1) \\ \tau_{x'y'} = -\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta & (2) \end{cases}$$

$$(1)\quad \sigma_{x'} - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

(۲) طرفین به توان (۲) $\rightarrow$ $$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2\cos^2 2\theta + \tau_{xy}(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\theta\cos 2\theta + \tau_{xy}^2\sin^2 2\theta \quad (3)$$

(۲) به توان (۲) ; $$\tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2\sin^2 2\theta - \tau_{xy}(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\theta\cos 2\theta + \tau_{xy}^2\cos^2 2\theta \quad (4)$$

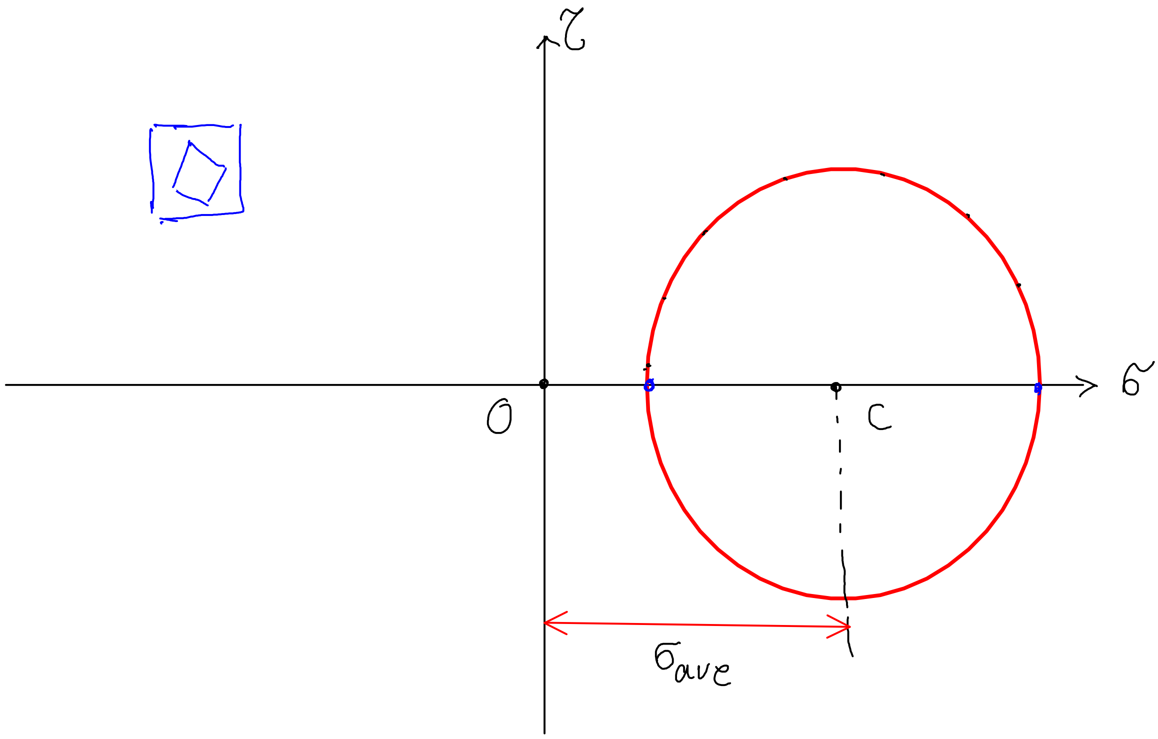
از جمع روابط (3) و (4)؛

$$\left(\sigma_{x'} - \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (5)$$

معادله دایره به مرکز (a,b) ؛ $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$

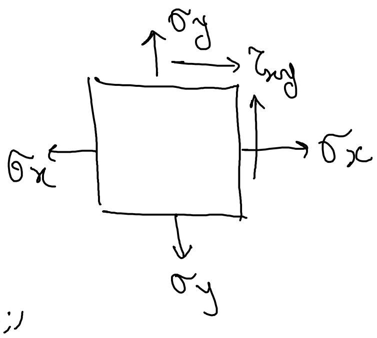
تنش متوسط $= \sigma_{ave} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$

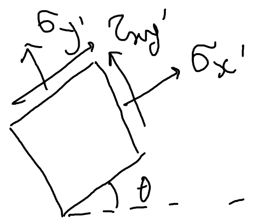
معادله (5)، معادله دایره‌ای است به مرکز $C(\sigma_{ave}, 0)$ و به شعاع $\left[\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2\right]^{1/2}$ که به این دایره، دایره مور اطلاق می‌شود. هر نقطه روی محیط این دایره معادل یک صفحه روی المان نقطه می‌باشد.



iaunourmechanic@gmail.com

$$\begin{cases} \sigma_{x'} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta & (1) \\[2ex] \tau_{x'y'} = -\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta & (2) \end{cases}$$





از رابطه (۱)

$$\theta \longrightarrow \frac{\pi}{2}+\theta \longrightarrow \sigma_{y'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y$$

هدف : محاسبه تنش های نرمال و برشی ماکزیمم و مینیمم :

- در واقع می‌خواهیم θ ای را محاسبه کنیم که تنش نرمال در راستای آن θ ماکزیمم است .

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = 0 \Rightarrow -(\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\theta + 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow 2\tau_{xy}\cos 2\theta = (\sigma_x-\sigma_y)\sin 2\theta \xrightarrow{\text{بر } \cos 2\theta \text{ تقسیم}} (\sigma_x-\sigma_y)\tan 2\theta = 2\tau_{xy}$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} = K = \tan\varphi$$

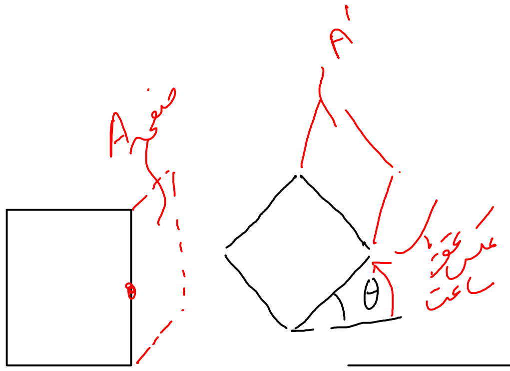
$$\Rightarrow 2\theta = K\pi + \varphi \quad \begin{cases} K=0 \to 2\theta_{p_1} = \varphi \\ K=1 \to 2\theta_{p_2} = \pi+\varphi \end{cases} \to 2\theta_{p_2} - 2\theta_{p_1} = \pi$$

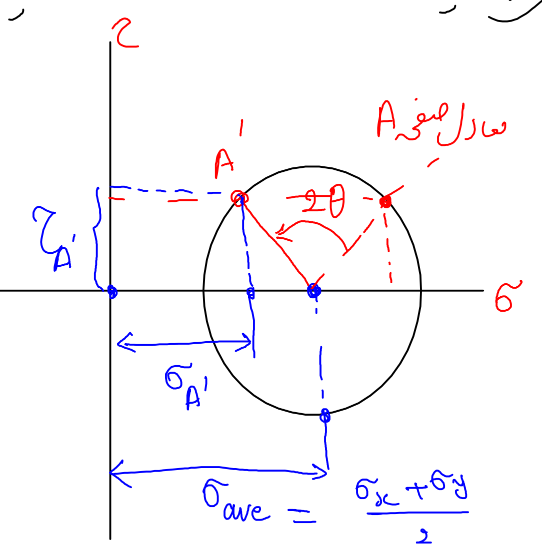
$$2(\theta_{p_2}-\theta_{p_1}) = \pi \Rightarrow \underbrace{\theta_{p_2}-\theta_{p_1} = \frac{\pi}{2}}$$

صفحاتی که در بر گیرنده تنشهای ماکزیمم و مینیمم نرمال می باشند به صفحات اصلی معروف می باشند.

مقادیر ماکزیمم و مینیمم تنش های عمودی اعمال شده را تنش های اصلی می گویند.

برای بدست آوردن تنشهای متناظر با صفحاتی که به اندازه θ نسبت به المان اصلی چرخیده اند باید به اندازه 2θ روی محیط دایره حرکت نموده تا به نقاط متناظر برسیم.





نکته: تنش برشی روی صفحات اصلی وجود ندارد.

هدف: محاسبه θ ای که در آن تنش برشی ماکزیمم باشد! (دو راه حل وجود دارد)

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta}=0 \qquad (1)$$

(2) در نقطه τ_{max}، مقدار تنش نرمال برابر تنش متوسط می باشد بنابراین کافی است در رابطه $\sigma_{x'}$، به جای $\sigma_{x'}$، مقدار σ_{ave} را قرار دهیم.

$$\sigma_{x'}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\sigma_{ave}=\cancel{\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}}=\cancel{\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}}+\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta+\tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta_s=-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}}=K'=\tan\phi'$$

$$2\theta_s=K\pi+\phi' \rightarrow \begin{cases}2\theta_{s_1}=\phi'\\ 2\theta_{s_2}=\pi+\phi'\end{cases} \rightarrow 2\theta_{s_2}-2\theta_{s_1}=\pi$$

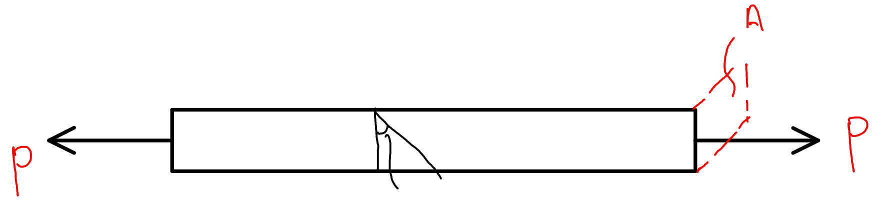
$$\theta_{s_2}-\theta_s=\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \tan 2\theta_p = \dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y} \\ \tan 2\theta_s = -\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_{xy}} \end{cases} \quad ; \tan 2\theta_p \times \tan 2\theta_s = -1$$

با توجه به رابطه حاصلضرب دو ضریب زاویه برابر (۱-) می باشد

لذا $2\theta_p$ و $2\theta_s$ بر یکدیگر عمودند. بنابراین راستای تنش نرمال ماکزیمم بر تنش برشی ماکزیمم عمود می باشد:

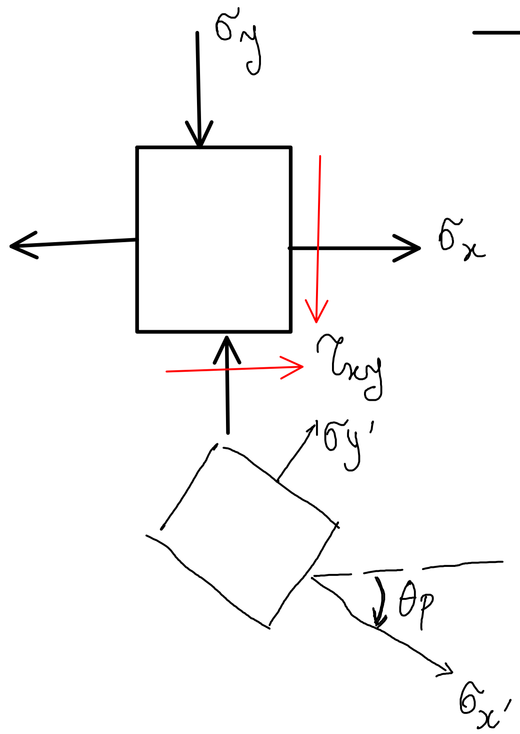
$$\begin{cases} 2\theta_p - 2\theta_s = \pi/2 \\ 2(\theta_p-\theta_s) = \dfrac{\pi}{2} \rightarrow \theta_p - \theta_s = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$



$\sigma = \dfrac{P}{A}$

$\theta = 45^\circ \rightarrow$ تنش برشی ماکزیمم است

$\theta = 0 \rightarrow$ تنش نرمال ماکزیمم است



چگونگی رسم دایره مور :

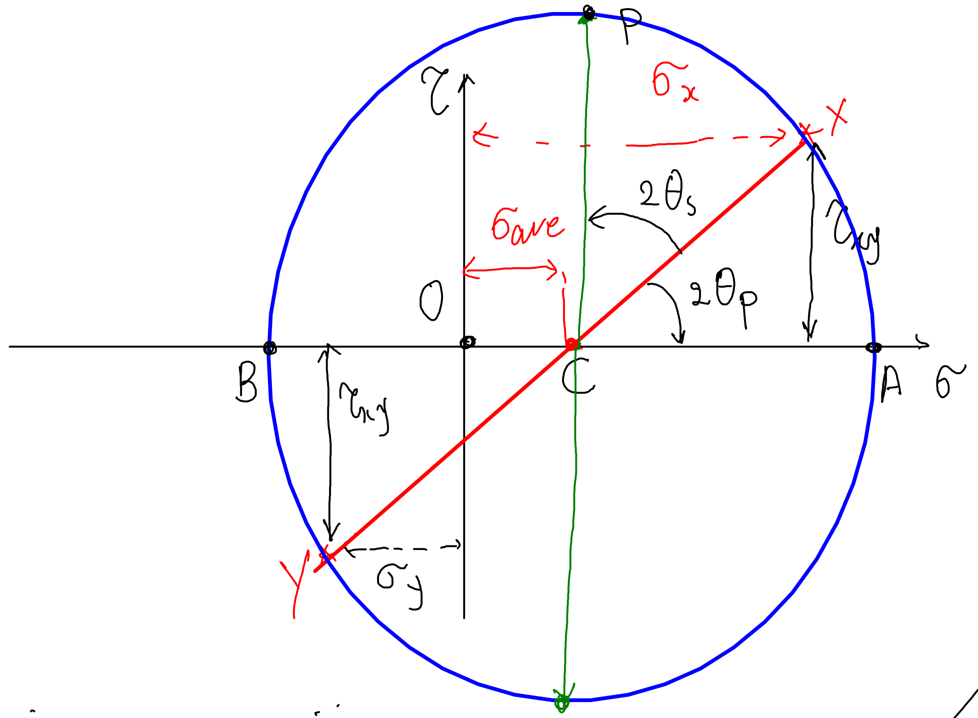
۱- نقطه $X \left| \begin{matrix} \sigma_x \\ -\tau_{xy} \end{matrix} \right.$ و نقطه $Y \left| \begin{matrix} \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{matrix} \right.$ را روی صفحه مختصات تعیین می کنیم

۲- $\sigma_{ave} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$ را محاسبه نموده و روی محور مشخص می کنیم

۳- از نقطه X به نقطه Y باید خط راستی وصل می کنیم.

۴- محل تقاطع این خط با محور σ ها، مرکز دایره مور می باشد

۵- به مرکز C و شعاع CX یا CY دایره ای را رسم می کنیم.



نکته: اگر تنش برشی اعمال شده روی یک صفحه، متمایل به چرخاندن المان هم‌جهت با چرخش عقربه‌های ساعت باشد نقطه متناظر با آن صفحه روی دایره مور، بالای محور σها قرار می‌گیرد.

برعکس، اگر تنش برشی متمایل به چرخاندن المان در جهت عکس چرخش عقربه‌های ساعت باشد، نقطه متناظر با آن در زیر محور σها قرار می‌گیرد.

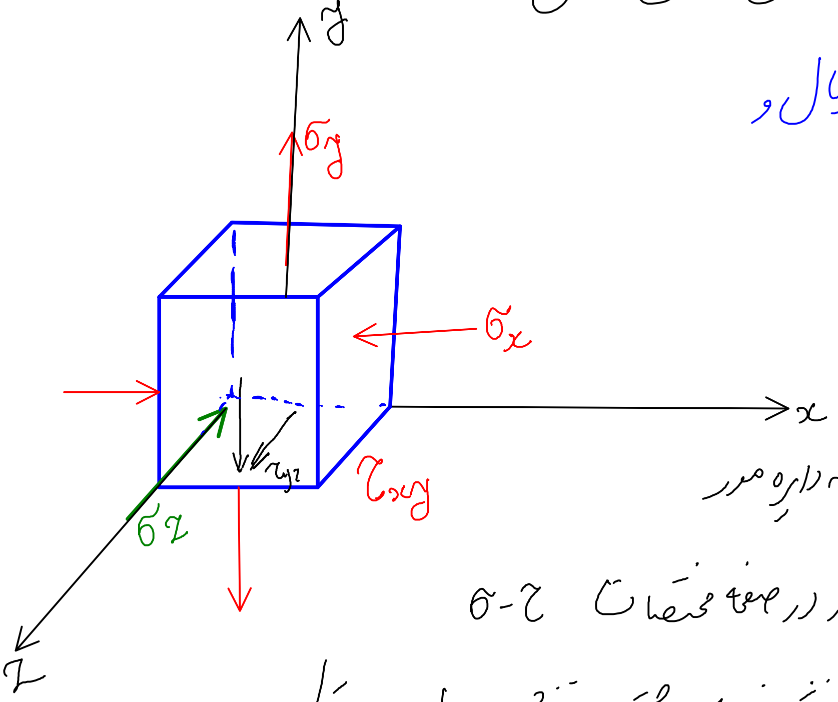
زاویه‌ای که خط CX را به CA منطبق کند، زاویه $2\theta_p$ خواهد بود.

زاویه‌ای که CX را به CP منطبق کند، زاویه $2\theta_s$ خواهد بود.

تنش سه‌بعدی :

در این مبحث می‌خواهیم دایره مور را برای المانی ترسیم نمائیم که علاوه بر اعمال تنش نرمال و برشی در دو جهت، در جهت سوم نیز فقط به اعمال تنش نرمال وارد شود.

هدف بدست آوردن بیشترین یا کمترین تنش نرمال و تنش برشی وارد بر قطعه می‌باشد.



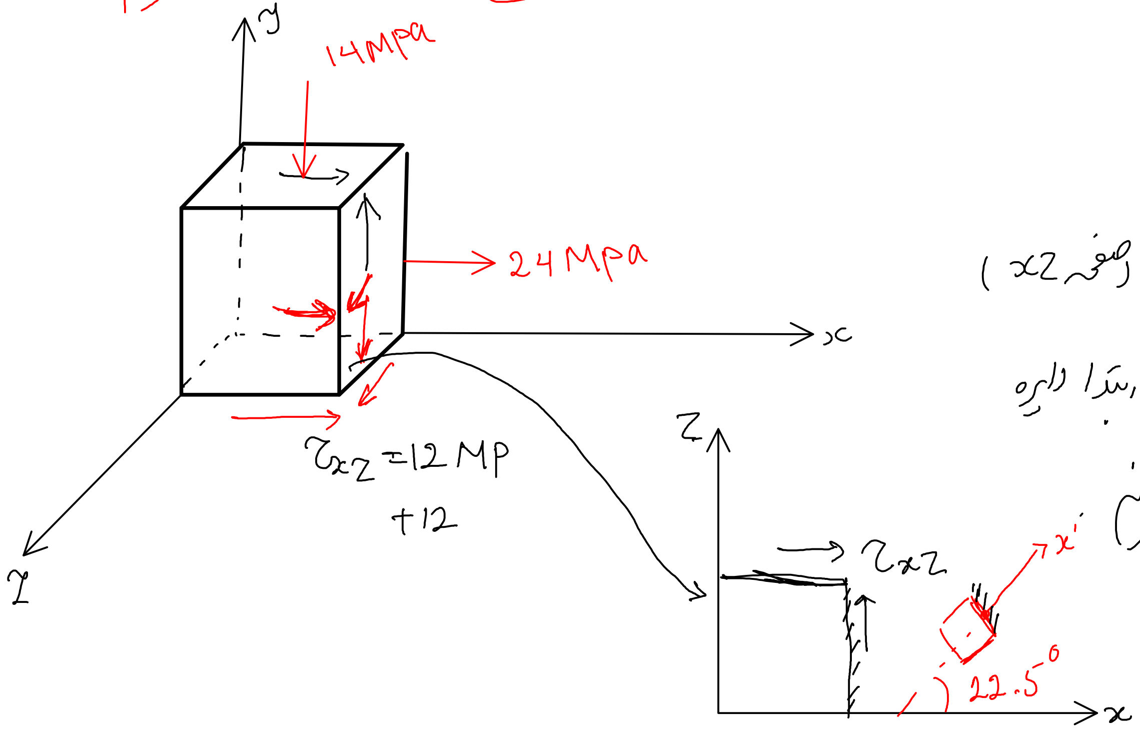
برای المان نشان داده شده، دو به دو، سه دایره مور ترسیم می‌نمائیم. پس قبلاً سه دایره مور در صفحه مختصات $\sigma-\tau$ ترسیم خواهد شد که بیشترین تنش نرمال نشان‌دهنده بیشترین تنش نرمال وارد بر قطعه

کمترین " " " کمترین " " " " " "

بیشترین " برشی " بیشترین " برشی وارد بر قطعه می‌باشد.

ابتدا دایره مور را برای صفحاتی ترسیم می‌کنیم که در آن صفحات تنش برشی وجود دارد. سپس با بدست آوردن تنش اصلی برای این صفحات، با استفاده از این تنش‌های اصلی و تنش اصلی سوم (که برابر با نشان داده شده وارد می‌شود) دو دایره مور دیگر را ترسیم می‌نمائیم.

مثال: با در نظر گرفتن وضعیت تنش‌ها، صفحات اصلی تنش، تنش‌های اصلی وارد بر نقطه و تنش برشی ماکزیمم وارد بر نقطه را بدست آورید.

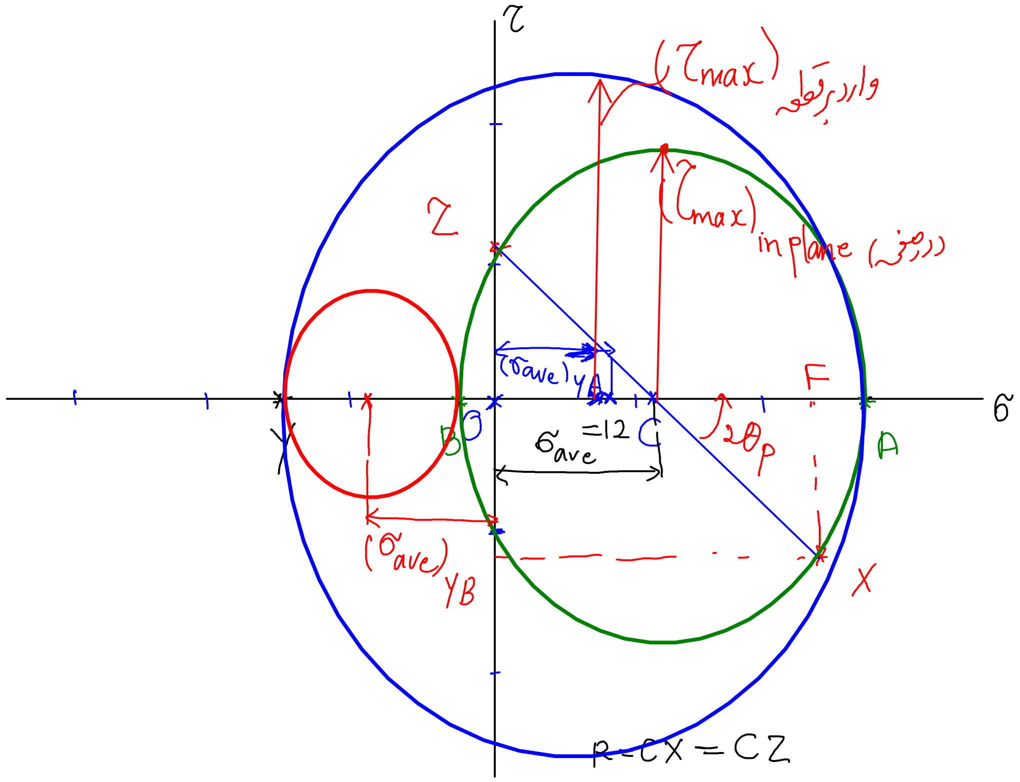


با توجه به شکل در جهت xz، (صفحه xz) تنش برشی وجود دارد پس ابتدا دایره مور برای این صفحه ترسیم می‌کنیم

$x\begin{vmatrix}24\\-12\end{vmatrix}$

نقطه $x\begin{vmatrix}\sigma_x\\-\tau_{xz}\end{vmatrix}$ (چون تنش برشی وارد بر وجهی که نرمال آن محور x می‌باشد اگر در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌چرخانند پس نقطه متناظر آن زیر محور σها قرار می‌گیرد)

چون در روی المان تنش نرمال در راستای z وارد نشده است مقدار آن را صفر در نظر می‌گیریم.



$CX=\sqrt{\overline{CF}^2+\overline{FX}^2}\simeq 17$

$CZ=\sqrt{\overline{OC}^2+\overline{OZ}^2}\simeq 17$

$$\sigma_{ave}=\frac{\sigma_x+\sigma_z}{2}=\frac{24+0}{2}=12\ \text{Mpa}$$

$$\sigma_{max}=\sigma_{ave}+R\simeq 12+17=29\ \text{Mpa};\quad \sigma_{min}=\sigma_B=\sigma_{ave}-R=12-17=-5\ \text{Mpa}$$

$$\tan 2\theta_p=\frac{12}{12}=1\Rightarrow 2\theta_p=45^0\rightarrow\theta_p=22.5^0$$

ادامه مثال:

تنش در راستای z ، تنش اصلی سوم می‌باشد چون تنش برشی در این صفحه صفر است پس مقدار آن دقیقاً روی محور σ قرار می‌گیرد.

دو دایره به قطر $\overline{YA}$ و $\overline{YB}$ ، دایره اول به مرکز $(\sigma_{ave})_{YA} = \frac{\sigma_y+\sigma_A}{2} = \frac{-14+29}{2} = 7.5\ \text{Mpa}$ و دایره دوم به مرکز $(\sigma_{ave})_{YB} = \frac{\sigma_y+\sigma_B}{2} = \frac{-14-5}{2} = -9.5$ ترسیم می‌کنیم.

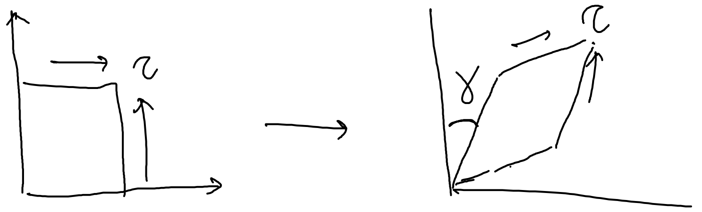
$$(\tau_{max})_{\text{وارد بر قطعه}} = \frac{1}{2}\left|\sigma_{max} - \sigma_{min}\right| = \frac{1}{2}\left|29-(-14)\right| = 21.5\ \text{Mpa}$$

بنام خدا — مقاومت مصالح (۲) — جلسه پنجم

دایره مور برای کرنش :

$$\text{کرنش} = \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \equiv \sigma \quad ; \quad \text{تنش های محوری} \quad ; \quad \sigma = E\varepsilon$$

E مدول الاستیسیته



$$\tau_{xy} = G\,\gamma_{xy}$$

G مدول الاستیسیته برشی

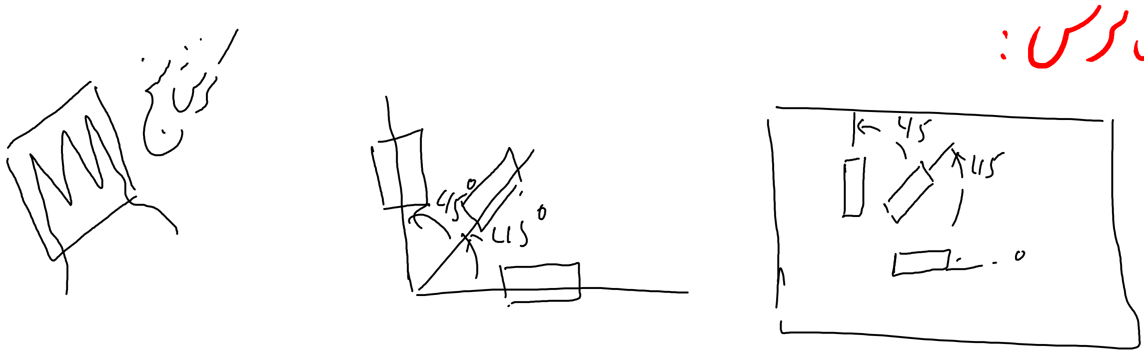
هدف از ترسیم دایره مور کرنش، بدست آوردن تغییر شکل المان در زوایای مختلف با معلوم بودن تغییر شکل آن در یک زاویه معین می باشد. بدنبال آن می توان بیشترین و کمترین مقدار ε و γ را محاسبه نمود. همانند دایره مور تنش سه بعدی، می توان دایره مور کرنش سه بعدی ترسیم نمود.

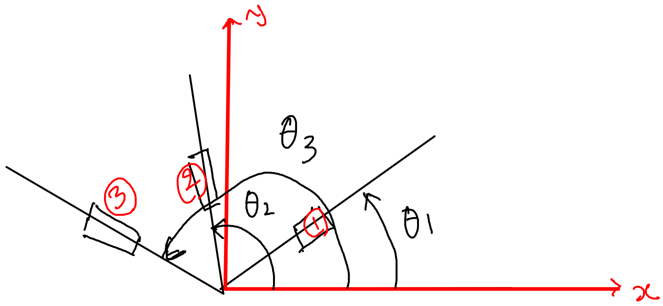
$$\varepsilon \equiv \sigma \quad ; \quad \frac{\gamma}{2} \equiv \tau \quad ; \quad X \left| \begin{matrix} \varepsilon_x \\ -\frac{\gamma_{xy}}{2} \end{matrix} \right. \qquad Y \left| \begin{matrix} \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{x'} = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \dfrac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta \\ \varepsilon_{y'} = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \dfrac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta \\ \dfrac{\gamma_{x'y'}}{2} = -\dfrac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\theta + \dfrac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta \end{cases}$$

رابطه لازم : $\varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_{x'} + \varepsilon_{y'}$; $\varepsilon_{ave} = \dfrac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2}$

اندازه گیری کرنش :





$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon_x \cos^2\theta_1 + \varepsilon_y \sin^2\theta_1 + \gamma_{xy}\sin\theta_1\cos\theta_1 \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_x \cos^2\theta_2 + \varepsilon_y \sin^2\theta_2 + \gamma_{xy}\sin\theta_2\cos\theta_2 \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_x \cos^2\theta_3 + \varepsilon_y \sin^2\theta_3 + \gamma_{xy}\sin\theta_3\cos\theta_3 \end{cases}$$

از روابط فوق با حل دستگاه سه معادله و سه مجهول مقادیر: ε_x ، ε_y و γ_{xy} محاسبه شده و با استفاده از این مقادیر، دایره مور را می‌توان ترسیم نمود.

دایره مور برای کرنش سه بعدی:

ترسیم دایره مور برای کرنش سه بعدی همانند ترسیم دایره مور برای تنش سه بعدی می‌باشد. لازم به یادآوری است که دایره مور کرنش ابتدا برای صفحاتی ترسیم می‌شود که در آن صفحه، تغییر شکل برشی (γ) وجود داشته باشیم.

ترسیم دایره مور کرنش با استفاده از دایره مور تنش یا بالعکس:

با استفاده از روابط هوک می‌توان از دایره مور تنش به دایره مور کرنش رسید و بالعکس.

بعنوان مثال: اگر σ_1 و σ_2 و σ_3 سه تنش اصلی یک قطعه باشند خواهیم داشت:

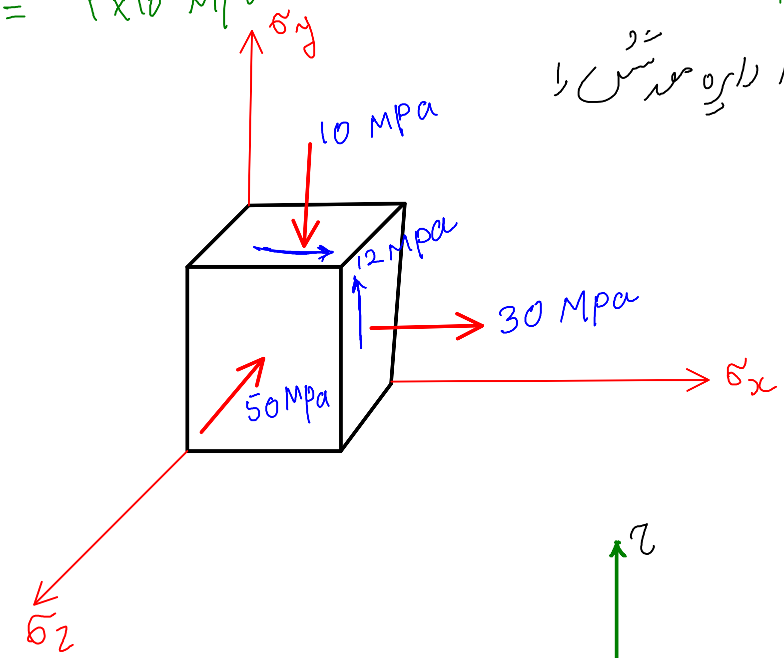
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\sigma_2}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ \varepsilon_3 = \dfrac{\sigma_3}{E} - \dfrac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases}$$

$\nu =$ ضریب پواسون = مقدار ثابت

Email : iaunourmechanic@gmail.com

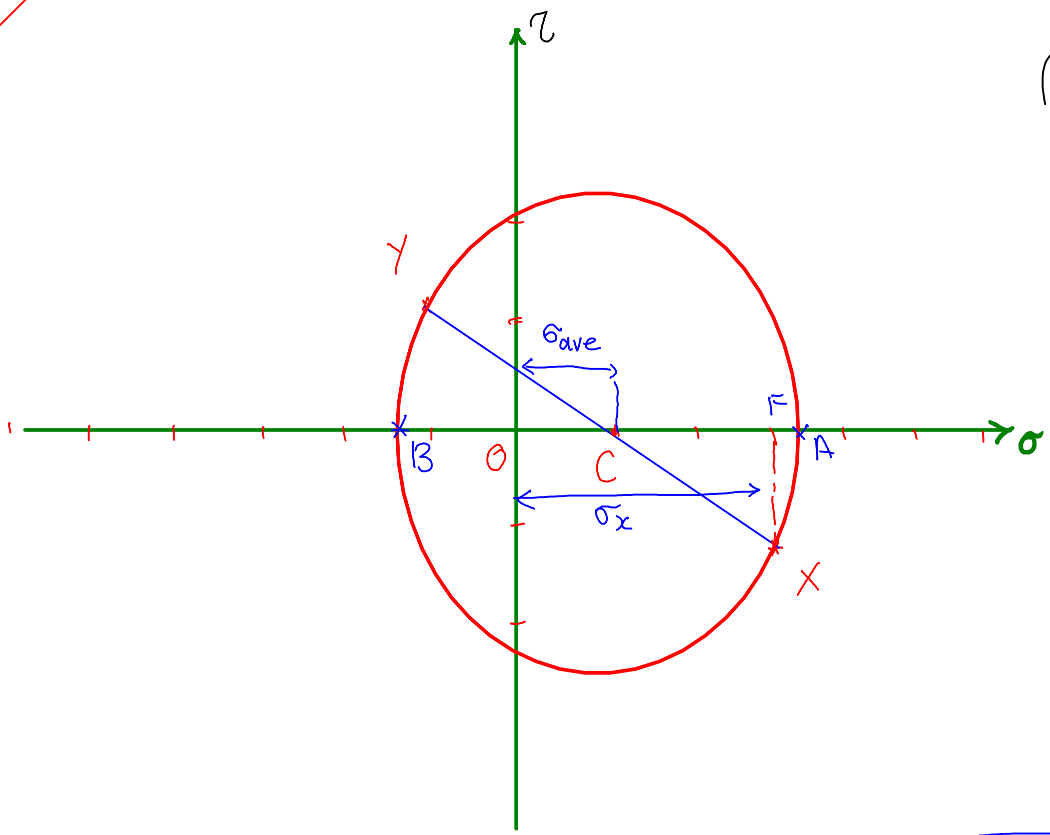
$\nu = 0.3$
$E = 1 \times 10^5$ MPa

مثال: ماکزیمم تغییر شکل برشی در صفحه و ماکزیمم تغییر شکل برشی قطعه را بدست آورید.



چون تنش برشی در صفحه xy اعمال می‌شود؛ ابتدا دایره مور تنش را برای این صفحه ترسیم می‌کنیم.

۱- رسم دایره مور تنش ۲- بدست آوردن تنش‌های اصلی
۳- استفاده از روابط هوک و بدست آوردن کرنش‌های اصلی
۴- رسم دایره مور کرنش سه بعدی
۵- محاسبه تغییر شکل برشی ماکزیمم



$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{30-10}{2} = 10 \quad ; \quad \underset{\parallel \, R}{CX} = \sqrt{\underbrace{\overline{CF}^2}_{\sigma_x - \sigma_{ave}} + \underbrace{\overline{FX}^2}_{\tau_{xy}}} = \sqrt{(30-10)^2 + 12^2} = 23.32$$

$$\sigma_1 = \sigma_A = \sigma_{ave} + R = 10 + 23.3 = 33.3 \quad ; \quad \sigma_2 = \sigma_B = \sigma_{ave} - R = 10 - 23.3 = -13.3$$

$$\begin{cases} \sigma_1 = 33.3 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -13.3 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = \sigma_z = -50 \text{ MPa} \end{cases} ; \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) = \frac{33.3}{10^5} - \frac{0.3}{10^5}(-63.3) \\ \varepsilon_2 = \frac{-13.3}{10^5} - \frac{0.3}{10^5}(-16.7) \\ \varepsilon_3 = \frac{-50}{10^5} - \frac{0.3}{10^5}(20) \end{cases}$$

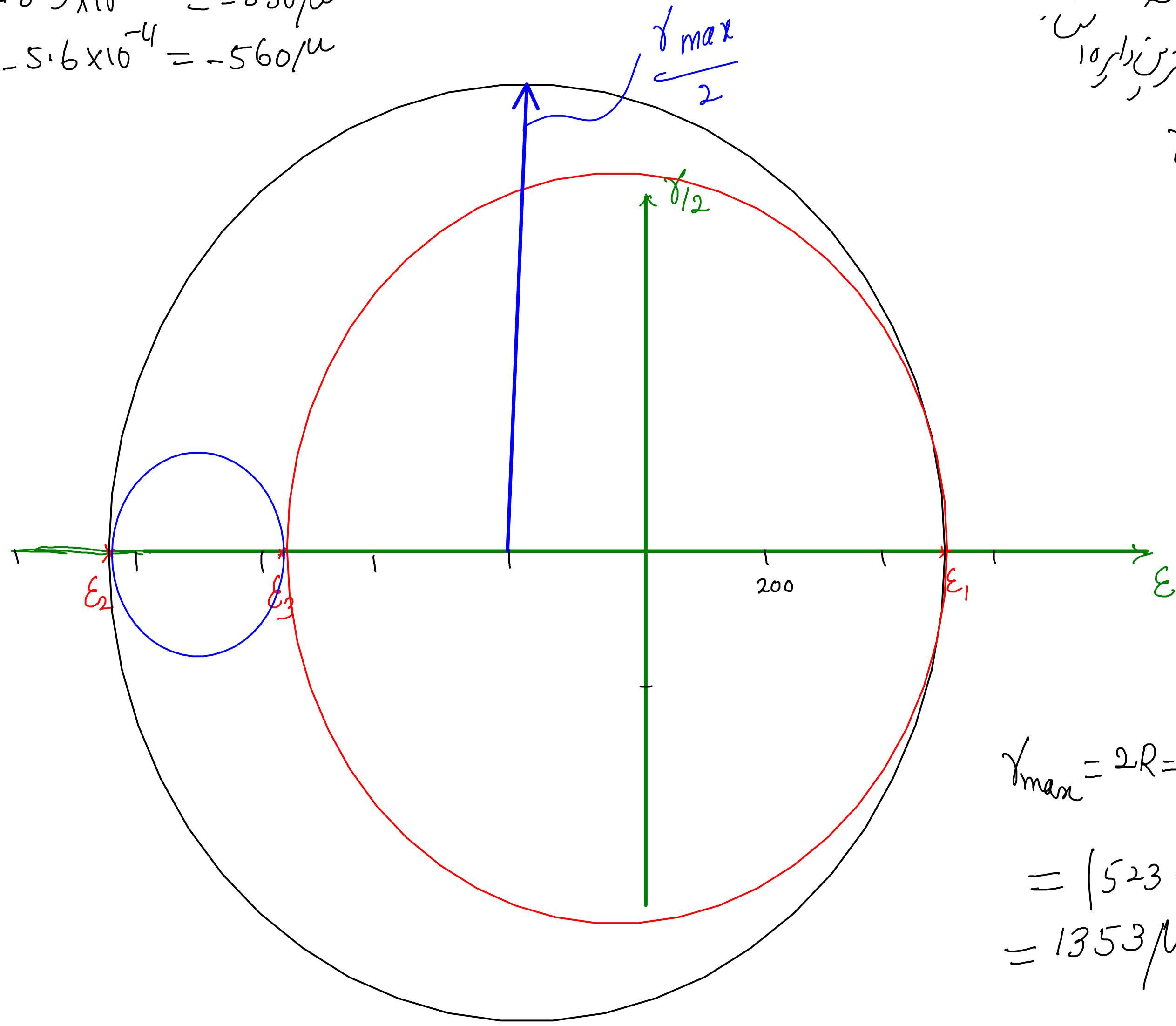
$\varepsilon_1 = 5.23 \times 10^{-4} = 523\,\mu$

$\varepsilon_2 = -8.3 \times 10^{-4} = -830\,\mu$

$\varepsilon_3 = -5.6 \times 10^{-4} = -560\,\mu$

تغییر شکل ماکزیمم نقطه دو برابر شعاع بزرگترین دایره است.

$\gamma_{max} = 2R_{max}$



$\gamma_{max} = 2R = |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|$

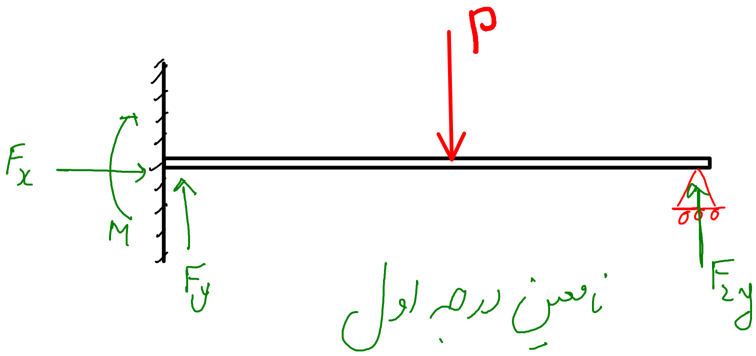
$= |523 - (-830)|$

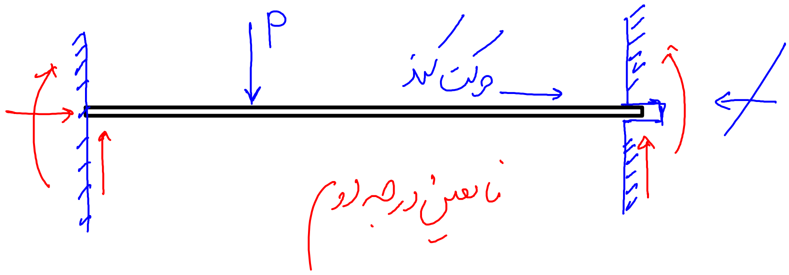
$= 1353\,\mu$

خیز در تیرهای نامعین :

تیرهای نامعین به تیرهایی گفته می‌شود که مجهولات در تکیه گاه‌ها بیشتر از ۳ رابطه تعادل استاتیکی باشد، بعنوان مثال:

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \\ \Sigma M = 0 \end{cases}$$



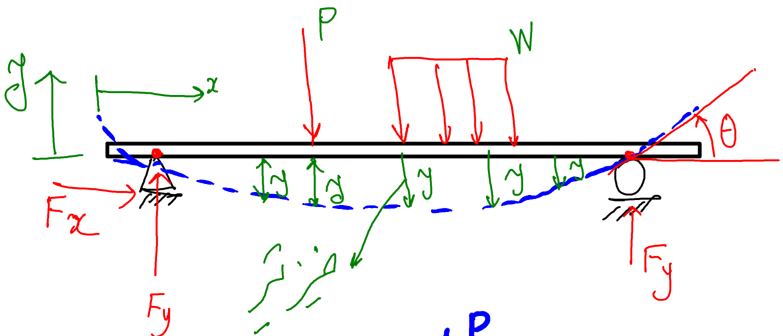


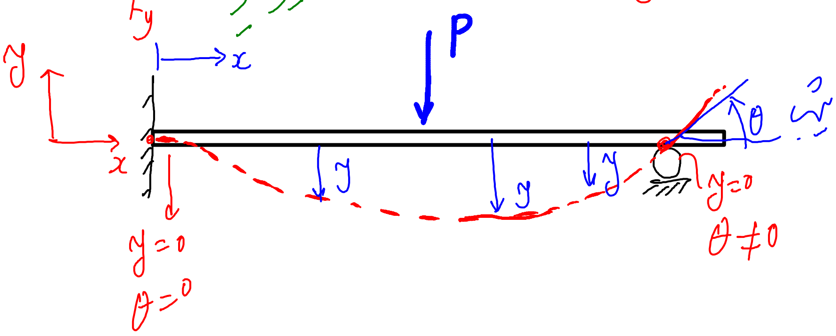
شرایط مرزی در تکیه گاه‌ها:

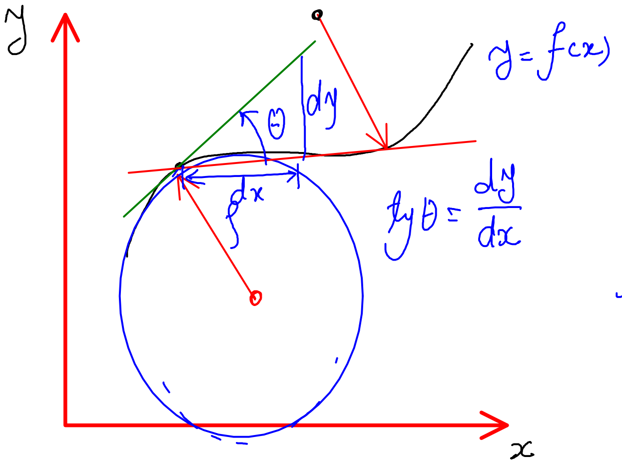
شرایط تکیه گاهی ; $\begin{cases} y = 0 & \text{در کلیه تکیه گاه‌ها} \\ \text{در تکیه گاه گیردار} \; ; \; \theta = \text{شیب} = 0 \end{cases}$

هدف از محاسبه خیز در تیرها:

در محاسبه خیز تیر به دنبال معادله‌ای بصورت $y = f(x)$ می‌باشیم.







$tg\,\theta = \frac{dy}{dx}$

۱ـ روش انتگرال گیری :

$y = 5x^2 - 7x + 1$

در نقطه $x=1$ شعاع انحنا چقدر است؟

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (1)$$

از ریاضی

گشتاور در نقطه معین

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \quad (2)$$

از مقاومت مصالح ۱ :

مدول الاستیسیته

ممان اینرسی مقطع ؛ $\begin{cases} \text{مستطیلی} = \frac{1}{12} b h^3 \\ \text{مقطع دایره‌ای} = \frac{1}{4} \pi r^4 \end{cases}$

در رابطه (۱) $\frac{dy}{dx} = tg\,\theta$ ؛ ولی می‌دانیم که در خیز تیرها، شیب و خیز بسیار کوچک می‌باشند.

برای زوایای کوچکتر از 6° ؛ $\sin\theta = tg\,\theta = \theta$ (رادیان)

$\frac{dy}{dx} = \theta$ ؛ پس می‌توان گفت

$\frac{dy}{dx}$ مقدار $<< 1$ ؛ $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \simeq 1$

با استفاده از رابطه (۱) ؛ $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$ (3)

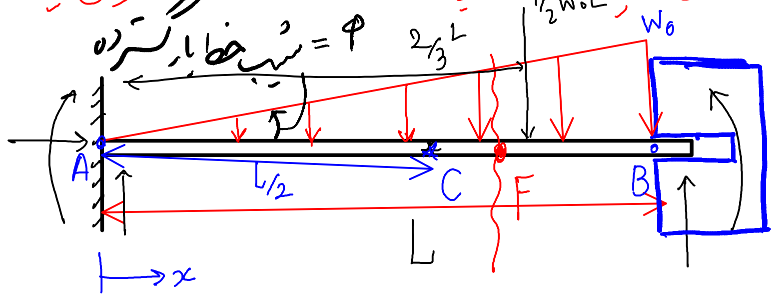
از رابطه (۲) و (۳) $\longrightarrow \frac{M(x)}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2}$ (4)

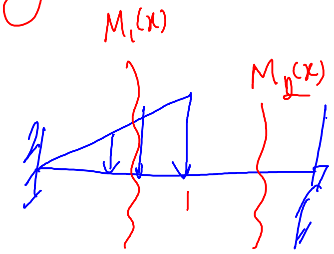
اگر از رابطه (۴) برحسب x دوبار انتگرال گیری شود، تابع y (معادله خیز تیر است) برحسب x بدست خواهد آمد:

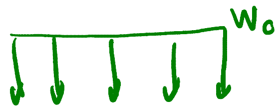
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\int M(x)\,dx + C_1 = \theta$$

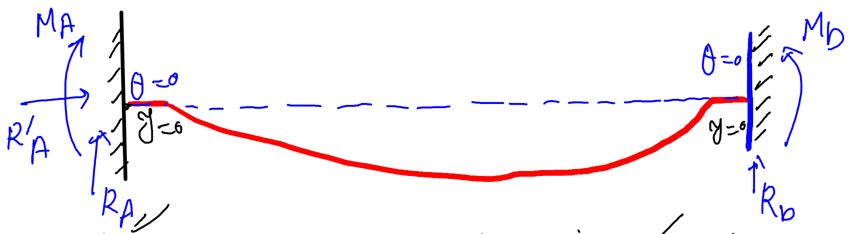
$$\rightarrow \quad y = \frac{1}{EI} \iint M(x)\,dx + C_1 x + C_2$$

مثال: مطلوب است محاسبه عکس‌العمل‌ها و تغییر مکان خمشی (خیز) در نقطه C با استفاده از روش انتگرال‌گیری:





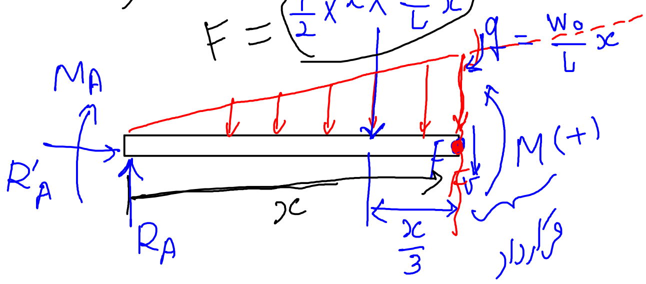


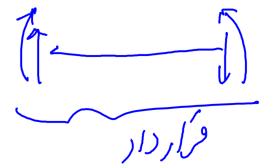


$\sum F_x = 0 \longrightarrow R'_A = 0$

چون روی تیر فقط یک بار گسترده مثلثی وجود دارد، تنها یک برش در نقطه‌ای دلخواه از طول تیر، رفتار تیر را نشان می‌دهد.

$F = \frac{1}{2} \times x \times \frac{w_0}{L} x$





$tg\varphi = \frac{w_0}{L} = m \;;\; q - q_0 = m(x - x_0) \longrightarrow q = \frac{w_0}{L} x$

رابطه تغییر بار گسترده مثلثی برحسب x

$\sum M_F = 0 \longrightarrow$

$$M - R_A x - M_A + \left(\frac{1}{2} x \times \frac{w_0}{L} x\right) \times \underbrace{\frac{x}{3}}_{\text{فاصله}} = 0$$

$$\Rightarrow M(x) = \underbrace{R_A}_{?} x + \underbrace{M_A}_{?} - \frac{1}{6} \frac{w_0}{L} x^3 \qquad 0 \le x \le L$$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) = R_A x + M_A - \frac{1}{6} \frac{w_0}{L} x^3$$

انتگرال‌گیری ; $EI \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\theta} = R_A\left(\frac{x^2}{2}\right) + M_A x - \frac{1}{6}\left(\frac{w_0}{L}\right)\left(\frac{x^4}{4}\right) + C_1$

$\begin{cases} x = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \longrightarrow EI(0) = R_A(0) + M_A(0) - \frac{1}{6}\left(\frac{w_0}{L}\right)(0) + C_1 \rightarrow C_1 = 0$

انتگرال‌گیری ; $EI\,y = \frac{1}{6} R_A x^3 + \frac{1}{2} M_A x^2 - \frac{1}{120} \frac{w_0}{L} x^5 + C_2$

شرط تکیه گاهی ;
$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \longrightarrow C_2 = 0$$

$$\begin{cases} EI\theta = \frac{1}{2} R_A x^2 + M_A x - \frac{1}{24} \frac{W_0}{L} x^4 \\ EI\, y(x) = \frac{1}{6} R_A x^3 + \frac{1}{2} M_A x^2 - \frac{1}{120} \frac{W_0}{L} x^5 \quad (*) \end{cases}$$

شرط مرزی تکیه گاهی در انتهای تیر ;
$$\begin{cases} x=L \\ \theta=0 \end{cases} \Longrightarrow \frac{1}{2} R_A L^2 + M_A L - \frac{1}{24} W_0 L^3 = 0 \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x=L \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{6} R_A L^3 + \frac{1}{2} M_A L^2 - \frac{1}{120} W_0 L^4 = 0 \qquad (2)$$

معادله (1) را در $\frac{24}{L}$ ضرب ⟶ $12 R_A L + 24 M_A = W_0 L^2$

معادله (2) را در $\frac{120}{L^2}$ ضرب ⟶ $20 R_A L + 60 M_A = W_0 L^2$

پس از حل $\Longrightarrow$
$$\begin{cases} M_A = -\frac{1}{30} W_0 L^2 \\ R_A = \frac{3}{20} W_0 L \end{cases}$$

تعادل استاتیکی $\sum M_A = 0 \longrightarrow M_A - R_B \cdot L - M_B + \frac{1}{2} W_0 L \times \frac{2}{3} L = 0 \quad (3)$

$$\sum F_y = 0 \longrightarrow R_A + R_B = \frac{1}{2} W_0 L \longrightarrow R_B = \frac{1}{2} W_0 L - \frac{3}{20} W_0 L = \frac{7}{20} W_0 L$$

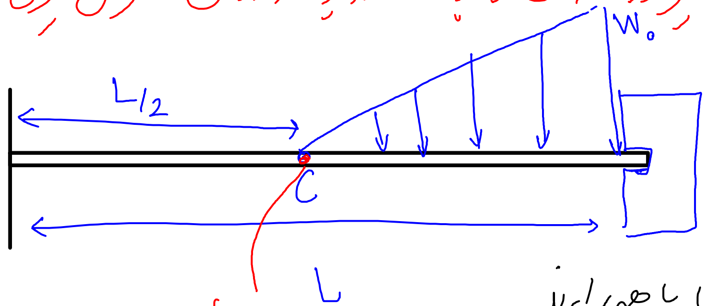
از رابطه (3) $\longrightarrow M_B = -\frac{1}{20} W_0 L^2$

خیز نقطه C ؛ جایگذاری در (*)
$$EI\, y(x) = \frac{3}{120} W_0 L x^3 - \frac{1}{60} W_0 L^2 x^2 - \frac{1}{120} \frac{W_0}{L} x^5$$

$$x_C = L/2$$

$$EI\, y_C = \frac{3}{120} W_0 \underbrace{L \left(\frac{L}{2}\right)^3}_{L^4 \text{ (با تبیین)}} - \frac{1}{60} W_0 \underbrace{L^2 \left(\frac{L}{2}\right)^2}_{L^4 \text{ (با تبیین)}} - \frac{1}{120} \frac{W_0}{L} \underbrace{\left(\frac{L}{2}\right)^5}_{L^4 \text{ (با تبیین)}}$$

تمرین: عکس العمل تکیه گاه ها و خیز در نقطه C را بدست آورید. (روش انتگرال گیری)



خیز و شیب در نقطه مشترک گشتاورها باهم برابرند.

$$\begin{cases} y_{1C} = y_{2C} \\ \theta_{1C} = \theta_{2C} \end{cases}$$