



موسسه انتشارات دانشگاه تهران
۱۳۸۴
فصلی - تهران

نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

جلد اول

تألیف: اریست کوه - چارلز ادسو
ترجمه و تکمیل: دکتر پرویز جبه دار مارالانی
استاد ممتاز دانشگاه تهران

فصل اول

مدارهای فشرده و قوانین گیرشف

مدارهای الکتریکی هیچگونه تازگی برای شما ندارد و همه شما در سالهای پیش، در فیزیک دبیرستان و فیزیک دوره عمومی و شاید هم درباره‌ای از درسهای مهندسی با آنها مواجه بوده‌اید. مأملاً مطالعه مدارها ممکن است تا بحال بطور سطحی انجام گرفته باشد و شاید اغلب، حالت‌های خاص بررسی شده باشد. در این کتاب، نظریه اساسی مدارهای الکتریکی بطور «منظم»^(۱) بنیان‌گذاری می‌شود. بطوریکه وقتی خواننده این کتاب را به پایان میرساند، از لحاظ درک مدارها و توانائی تجزیه و تحلیل درست هر مدار داده شده، از خود مطمئن خواهد بود. علاوه بر این، ضمن تشریح اصولی نظریه مدارها، خواننده با چند مفهوم اساسی دیگر که در بسیاری از رشته‌های مهندسی، مانند ارتباطات، کنترل و سیستمهای مکانیکی حائز اهمیت می‌باشند آشنا خواهد شد. بدینسان، یک درس اصولی در نظریه مدارها، در برنامه آموزشی یک مهندس، بخصوص یک «مهندس برق»، جنبه اساسی دارد.

نظریه مدار (و هر رشته مهندسی دیگر) متکی بر مفهوم مدل سازی است. برای تجزیه و تحلیل هر سیستم فیزیکی پیچیده، باید آن را بتوان بصورت یک مدل ایده‌آل^(۲)، که از بهم پیوستن جزءهای ایده‌آل تشکیل می‌شود، توصیف نمود. جزءهای ایده‌آل مدلهای ساده‌ای هستند که بمتصور نمایش دادن یا برآورد تقریبی خواص عناصر فیزیکی ساده یا پدیده‌های فیزیکی بکار می‌روند. گرچه عناصر و پدیده‌های فیزیکی را فقط می‌توان بطور تقریب توصیف نمود، ولی عناصر ایده‌آل، دقیقاً بموجب تعریف مشخص می‌شوند. در نظریه مدار، ما مدارهایی را که از عناصر ایده‌آل تشکیل می‌شوند بررسی می‌کنیم و همچنین خواص کلی آنها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای یک مدار فیزیکی داده شده، میتوان مدلهای ایده‌آل آنها را در چند مرحله بدست آورد. قسمی که طرز کار این مدلهای طرز کار مدار فیزیکی بتدریج بهم نزدیکتر گردند. با تجزیه و تحلیل مدل مدار، می‌توان طرز کار مدار فیزیکی را پیش‌بینی نموده و مدارهای بهتری طرح نمود.

مدلهائی که در نظریه مدار بکار می‌روند مشابه مدلهای آشنا در مکانیک کلاسیک، مانند ذره^(۳) و

۱ — Systematic

۲ — Ideal

۳ — Particle

نظریه^۱ اساسی مدارها و شبکه‌ها

جسم سخت^(۱) میباشد. بخاطر آورد که ذره مدل یک‌شی بسیار کوچک میباشد. بموجب تعریف، یک ذره ابعاد فیزیکی صفر داشته ولی دارای جرم مثبت، موقعیت، سرعت و شتاب مشخصی میباشد. بطریق مشابه، فرض میشود که یک جسم سخت دارای شکل، جرم و اینرسی معینی بوده هر قدر نیروی وارد باین جسم زیاد باشد فاصله بین هیچ دو نقطه آن تغییر نمی‌کند. در دنیای فیزیکی، وقتی دقیقاً صحبت کنیم، چیزی مانند یک ذره یا جسم سخت وجود ندارد. درحالیکه در طرح‌های مابینها، هواپیماها، و مویشکها این گونه مدلهای ایده‌آل بطور موفقیت‌آمیزی بکار می‌روند. اجزاء مدار مانند آنتنهایی که در فصل ۲ مورد بحث قرار می‌گیرند، مدلهائی هستند که عنصر فیزیکی را دقیقاً و بدون تقریب مشخص میکنند. آنها ایده‌آل شده خواص فیزیکی عناصر عملی که بطور تجارتی عرضه می‌شوند هستند. یک مدار، از بهم پیوستن اجزاء مدار تشکیل می‌شود و مدارهای عملی را یک‌مک مدلهای ایده‌آل شده آنها طرح و تجزیه و تحلیل می‌کنیم.

بطور کلی دو نوع مدار وجود دارد: «مدارهای فشرده»^(۲) و «مدارهای گسترده»^(۳). در این کتاب، ما تنها مدارهای فشرده را در نظر خواهیم گرفت. این کار به دو دلیل انجام می‌گیرد: اول اینکه فهمیدن و طرح مدارهای فشرده ساده‌تر است. آنها مشابه سیستم‌های مکانیکی هستند که از مجموعه ذره‌هایی که رویهم اثر متقابل میکنند تشکیل می‌شوند. دوم اینکه نظریه مدارهای گسترده را می‌توان بر مبنای مدارهای فشرده قرار داد. در واقع یک مدار گسترده را می‌توان بصورت حد و دنباله‌ای از مدارهای فشرده در نظر گرفت، همانطوریکه معادلات تار مرتعش^(۴) و غشاء^(۵) را می‌توان بصورت حد سیستمی از ذره‌های عمل کننده رویهم، و قتیکه تعداد ذرات بسمت بینهایت و فاصله آنها بسمت صفر میل میکند در نظر گرفت.

۱- مدارهای فشرده

مدارهای فشرده از بهم پیوستن «عناصر فشرده» بدست می‌آیند. مثالهایی از عناصر فشرده عبارتند از مقاومت، سلف، خازن و ترانسفورماتور که در آزمایشگاه با آنها مواجه بوده‌اید و می‌توانید آنها را روی دستگاه رادیو هم ببینید. خاصیت عمده عناصر فشرده کوچکی اندازه آنها میباشد (در مقایسه با طول موجی که با فرکانس طبیعی کار آنها متناظر است). از نقطه

۱ - Rigid body

۲ - Lumped Circuits

۳ - Distributed Circuits

۴ - String

۵ - Membrane

نظر کلی حوزه الکترومغناطیسی، عناصر فشرده ویژگی‌های نقطه‌ای^(۱) هستند. یعنی ابعاد فیزیکی آنها قابل صرف نظر کردن است. از این لحاظ، آنها مشابه یک ذره می‌باشند. عناصر فشرده ممکن است، مانند مقاومت یا خازن، دوسر داشته باشند و یا، مانند ترانسفورماتور و ترانزیستور، بیش از دوسر داشته باشند. برای عناصر فشرده «دوسر» میتوان نشان داد که قوانین عمومی مربوط به حوزه الکترومغناطیسی، توأم با محدودیت اندازه فیزیکی که در بالا بان اشاره شد لازم میدارند که جریانی که وارد یک سر آن میشود با جریانی که از سر دیگر خارج می‌شود برابر باشد، و اختلاف ولتاژ دوسر را، با اندازه گیری فیزیکی، میتوان بدون هیچ ابهامی مشخص نمود. بنابراین «برای عناصر فشرده دوسر جریانی که از عنصر می‌گذرد و ولتاژ دوسر آن کمیت‌های کاملاً معینی هستند، و برای عناصر فشرده‌ای که بیش از دوسر دارند جریانی که وارد هر سر می‌شود و ولتاژ بین هر جفت سر نیز، در همه لحظه‌ها، کمیت‌های کاملاً معینی می‌باشند».

در بقیه این کتاب، هر نوع بهم پیوستنی از عناصر فشرده را که در آن ابعاد مدار در مقایسه با طول موج متناظر با بالاترین فرکانس مورد نظر کوچک باشد مدار فشرده گفته خواهد شد.

مادامیکه این محدودیت اندازه مدار برقرار باشد، قوانین جریان و ولتاژ کیرشف (که در بخش‌های ۳ و ۴ مورد بحث قرار خواهند گرفت) معتبر خواهند بود. محدودیت فوق نتیجه این واقعیت است که قوانین کیرشف با تقریب از معادلات معروف ماکسول - که قوانین عمومی میدان الکترومغناطیسی را بیان می‌کنند - نتیجه می‌شوند. تقریب فوق، مشابه این واقعیت است که قوانین نیوتن در مکانیک کلاسیک، با تقریب از قوانین مکانیک نسبیت^(۲) نتیجه می‌شوند. با وجود تقریبی بودن قوانین کیرشف و نیوتن، می‌توان آنها را در تعداد زیادی از مسائل عملی بکار برد و این اهمیت نظری و عملی زیادتری به این معادلات میدهد.

برای نشان دادن نتیجه محدودیت اندازه یک مدار، حالت‌های زیر را در نظر میگیریم:

(۱) بالاترین فرکانس برای یک مدار صوتی^(۳) ممکن است ۲۵ کیلو سیکل باشد

که طول موج متناظر با آن:

۱ — Point singularities

۲ — Relativistic

۳ — Audio circuit

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{20 \times 10^3} = 15 \text{ km} \approx 7.5 \text{ مایل} \quad (*)$$

می‌باشد. این مقدار خیلی بزرگتر از اندازهٔ یک مدار آزمایشگاهی است.

(۲) برای یک مدار کامپیوتر، فرکانس ممکن است ۵۰۰ MHz باشد که در آن

حالت:

$$\lambda = \frac{3 \times 10^8}{5 \times 10^8} = 60 \text{ Cm} \approx 2 \text{ فوت}$$

است و بنابراین تقریباً نشارده ممکن است مناسب نباشد.

(۳) برای یک مدار مایکروویو که در آن λ مقداری بین ده سانتیمتر و یک میلیمتر است، ما با حفره‌های تشدید کننده^(۱) روبرو خواهیم بود و در آنجا یاد میگیریم که معادلات کیرشف برای این تشدید کننده‌ها صدق نمی‌کنند زیرا آنها در فرکانسهایی که طول موج آنها در حدود اندازهٔ ابعاد حفره‌ها می‌باشند کار می‌کنند.

چنانکه قبلاً گفته شد، یک مدار فشرده، بموجب تعریف، عناصر فشردهٔ بهم پیوسته است. در یک مدار فشرده، عناصر دوسر شاخه‌ها^(۲) و سرهای عناصر گره‌ها^(۳) خوانده می‌شود. شکل (۱-۱) یک مدار فشرده را نشان می‌دهد که دارای چهار گره (که بصورت ① و ② و ③ و ④ شماره گذاری شده‌اند) و شش شاخه (که بصورت ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ شماره گذاری شده‌اند) می‌باشد. ولتاژ دوسر یک شاخه (که ولتاژ شاخه خوانده می‌شود) و جریان داخل یک شاخه (که جریان شاخه خوانده می‌شود) متغیرهای اساسی مورد توجه در نظریه مدار هستند. بنابراین، به جریان شاخه ۳ و ولتاژ شاخه ۳ است.

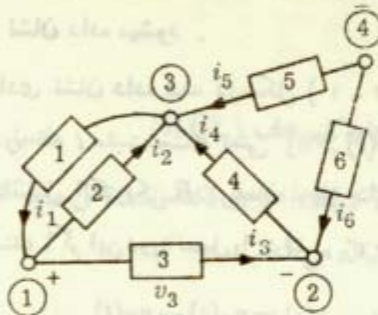
* نشانه $\approx$ یعنی «تقریباً مساوی است»

۱ — Cavity resonator

۲ — Branches

۳ — Nodes

+ ما اغلب کلمه‌های «گره» و «سر» را بجای هم بکار می‌بریم. بعدها کلمه «گره» مفهوم کلمه «سر» را بیان خواهد نمود که در آن چند عنصر بهم پیوسته‌اند. همچنین، امروزه، کلمه‌های «شاخه» و «عنصر» را بجای هم بکار می‌بریم در حالیکه کلمهٔ شاخه از بعضی لحاظ عمومی‌تر است.

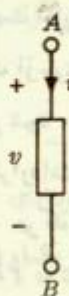


شکل ۱-۱- یک مدار فشرده با شش شاخه و چهار گره

بمنظور مشخص کردن جهت ها ، یک جهت قراردادی «بطور دلخواه» برای جریان و یک جهت قراردادی برای ولتاژ در نظر می گیریم . ما بخش بعد را به این جهت های قراردادی اختصاص می دهیم .

۲- جهت های قراردادی^(۱)

یک عنصر فشرده دلخواه با دوسر A و B را مطابق شکل (۱ - ۲) در نظر می گیریم . این عنصر ممکن است مقاومت، سلف یا دیود^(۲) باشد ، در حال حاضر ماهیت آن هیچ اهمیتی ندارد . برای تعمیم ، ما به این عنصر دوسر «شاخه» خواهیم گفت . برای یک مهندس بسیار لازم است که در مورد معنی جهت های قراردادی ولتاژ شاخه v و جریان شاخه i بسیار دقیق باشد . جهت قراردادی برای ولتاژ بوسیله علامتهای $+$ و $-$ ، که نزدیک سرهای



شکل ۲-۱- یک عنصر فشرده دوسر (یا یک شاخه)

با گره های A و B . جهت قراردادی برای

ولتاژ شاخه v و جریان شاخه i جهت های

قراردادی نشان داده شده اند .

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

A و B در شکل (۱ - ۲) گذارده شده است، نشان داده میشود. جهت قراردادی برای جریان بوسیله یک پیکان نشان داده میشود.

مطابق جهت قراردادی نشان داده شده در شکل (۱ - ۲) برای ولتاژ، بموجب قرارداد، «ولتاژ شاخه v در لحظه t مثبت است» یعنی $[v(t) > 0]$ اگر پتانسیل الکتریکی A در لحظه t بزرگتر از پتانسیل الکتریکی B در همان لحظه باشد و هر دو پتانسیل نسبت به یک سبداً سنجیده شده باشند، اگر این دو پتانسیل را بترتیب v_A و v_B بنامیم، در این صورت:

$$v(t) = v_A(t) - v_B(t)$$

مطابق جهت قراردادی نشان داده شده در شکل (۱ - ۲) برای جریان، «جریان i در لحظه t وقتی مثبت است» [یعنی $[i(t) > 0]$ که، در زمان t ، شاری از بارهای مثبت از گره A وارد شاخه شود و از گره B خارج شود.

توجه به این نکته حائز اهمیت است که جهت‌های قراردادی را میتوان بطور دلخواه تعیین نمود. زیرا آنها بتنهایی درباره اینکه چه اتفاقی بطور فیزیکی در مدار رخ میدهد، هیچ اطلاعاتی بمانند نمیدهند. بعنوان مثال، فقط وقتی که عبارت $v(t) > 0$ با جهت قراردادی برای ولتاژ توأم گردد، می‌توانیم درباره ولتاژهای نسبی گره‌های A و B اطلاعاتی بدست آوریم.

از آنچه گفته شد واضح است که میتوان یک شاخه، یک جهت قراردادی دلخواه ولتاژ و یک جهت قراردادی جریان تعیین نمود و اصولاً این جهت‌های قراردادی مستقلند. معمولاً متداول است که جهت‌هایی که جهت‌های قراردادی متناظر^(۱) خوانده می‌شود انتخاب شوند. جهت قراردادی ولتاژ شاخه و جهت قراردادی جریان شاخه را متناظر گویند اگر جریان مثبت از سری که علامت + دارد وارد شاخه شده از سری که علامت - دارد از شاخه خارج شود. جهت‌های قراردادی نشان داده شده در شکل (۱ - ۱) و (۱ - ۲) هر دو جهت‌های قراردادی متناظر می‌باشند. با یادآوری یک مطلب اساسی از درس فیزیک ملاحظه می‌کنیم که هرگاه جهت‌های قراردادی متناظر بکار رود حاصل ضرب $i(t)v(t)$ «توانی است که در لحظه t به شاخه تحویل داده میشود».

۱ — Associated reference direction

اکنون به بیان و تشریح جزئیات قوانین اصلی که درسورد مدارهای فشرده بکار می‌روند می‌پردازیم .

۳- قانون جریان کیرشف (KCL)

ابتدا قانون جریان کیرشف را برای یک حالت خاص بیان کرده ، سپس مفهوم آنرا توسعه داده و صورت کلی آنرا بیان می‌کنیم .

قانون جریان کیرشف

در هر گره از هر مدار الکتریکی فشرده و در هر لحظه از زمان ، مجموع جبری جریان همه شاخه‌هایی که از آن گره خارج میشوند برابر صفر است .

در بکار بردن KCL در هر گره خاص ، ابتدا یک جهت قراردادی برای جریان هر شاخه تعیین می‌کنیم و در جمع جبری به جریان شاخه‌هایی که جهت قراردادی آنها از گره دور می‌شود علامت مثبت و به جریان شاخه‌هایی که جهت قراردادی آنها به گره نزدیک میشود علامت منفی می‌دهیم . بعنوان مثال ، وقتی KCL را در گره ❶ مدار نشان داده شده در شکل (۱-۱) بکار ببریم چنین نتیجه میشود :

$$i_4(t) - i_1(t) - i_2(t) = 0 \quad \text{برای همه } t \quad (1-3)$$

زیرا جریان شاخه i_4 دارای جهت قراردادی است که از گره دور می‌شود در حالیکه جریان شاخه‌های i_1 و i_2 دارای جهت قراردادی هستند که به گره نزدیک می‌شوند . بطریق مشابه ، برای گره ❶ ، KCL بیان میدارد که :

$$-i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0 \quad \text{برای همه } t \quad (2-3)$$

که در آنجا جمله اول باید دارای علامت منفی باشد زیرا جهت قراردادی جریان i_1 به آن گره نزدیک می‌شود . در این فصلهای مقدماتی ، معادلاتی که از بکار بردن KCL در گره‌های مختلف بدست می‌آیند ، نظیر معادلات (۱-۳) و (۲-۳) ، را «معادلات گره» می‌نامیم .

نظریه^۱ اساسی مدارها و شبکه‌ها

قانون جریان کیرشف دارای اهمیت بسیار زیادی است. ساده بودن این قانون و آشنایی قبلی ما با آن ممکن است برخی از خواص عمده آنرا پنهان سازد. بمنظور تأکید این خواص تبصره‌های^(۱) زیر درج می‌شود.

تبصره ۱-KCL یک محدودیت «خطی» روی جریان شاخه‌ها برقرار می‌کند. عبارت دیگر، معادلات (۱-۳) و (۲-۳) معادلات جبری «خطی همگن»^(۲) (با ضرایب ثابت) از متغیرهای i_1, i_2, i_3, i_4 و i_5 می‌باشد.

تبصره ۲-KCL در مورد هر مدار الکتریکی فشرده بکار میرود و اینکه عناصر مدار خطی، غیرخطی، اکتیو، پسیو، تغییرپذیر با زمان، تغییر ناپذیر با زمان و غیره باشند اهمیتی در کاربرد این قانون ندارد. (معنی دقیق این صفات در فصلهای بعد دیده خواهد شد) نحوه دیگر بیان این مطلب آنستکه بگوئیم: «KCL به ماهیت اجزاء مدار بستگی ندارد».

تبصره ۳- اگر بغضایر بیاوریم که جریان داخل یک شاخه، مقدار بار الکتریکی جاری شده در واحد زمان از آن شاخه را مشخص می‌کند، واضح است که KCL بیان می‌دارد که بار الکتریکی در هیچ گرهی جمع نمی‌شود. عبارت دیگر، «KCL اصل بقای بار الکتریکی را در هر گره بیان می‌کند».

تبصره ۴- یک مثال برای حالتی که KCL در آن صدق نمی‌کند **آنتن شلاقی**^(۳)، مثلاً در سوتور میکلت یک پلیس، می‌باشد. واضح است هنگامیکه آنتن کار می‌کند، جریانی در پایه آنتن وجود دارد در حالیکه جریان نولک آنتن در هر لحظه مساوی صفر است. از طرف دیگر، این حقیقت را هم میدانیم که طول این آنتن در حدود یک چهارم طول موج متناظر با فرکانس کار آنتن است. بنابراین، این آنتن یک مدار فشرده نیست و ما نباید انتظار داشته باشیم که KCL در مورد آن صدق کند.

۱ — Remarks

۲ — Homogeneous

۳ — Whip antenna

۴- قانون ولتاژ کیرشف KVL

برای اینکه قانون ولتاژ کیرشف را بیان کنیم باید بدانیم که منظور ما از یک حلقه^(۱) چیست. در فصل نهم، تعریف دقیق حلقه و قتیکه شبکه های کلی معرفی میشوند دیده خواهد شد. آنچه ظاهراً احساس می شود، منظور از یک حلقه یک مسیر^(۲) بسته است. بنابراین اگر ما یک مدار را بصورت تعدادی از شاخه های بهم پیوسته در گرهای در نظر بگیریم، یک مسیر بدین ترتیب تشکیل میشود که از یک گره شروع کرده یک یا چند شاخه را بطور متوالی طی می کنیم و در یک گره دیگر متوقف می شویم. یک مسیر بسته، مسیری است که گره ابتدایی و گره انتهایی آن رویهم منطبق باشند.

قانون ولتاژ کیرشف

در هر حلقه از هر مدار الکتریکی فشرده و در هر لحظه
از زمان، مجموع جبری ولتاژهای شاخه های حلقه
برابر صفر است.

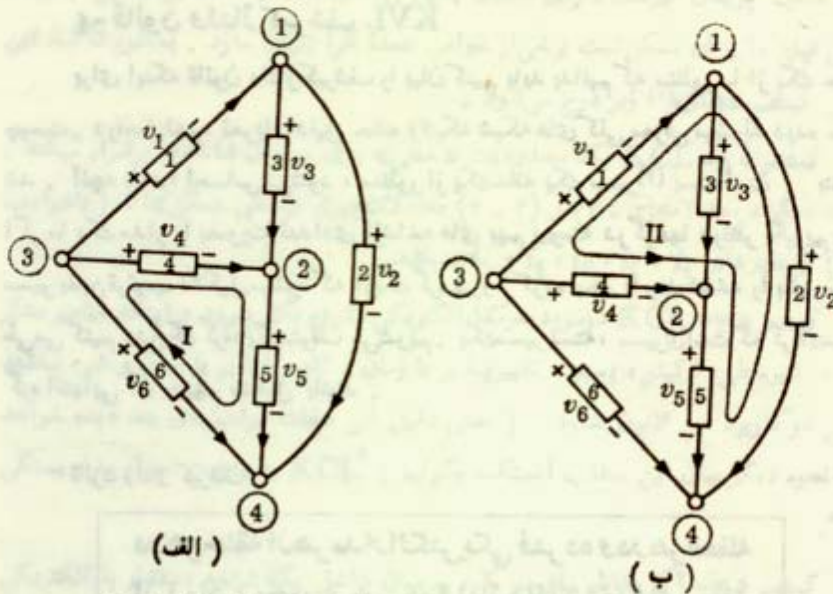
برای بکار بردن KVL، یک جهت قراردادی برای حلقه تعیین میکنیم. در مجموع جبری که KVL را بیان میکند، ولتاژ شاخه هایی که جهت قراردادی آنها با جهت قراردادی حلقه یکی است را با علامت مثبت و ولتاژ شاخه هایی که جهت قراردادی آنها با جهت قراردادی حلقه یکی نیست را با علامت منفی در نظر میگیریم.

مثال- مدار شکل (۱-۴) را در نظر بگیرید.

الف- وقتی KVL در حلقه I که از شاخه های ۴ و ۵ تشکیل می شود بکار رود چنین نتیجه می شود:

$$v_4(t) + v_5(t) - v_1(t) = 0 \quad \text{برای همه } t \quad (4-1)$$

جهت قراردادی انتخاب شده برای این حلقه (مشخص شده با I) در شکل (۱-۴ الف) دیده می شود. جهت قراردادی ولتاژهای شاخه های ۴ و ۵ موافق جهت قراردادی حلقه I



شکل ۱-۴- مثال تشریح کننده KVL، حلقه‌های I و II مشخص شده‌اند.

بوده درحالی‌که جهت قراردادی ولتاژ شاخه ۶ موافق جهت قراردادی حلقه I نیست. بنابراین v_5 و v_6 را با علامت مثبت و v_1 را با علامت منفی در نظر می‌گیریم. ب- وقتی KVL را در حلقه II که از شاخه‌های ۱ و ۴ و ۵ و ۲ تشکیل می‌شود بکار ببریم چنین نتیجه می‌شود:

$$\text{برای همه } t \quad -v_1(t) + v_4(t) + v_5(t) - v_2(t) = 0 \quad (1-2)$$

جهت قراردادی این حلقه (مشخص شده با II) در شکل (۱-۴) دیده می‌شود. در این فصل‌های مقدماتی، معادلاتی که از بکار بردن KVL در حلقه‌های مختلف بدست می‌آید، نظیر (۱-۴) و (۲-۴)، را معادلات حلقه می‌نامیم. بمنظور تأکید اهمیت این قانون مهم، تبصره‌های زیر درج می‌شود:

تبصره ۱- KVL یک محدودیت «خطی» بین ولتاژهای شاخه‌های یک حلقه برقرار می‌سازد.

تبصره ۲- KVL در مورد هر مدار الکتریکی فشرده بکار می‌رود و اینکه عناصر مدار

خطی، غیرخطی، اکتیو، پسیو، تغییرپذیر با زمان، تغییرناپذیر با زمان و غیره باشند اهمیتی در کاربرد این قانون ندارد. عبارت دیگر، «KVL به ماهیت اجزاء مدار بستگی ندارد».

۵- طول موج و ابعاد مدار*

منظور از این بخش آنستکه بطور ساده و حسی^(۱) بحث کنیم که اگر ابعاد یک مدار قابل مقایسه یا حتی بزرگتر از طول موج متناظر با بالاترین فرکانس موردنظر باشد چه اتفاقی روی میدهد. برای بررسی این شرط گیریم که d بزرگترین بعد یک مدار و c سرعت انتشار امواج الکترومغناطیس و λ طول موج بالاترین فرکانس موردنظر و f فرکانس باشد. این شرط بیان میدارد که:

d در حدود λ و یا بزرگتر از آنست (۱-۵)
حال $\tau \triangleq d/c$ زمان لازم برای انتشار امواج الکترومغناطیسی از یک سر مدار تا انتهای دیگر آنست+. چون:

$$\frac{\lambda}{c} = \frac{1}{f} = T \quad \text{و} \quad f\lambda = c$$

که در آن T پریود بالاترین فرکانس موردنظر است. بنابراین شرط ارتباط دهنده ابعاد مدار و طول موج را می توان بطرز دیگری برحسب زمان، بصورت زیر بیان کرد:

τ در حدود T و یا بزرگتر از آنست (۲-۵)
بنابراین با بخاطر آوردن تبصره های مربوط به امکان بکار بردن KVL و KCL در فرکانسهای بالا، میتوان گفت مادامیکه زمان انتشار امواج الکترومغناطیسی در داخل محیطی که مدار در آن قرار دارد بطور قابل ملاحظه ای کوچکتر از پریود بالاترین فرکانس موردنظر باشد KVL و KCL در مورد هر مدار فشرده ای برقرار است.

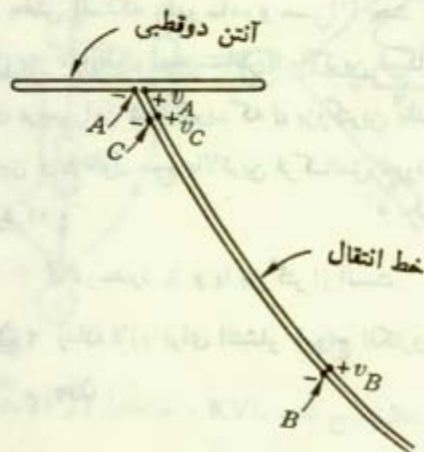
• بخش ها و زیر بخش هایی که با علامت • مشخص میشوند میتوانند بدون بهم زدن پیوستگی مطالب کتاب حذف شوند.

۱ - Intuitively

+ علامت $\triangleq$ بمعنی تساوی بموجب تعریف است.

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

مثال - برای درک اهمیت شرایط ذکر شده در (۱-۵) و (۲-۵) یک آنتن دوقطبی^(۱) گیرنده FM و خط انتقال ۳۰۰ اهمی که آنرا به گیرنده متصل میکند را در نظر میگیریم. اگر ما خط انتقال را بررسی کنیم ملاحظه می‌شود که از دوسیم مسی موازی که داخل ماده عایقی پلاستیکی قرار دارد و بوسیله همین ماده در فاصله ثابتی از یکدیگر نگاهداشته می‌شود،



شکل ۱-۵- یک آنتن دوقطبی که بیک خط انتقال وصل شده است.

تشکیل شده است. برای مادگی فرض میکنیم که خط انتقال از سمت راست بینهایت طویل است (به شکل (۱-۵) مراجعه شود). اگر امواج الکترومغناطیسی با سرعت بینهایت منتشر شود، در اینصورت بمحض اینکه ولتاژی در آنتن القاء شود این ولتاژ بطور همزمان در هر قسمت خط ظاهر میگردد. اما برای ملاحظه اینکه اگر سرعت انتشار بینهایت نباشد و مثلاً 3×10^8 متر بر ثانیه باشد چه اتفاقی رخ میدهد، فرض می‌کنیم که یک ولتاژ سینوسی با فرکانس ۱۰۰ MHz در آنتن ظاهر شود. در این صورت:

$$v_A(t) = V_0 \sin(2\pi \times 10^8 t)$$

که در آن V_0 ثابتی است بر حسب ولت و t بر حسب ثانیه بیان میشود. حال ببینیم که در نقطه B که مثلاً بفاصله ۵۰ متری پائین خط قرار دارد چه اتفاقی می‌افتد. چون سرعت

انتشار برابر 3×10^8 متر بر ثانیه است و لذا در نقطه B بمقدار :

$$1.0 / (3 \times 10^8) = 0.33 \times 10^{-9} \text{ sec}$$

نسبت به ولتاژ در نقطه A ، عقب می افتد و بنابراین :

$$\begin{aligned} v_B(t) &= V_0 \sin(2\pi \times 10^8) (t - 0.33 \times 10^{-9}) \\ &= V_0 \sin(2\pi \times 10^8 t - \pi) \\ &= -V_0 \sin(2\pi \times 10^8 t) = -v_A(t) \end{aligned}$$

در لحظه t ولتاژ خط در نقطه B درست مخالف ولتاژ نقطه A است ! حقیقت اصلی اینست که تفاوت بین $v_B(t)$ و $v_A(t)$ ناشی از زمان انتشار میباشد که در این حالت قابل صرف نظر کردن نیست . در واقع زمان انتشار از A تا B برابر 0.33 nsec ($0.33 \times 10^{-9} \text{ sec}$) است و پریود کامل سیگنال سینوسی v_A برابر 10 nsec است .

حال ، اگر بر حسب طول موج فکر کنیم ، چنین بدست می آوریم که در فرکانس 100 MHz :

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{10^8} = 3 \text{ m}$$

بنابراین فاصله A تا B نصف طول موج میباشد .

البته چنانچه ما v_C و v_A را با هم مقایسه می کردیم که در آن نقطه C مثلاً بفاصله یک سانتیمتری سمت راست A قرار دارد در اینصورت زمان انتشار از A تا C در حدود $0.33 \times 10^{-11} \text{ sec}$ بوده و :

$$\begin{aligned} v_C(t) &= V_0 \sin[2\pi \times 10^8 (t - 0.33 \times 10^{-11})] \\ &= V_0 \sin(2\pi \times 10^8 t - 0.022) \end{aligned}$$

یعنی فاز v_C بمقدار 0.022 رادیان ، که تقریباً برابر 1.27° درجه میباشد ، از v_A عقب تر

است . بالتجربه ، برای همه t ، $v_A(t) \approx v_C(t)$

خلاصه

● قوانین کیرشف و مدل عناصر فشرده یک مدار در صورتی معتبرند که بزرگترین بُعد فیزیکی مدار، در مقایسه با طول موج بالاترین فرکانس مورد نظر، کوچک باشد. تحت این شرایط، ولتاژ دوسر هر شاخه، یا هر جفت گره، کاملاً معین می‌باشد و جریانی که از یک سر وارد هر عنصر می‌شود کاملاً معین بوده و برابر جریانی است که از سر دیگر آن خارج می‌شود.

● قانون جریان کیرشف KCL بیان می‌کند که در هر گره از هر مدار الکتریکی فشرده و در هر لحظه از زمان، مجموع جبری جریانه‌های همه شاخه‌هایی که از گره خارج می‌شوند برابر صفر است.

● قانون ولتاژ کیرشف بیان می‌کند که در هر حلقه از هر مدار الکتریکی فشرده و در هر لحظه از زمان، مجموع جبری ولتاژهای همه شاخه‌های حلقه برابر صفر است.

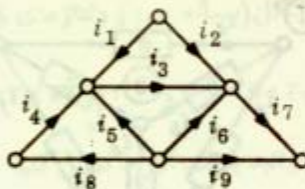
● قوانین کیرشف محدودیت‌های خطی روی ولتاژ شاخه‌ها و جریان شاخه‌ها برقرار می‌سازند و علاوه بر آنها به ماهیت عناصر مدار بستگی ندارند.

● هرگاه در شاخه‌ای جریان مثبتی از سری که علامت + دارد وارد شده و از سری که علامت - دارد خارج شود، جهت قراردادی ولتاژ و جهت قراردادی جریان این شاخه را جهت‌های قراردادی متناظر می‌نامیم. با انتخاب جهت‌های قراردادی متناظر، توان تحویل داده شده به شاخه برابر حاصلضرب ولتاژ شاخه و جریان شاخه می‌باشد.

مسائل:

محاسبه طول موج ۱- یک گیرنده FM توسط کابلی بطول ۲ m به آنتن متصل است. با در نظر گرفتن اینکه گیرنده برای فرکانس ۱۰۰ MHz تنظیم شده است، آیا می‌توان گفت که جریان لحظه‌ای در ورودی گیرنده با جریان دوسرهای آنتن مساوی است؟ و اگر چنین نیست، برای چه طول تقریبی کابل این جریانه‌ها برابر خواهند بود؟

KCL ۲- بعضی از جریانه‌های شاخه‌های مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۱-۲) مانند $i_1=2$ ، $i_2=1$ ، $i_3=2$ و $i_4=3$ معلوم است (بر حسب آمپر).



شکل (مسأله ۲-۱)

آیا با این اطلاعات می‌توانید جریانهای بقیه شاخه‌ها را حساب کنید ؟ توضیح دهید .
(جریانهایی را که می‌توانید حساب کنید تعیین کرده و اطلاعات اضافی را که برای محاسبه جریانهایی که نمی‌توانید حساب کنید احتیاج دارید بیان نمائید) .

KVL ۳- فرض کنید در مدار مسأله ۲ ، جهت‌های قراردادی متناظر برای ولتاژ شاخه‌ها انتخاب شده باشد ، و ولتاژهای شاخه‌های زیر داده شده باشند :

$$\text{ولت } v_1 = v_3 = v_6 = v_9 = 1$$

آیا با این اطلاعات می‌توانید ولتاژهای بقیه شاخه‌ها را حساب کنید ؟ توضیح دهید .

KVL و KCL ۴- در مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۴-۱) ، برای

جهت‌های قراردادی متغیرهای شاخه‌ها جهت‌های قراردادی متناظر انتخاب می‌شود .

الف - KCL را برای گره‌های ① ، ② ، ③ و ④ بکار ببرید . نشان دهید که

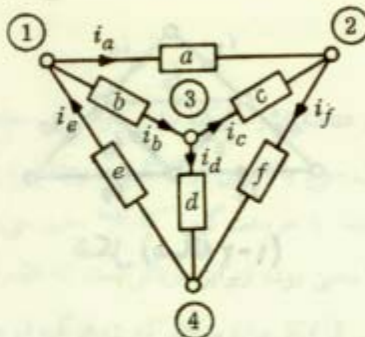
معادله KCL که برای گره ④ نوشته میشود نتیجه‌ای از سه معادله پیشین است .

ب - حلقه‌ای را که شاخه درونی نداشته باشد (مش^(۱)) خوانند . KVL را برای

سه مش مدار که در شکل دیده میشود بنویسید . همچنین KVL را برای حلقه‌های

afe - abdf - acde و bcfe بنویسید و نشان دهید که این معادلات نتیجه سه معادله مش

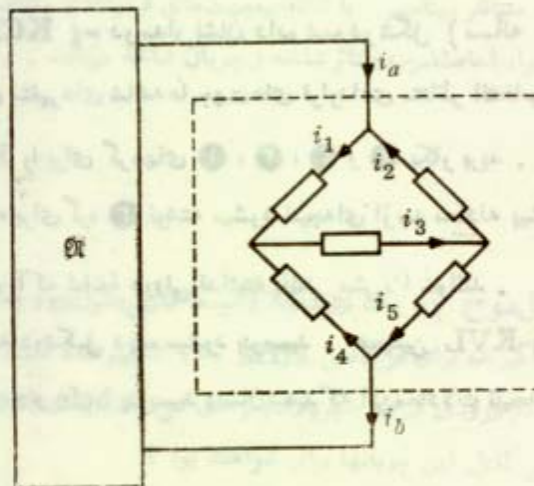
پیشین است .



شکل (مسئله ۴-۱)

حلقه ۵- در مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۴-۱) همه حلقه‌های ممکن را مشخص سازید.

KCL ۶- قسمتی از مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۶-۱) که با خط چین مشخص شده است را میتوان بعنوان یک عنصر دوسر که به بقیه مدار متصل است در نظر گرفت. آیا $i_a = i_b$ است؟ پاسخ خود را ثابت کنید.

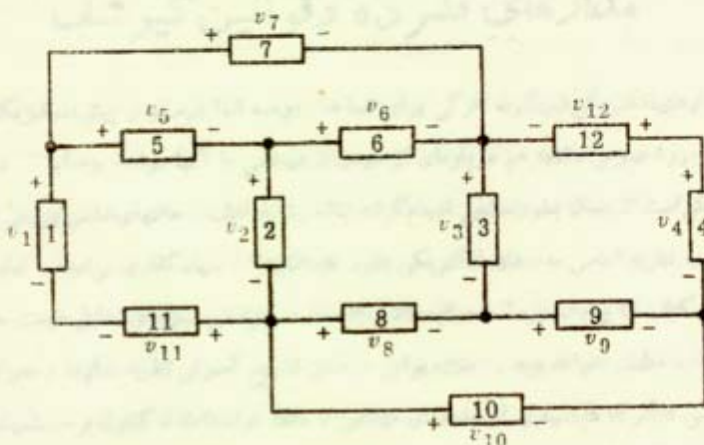


شکل (مسئله ۶-۱)

۷- KVL در مدار شکل (مسئله ۱-۷) ولتاژهای زیر برحسب ولت داده شده‌اند:

$$v_{12} = 8 \text{ و } v_7 = -3, v_6 = 2, v_8 = -3, v_9 = 5, v_1 = 10$$

ولتاژهای شاخه‌هایی را که می‌توانید بدست آورید تعیین کنید.



شکل مسئله ۱-۷

۸- KCL در مدار شکل (مسئله ۱-۷) جریانهای شاخه‌ها درجهت‌های قراردادی

متناظر اندازه‌گیری و نتایج زیر برحسب آمپر داده شده‌اند:

$$i_3 = 1, i_{10} = -3, i_8 = 5, i_7 = -5, i_1 = 2$$

آیا می‌توانید جریانهای بقیه شاخه‌ها را تعیین کنید؟ جریان شاخه‌هایی را که می‌توانید بدست بیاورید تعیین کنید.

۹- KCL در مدار شکل (مسئله ۱-۷) جریانهای شاخه‌ها درجهت‌های قراردادی

متناظر اندازه‌گیری شده‌اند. ثابت کنید:

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_8 = 0$$

$$i_7 + i_9 + i_{10} + i_{11} = 0$$

فصل دوم

اجزاء مدار

عناصری که در ساختمان مدارهای فشرده الکتریکی بکار میروند عبارتند از: مقاومت، دیود^(۱)، ترانزیستور، لامپ خلاء، خازن، سلف، ترانسفورماتور و غیره. هر عنصری به منظور استفاده از یک خاصیت اصلی فیزیکی طرح شده است. متأسفانه معمولاً ساختن یک عنصر فیزیکی که فقط یک خاصیت اصلی فیزیکی را نشان دهد ممکن نیست. مثلاً یک مقاومت، جسم هادی دیگری است که انرژی الکتریکی را به انرژی حرارتی تبدیل میکند و ولتاژ $v(t)$ در آن تنها به جریان $i(t)$ داخل آن بستگی دارد. این، یک تصویر فیزیکی تقریبی است زیرا هر جریانی یک حوزه مغناطیسی ایجاد میکند و در نتیجه هر مقاومتی مقداری انرژی در حوزه مغناطیسی خود ذخیره میسازد. معمولاً انرژی ذخیره شده آنقدر کم است که میتوان آنرا در تجزیه تحلیل و طرح مدار نادیده گرفت. بنابراین، یک مقاومت را تنها بطور تقریبی میتوان بعنوان مدلی که در قانون اهم^(۲) صدق میکند تصور نمود. این مدل سازی تقریبی نشان دهنده این واقعیت اساسی است که در تجزیه تحلیل و طرح مدارهای الکتریکی باید با در نظر گرفتن «تقریب هائی»^(۳)، مدلهای مناسبی را انتخاب نمود، زیرا مطالعه دقیق خواص فیزیکی اغلب عناصر مدار، تقریباً امکان پذیر نیست. در اینجا، موقعیت ما نظیر فیزیکی دانی است که نمیتواند تشکیلات آزمایشی مورد استفاده خود را بطور کاملاً دقیق توصیف کند. مثلاً، او بمعرفی مفهوم یک ذره میپردازد، با اینکه میداند هر شیی فیزیکی دارای ابعاد فیزیکی است، یا یک جسم سخت را تعریف میکند، در صورتیکه کلیه اجسام در فیزیک دارای خواص الاستیک هستند، با روش مشابهی در تئوری مدار، عناصر ایده آل (در مقابل عناصر فیزیکی) تعریف میشوند که بعنوان **اجزاء مدار** (یا باختصار **اجزاء**) تلقی خواهند شد. کلیه این اجزاء مدار، به مفهومی که در فصل اول بحث شد، جزو عناصر فشرده خواهند بود. این عناصر ایده آل مدلهای نظری هستند که ما نتایج آزمایشهای خود را بر حسب آنها تعبیر کرده مدارهای عملی را طرح خواهیم کرد. در این فصل، ما به تعریف و بحث درباره خواص اجزاء مداری که دوسر دارند میپردازیم. این عناصر را **عناصر دوسر**^(۴) می نامیم. در فصل هشتم اجزاء مدار دیگری معرفی خواهند شد که بیش از دوسر دارند.

۱ — Diode

۲ — Ohm's Law

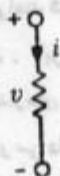
۳ — Approximations

۴ — Two Terminal Elements

۱ - مقاومت‌ها

درفیزیک مقدماتی (فیزیک سال دوم) ، تنها مقاومتی که در قانون اهم صدق کند در نظر گرفته شد . یعنی ولتاژ دوسر چنین مقاومتی متناسب با جریانی است که از داخل آن میگذرد . وسایل الکترونیکی زیادی در مهندسی وجود دارند که در قانون اهم صدق نمیکنند ولی خواص مشابهی دارند . اینگونه وسایل بطور روز افزونی در سیستمهای کامپیوتر، کنترل و ارتباطات بکار میروند . بنابراین لازم است که شناسائی اجزاء اصلی یک مدار با دید وسیعتری انجام گیرد . باین طریق میتوان در تجزیه تحلیل و طرح مدارهای مختلفی که در زمان حال یا آینده ممکن است با آن مواجه شویم ، آمادگی بیشتری داشت .

یک عنصر دوسر را **مقاومت** گویند، اگر در هر لحظه t از زمان، ولتاژ $v(t)$ و جریان $i(t)$ آن در رابطه‌ای که در صفحه vi (یا صفحه iz) بوسیلهٔ یک منحنی تعریف میشود صدق کنند. این منحنی، **مشخصه^(۱) مقاومت در لحظهٔ t** نامیده میشود و مجموعهٔ مقادیری را که جفت‌ستغیرهای $v(t)$ و $i(t)$ در لحظهٔ t ممکن است دارا باشند معین میکند. معمولترین مقاومتی که بکار میرود مقاومتی است که مشخصه آن با زمان تغییر نمیکنند، این مقاومت را **تغییر ناپذیر با زمان^(۲)** گویند . مقاومتی را **تغییر پذیر با زمان^(۳)** گویند که مشخصه آن با زمان تغییر کند. در دیاگرامهای مداری، یک مقاومت مانند شکل (۱ - ۱) کشیده میشود . در مورد یک مقاومت نکته اصلی آنست که بین مقدار «لحظه‌ای»^(۴) ولتاژ و مقدار «لحظه‌ای» جریان رابطه‌ای وجود دارد. نمونهٔ مشخصه‌های مقاومت‌ها در شکل‌های (۱ - ۲) تا (۱ - ۴) ، شکل (۱ - ۶) و شکل‌های (۱ - ۸) تا (۱ - ۱۲) نشان داده شده‌اند.



شکل ۱-۱ - نمایش یک مقاومت ، ملاحظه کنید

که جهت قراردادی ولتاژ و جهت قراردادی جریان، جهت‌های قراردادی متناظر هستند .

۱ - Characteristic

۲ - Time-invariant

۳ - Time-variant

۴ - Instantaneous

هر مقاومتی را میتوان بر حسب آنکه خطی یا غیرخطی، تغییرپذیر با زمان و یا تغییرناپذیر با زمان باشد، به چهار طریق طبقه بندی نمود. مقاومتی را خطی^(۱) گویند که در هر لحظه از زمان، مشخصه آن خط مستقیمی باشد که از مبدا می گذرد. مقاومتی را که خطی نباشد غیر خطی^(۲) گویند. اکنون به مطالعه جزئیات این چهار نوع مقاومت بپردازیم.

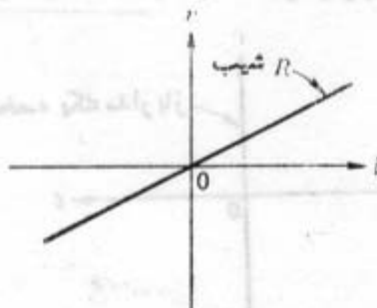
۱-۱- مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان

مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان طبق تعریف، مقاومتی است که مشخصه آن خط مستقیمی باشد که از مبدأ گذشته و با زمان تغییر نکند، طبق شکل (۱-۲). بنابراین رابطه بین مقدار لحظه ای ولتاژ $v(t)$ و مقدار لحظه ای جریان $i(t)$ طبق قانون اهم بصورت زیر بیان میشود:

$$\begin{aligned} (1-1) \quad & \left\{ \begin{array}{l} v(t) = R i(t) \quad \text{یا} \quad i(t) = G v(t) \\ (1-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} R = \frac{1}{G} \end{array} \right. \end{array} \right. \end{aligned}$$

که در آن:

G و R مقادیر ثابت بوده به v و i بستگی ندارند. R را مقاومت^(۳) و G را رسانائی^(۴) گویند. در معادلات (۱-۱) و (۱-۲) واحدهای ولتاژ، جریان، مقاومت



شکل ۱-۲ - مشخصه یک مقاومت «خطی» در هر لحظه خط مستقیمی

است که از مبدا میگذرد. شیب R در صفحه iv ،

مقدار مقاومت را معین میکند.

۱ - Linear

۲ - Nonlinear

۳ - Resistance

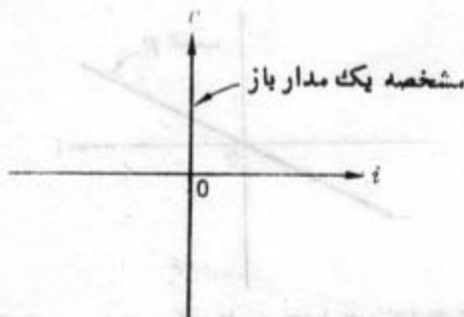
۴ - Conductance

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

و رسانائی بترتیب عبارتند از ولت، آمپر، اهم و مِهو^(۱). توجه کنید که در معادله (۱-۱)، رابطه بین $i(t)$ و $v(t)$ برای یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان بوسیله یک «تابع خطی» بیان میشود. معادله اول (۱-۱)، $v(t)$ را بصورت یک تابع خطی $i(t)$ و معادله دوم، $i(t)$ را بصورت یک تابع خطی $v(t)$ بیان میکند. چون مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان در مدارها اهمیت بسیاری دارد از این رو عبارت زیر تأکید میشود: «یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان مقاومتی است که در قانون اهم داده شده در معادله (۱-۱) صدق کند، در این معادله G و R مقادیر ثابت اند.»

میتوان یک مقاومت کربنی^(۲) را که درجه حرارت آن ثابت نگهداشته شده است بعنوان مدل یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان بیان نمود، مشروط بر آنکه حدود تغییرات ولتاژ و جریان آن بطور مناسبی محدود شود. آشکار است که اگر ولتاژ یا جریان بیش از مقدار تعیین شده باشد مقاومت داغ شده و حتی ممکن است بسوزد.

دو نمونه ویژه از مقاومت‌های خطی تغییرناپذیر با زمان که مورد توجه خاص ما هستند عبارتند از «مدار باز»^(۳) و «مدار با اتصال کوتاه»^(۴). یک عنصر دوسر را مدار باز گویند اگر جریان آن شاخه بازاء همه مقادیر ولتاژ شاخه مساوی صفر باشد. مشخصه یک مدار باز محور v در صفحه $i-v$ میباشد طبق شکل (۱-۳). این مشخصه دارای شیب بینهایت یعنی $R = \infty$ و یا $G = 0$ است. یک عنصر دوسر را مدار با اتصال کوتاه



شکل ۱-۳ - مشخصه یک مدار باز منطبق بر محور v است

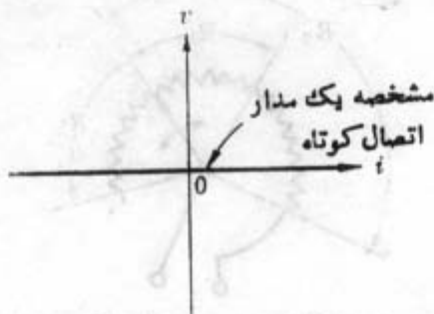
زیرا جریان آن همواره مساوی صفر است.

۱ - Mho

۲ - Carbon-deposited

۳ - Open circuit

۴ - Short circuit



شکل ۴-۱ - مشخصه یک مدار با اتصال کوتاه بر محور i منطبق است زیرا ولتاژ آن همواره مساوی صفر است.

گویند اگر ولتاژ آن شاخه بازاء همه مقادیر جریان شاخه مساوی صفر باشد. مشخصه یک مدار با اتصال کوتاه محور i از صفحه iv است طبق شکل (۴-۱). شیب این مشخصه صفر است یعنی $R=0$ و یا $G=\infty$.

تمرین - با استفاده از قوانین کیرشف درستی عبارتهای زیر را تصدیق کنید :

الف : شاخه‌ای که از اتصال سری یک مقاومت R و یک مدار باز تشکیل میشود دارای مشخصه یک مدار باز است.

ب : شاخه‌ای که از اتصال سری یک مقاومت R و یک مدار با اتصال کوتاه تشکیل میشود دارای مشخصه مقاومت R است.

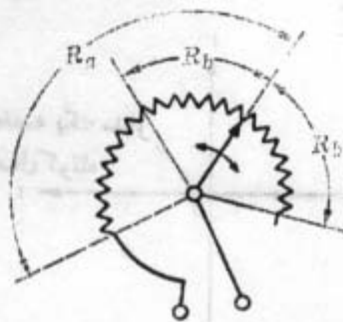
پ : شاخه‌ای که از اتصال موازی یک مقاومت R و یک مدار باز تشکیل میشود دارای مشخصه مقاومت R است.

ت : شاخه‌ای که از اتصال موازی یک مقاومت R و یک مدار با اتصال کوتاه تشکیل میشود دارای مشخصه مدار با اتصال کوتاه است.

۱-۲ - مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان

مشخصه یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان با معادله‌های زیر توصیف میشود :

$$(۱-۲) \quad \boxed{v(t) = R(t) i(t) \quad \text{یا} \quad i(t) = G(t) v(t)}$$



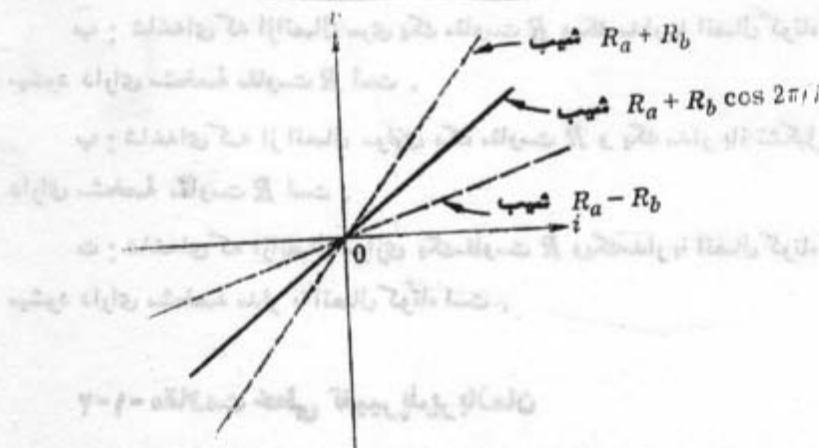
شکل ۱-۵ - یک پتانسیومتر با اتصال لغزنده، نمونه‌ای

از یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان است

$$R(t) = R_a + R_b \cos 2\pi f t$$

که در آن $R(t) = \frac{1}{G(t)}$. واضح است که مشخصه در شرط خطی بودن صدق کرده ولی با زمان تغییر میکند. یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان در شکل (۱-۵) نشان داده شده است. اتصال لغزنده پتانسیومتر (۱) بوسیلهٔ یک سروموتور (۲) به جلو و عقب حرکت میکند بطوریکه در زمان t مشخصه بصورت زیر است:

$$v(t) = (R_a + R_b \cos 2\pi f t) i(t) \quad (1-5)$$



شکل ۱-۶ - مشخصه پتانسیومتر شکل (۱-۵) در لحظه t

۱ — Potentiometer

۲ — Servomotor

که در آن R_a ، R_b و f مقادیر ثابت بوده و $R_a > R_b > 0$ است. مشخصه این مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان در صفحه iv خط مستقیمی است که در تمام لحظات ازبدهاء میگذرد، معهذاً شیب آن در هر لحظه به زمان t بستگی دارد. با تغییر زمان، مشخصه بین دو خط باشیب های $R_a + R_b$ و $R_a - R_b$ بجلو و عقب نوسان میکند، مطابق شکل (۱-۶).
مثال ۱- مقاومتهای خطی تغییرپذیر با زمان با مقاومتهای خطی تغییرناپذیر با زمان یک فرق اساسی دارند. برای بررسی این موضوع گیریم که $i(t)$ یک تابع سینوسی با فرکانس f_1 باشد، یعنی:

(۱-۵)

$$i(t) = A \cos 2\pi f_1 t$$

که در آن A و f_1 مقادیر ثابت هستند. در این صورت، برای یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان با مقاومت R ، ولتاژ شاخه که از این جریان ناشی میشود طبق قانون اهم بصورت زیر میباشد:

(۱-۶)

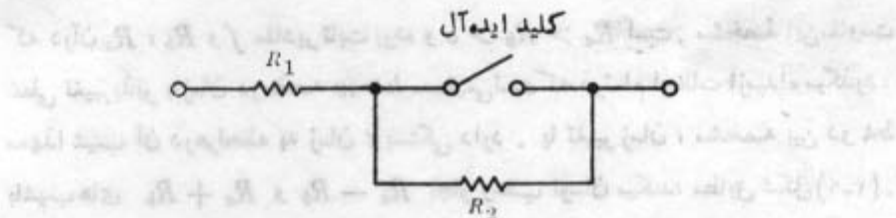
$$v(t) = RA \cos 2\pi f_1 t$$

بنابراین جریان ورودی و ولتاژ خروجی هر دو سینوسی بوده و دارای فرکانس «یکسان» f_1 هستند. ولی در مورد یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان نتیجه دیگری بدست میآید. برای یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان که توسط رابطه (۱-۴) مشخص شده، ولتاژ شاخه که از جریان سینوسی داده شده در معادله (۱-۵) ناشی میشود عبارتست از:

(۱-۷)

$$v(t) = (R_a + R_b \cos 2\pi f t) A \cos 2\pi f_1 t \\ = R_a A \cos 2\pi f_1 t + \frac{R_b A}{2} \cos 2\pi (f + f_1) t + \frac{R_b A}{2} \cos 2\pi (f - f_1) t$$

ملاحظه میشود که این مقاومت خاص تغییرپذیر با زمان، میتواند سیگنالهایی با دوفرکانس جدید تولید نماید که این فرکانسها به ترتیب مساوی مجموع و تفاضل فرکانسهای سیگنال ورودی و فرکانس مقاومت تغییرپذیر با زمان میباشد. بنابراین مقاومتهای خطی تغییرپذیر با زمان را میتوان برای ایجاد یا تبدیل سیگنالهای سینوسی بکار برد. این خاصیت مقاومتهای خطی تغییرپذیر با زمان را «مدولاسیون»^(۱) گویند که در سیستمهای ارتباطی اهمیت بسزائی دارد.



شکل ۱-۷ - مدل یک کلید فیزیکی که هنگام باز شدن دارای مقاومت

$R_1 + R_p$ و هنگام بسته شدن دارای مقاومت R_1

میشود. معمولاً R_1 خیلی کوچک و R_p بسیار

بزرگ است.

مثال ۲ - میتوان یک کلید^(۱) را بعنوان یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان در نظر گرفت که مقاومت آن هنگام باز و بسته شدن، از یک مقدار به مقدار دیگر تغییر میکند. یک کلید ایده‌آل هنگام باز بودن بصورت یک مدار باز و هنگام بسته بودن بصورت یک مدار با اتصال کوتاه میباشد. یک کلید عملی^(۲) را میتوان با مدلی که از یک کلید ایده‌آل و دو مقاومت تشکیل شده طبق شکل (۱ - ۷) نشان داد. کلیدی که بطور متناوب در فواصل منظم باز و بسته میشود یک عنصر مهم در سیستمهای ارتباطی دیجیتال است.

۱-۳ - مقاومت غیرخطی

دیدیم مقاومتی را که خطی نباشد غیرخطی گویند. یک مثال نمونه‌ای از مقاومت غیرخطی دیود ژرمانیوم است. در مورد دیود پیوندی - pn ^(۳) که در شکل (۱ - ۸) نشان داده شده است جریان شاخه، یک تابع غیرخطی از ولتاژ شاخه و بصورت رابطه زیر است:

$$(1-8) \quad i(t) = I_s (e^{qv(t)/kT} - 1)$$

که در آن I_s مقدار ثابتی است که نشان دهنده جریان اشباع معکوس^(۴) میباشد، یعنی جریان دیود وقتی که دیود در جهت عکس بایک ولتاژ بزرگ بایاس^(۵) شده باشد (یعنی با v منفی).

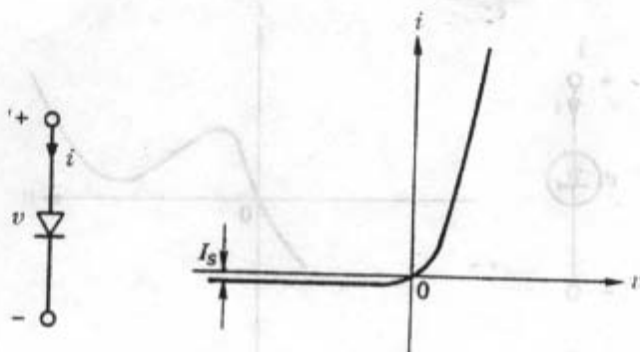
۱ - Switch

۲ - Practical

۳ - Junction Diode

۴ - Reverse saturation

۵ - Biased



شکل ۸-۱ - نمایش یک دیود پیوندی pn - مشخصه آن

که در صفحه vi رسم شده است .

پارامترهای دیگر رابطه (۸ - ۱) عبارتند از q (بار یک الکترون) ، k (ثابت بولتزمن) و T (درجه حرارت برحسب کلون) . در درجه حرارت اتاق، مقدار kT/q تقریباً مساوی ۰.۰۲۶ ولت است . مشخصه صفحه vi نیز در شکل (۸ - ۱) نشان داده شده است .

تمرین - نمونه مشخصه یک دیود پیوندی pn را در صفحه vi با استفاده از معادله (۸-۱) که در آن $I_s = ۱۰^{-۴}$ آمپر و $kT/q \cong ۰.۰۲۶$ ولت است رسم نمایید .

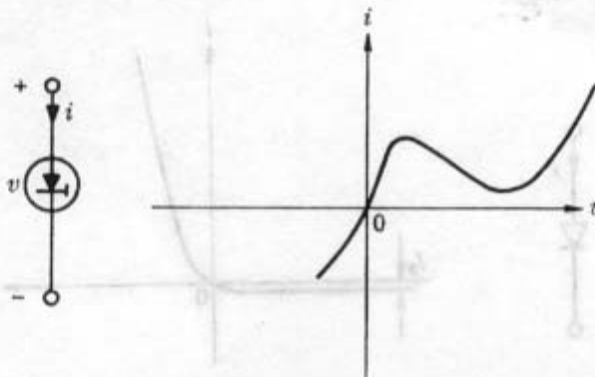
مقاومت غیرخطی بعلت غیرخطی بودنش دارای مشخصه ای نیست که در تمام احتیاطات یک خط مستقیم گذرنده از مبدا صفحه vi باشد . مثالهای نمونه ای دیگری درباره وسایل غیرخطی دوسر ، که بتوان مدل آنها را بصورت یک مقاومت غیرخطی در نظر گرفت عبارتند از دیود تونلی^(۱) و لاسپ گازدار^(۲)، که مشخصه آنها در صفحه vi در شکل های (۹ - ۱) و (۱۰ - ۱) نشان داده شده است . توجه کنید که در حالت اول، جریان i تابعی (تک ارز^(۳)) از ولتاژ v است و در نتیجه میتوان نوشت :

$$i = f(v)$$

درحقیقت همانطور که در مشخصه نشان داده شده است بازاء هر مقدار ولتاژ v ، یک و تنها

۱ - Tunnel diode ۲ - Gas tube

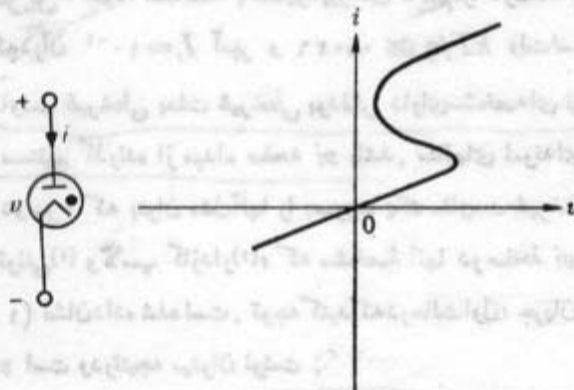
۳ - Single-valued



شکل ۹-۱ - نمایش یک دیود تونلی مشخصه آن

که در صفحه $i-v$ رسم شده است.

یک مقدار ممکن برای جریان وجود دارد*. چنین مقاومتی را کنترل شده بوسیله ولتاژ^(۱) نامند. از طرف دیگر، در مشخصه لامپ گازدار ولتاژ v یک تابع (تک ارز) از جریان i است زیرا برای هر مقدار i ، یک و تنها یک مقدار ممکن برای v وجود دارد.



شکل ۹-۲ - نمایش یک دیود گازدار مشخصه آن

که در صفحه $i-v$ رسم شده است.

* به بخش ۲ - ۱ از ضمیمه الف مراجعه شود.

بنابراین میتوان نوشت :

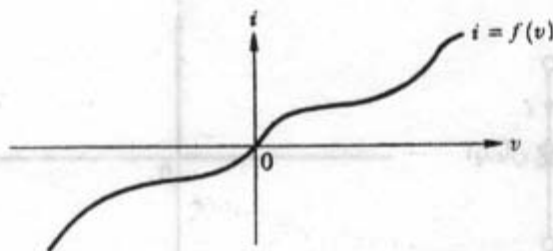
$$v = g(i)$$

چنین مقاومتی را کنترل شده بوسیله جریان^(۱) نامند. این وسایل غیرخطی دارای یک خاصیت یکتا^(۲) میباشند و آن اینکه، شیب مشخصه در قسمتی از دامنه تغییرات ولتاژ یا جریان منفی است و به این جهت آنها را اغلب وسایل با مقاومت منفی مینامند که در مدارهای الکترونیکی دارای اهمیت زیادی میباشند. از این وسایل میتوان در مدارهای تقویت کننده، نوسان ساز و مدارهای کامپیوتر استفاده کرد. دیود، دیود تونلی و لامپ گازدار مقاومت های تغییرناپذیر با زمان میباشند، زیرا مشخصه آنها با زمان تغییر نمیکند.

یک مقاومت غیرخطی میتواند هم بوسیله ولتاژ و هم بوسیله جریان همانطوریکه در شکل (۱۱-۱) دیده میشود کنترل شود، چنین مقاومتی را میتوان یا با :

$$\begin{cases} i = f(v) \\ v = g(i) = f^{-1}(i) \end{cases} \quad \text{و یا با :}$$

مشخص نمود که در آن g تابع معکوس f است. توجه کنید که شیب df/dv در شکل (۱۱-۱) بازاء تمام مقادیر v مثبت است، چنین مشخصه ای را «افزایشی یکتا»^(۳) گویند. مقاومت خطی با مقاومت مثبت حالت خاصی از چنین مقاومتی است که دارای مشخصه



شکل ۱۱-۱ - مقاومتی که دارای مشخصه افزایشی یکتا بوده و هم بوسیله ولتاژ و هم بوسیله جریان کنترل میشود.

۱ - Current-controlled

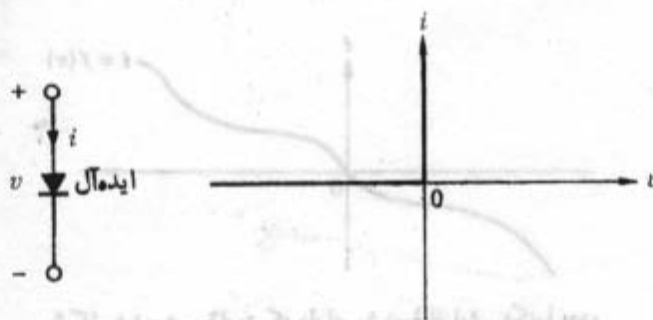
۲ - Unique

۳ - Monotonically increasing

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

افزایشی یکنوا بوده، هم بوسیله ولتاژ و هم بوسیله جریان کنترل میشود. برای تجزیه و تحلیل مدارهای با مقاومت غیرخطی، اغلب از روش تقریب خطی تکه‌ای^(۱) استفاده میشود. در این تقریب، مشخصه‌های غیرخطی بطور تقریبی بصورت قطعه خطهای مستقیم تکه تکه در نظر گرفته میشوند. مدلی که اغلب در تقریب خطی تکه‌ای مورد استفاده قرار میگیرد **دیود ایده‌آل** است. یک مقاومت غیرخطی دوسر را دیود ایده‌آل نامند اگر مشخصهٔ آن در صفحهٔ $v-i$ از دو نیم خط مستقیم، محور v منفی و محور i مثبت، تشکیل شده باشد. نمایش یک دیود ایده‌آل و مشخصهٔ آن در شکل (۱-۱۲) نشان داده شده است. وقتی $v < 0$ باشد $i = 0$ است، یعنی برای ولتاژهای منفی، دیود ایده‌آل مثل مدار باز عمل میکند. وقتی $i > 0$ باشد $v = 0$ است، یعنی برای جریانهای مثبت، دیود ایده‌آل مثل یک مدار با اتصال کوتاه عمل میکند.

در اینجا مناسب است که یک خاصیت متمایز مقاومت خطی که غالباً در مقاومت غیرخطی وجود ندارد معرفی شود. مقاومتی را دوطرفه^(۲) نامند که مشخصهٔ آن یک منحنی متقارن نسبت به مبدا باشد. بعبارت دیگر، هرگاه نقطهٔ (i, v) روی مشخصه باشد نقطهٔ $(-i, -v)$ نیز روی مشخصه قرار گیرد. واضح است که تمام مقاومت‌های خطی دوطرفه هستند ولی اغلب مقاومت‌های غیرخطی دوطرفه نیستند. پی بردن به نتایج فیزیکی خاصیت دوطرفه



شکل ۱-۱۲ - نمایش یک دیود ایده‌آل و مشخصه

آن که در صفحه $v-i$ رسم شده است.

بودن حائز اهمیت است. در مورد یک عنصر دوطرفه لزومی ندارد که دوسر آن از همدیگر متمایز گردند و میتوان عنصر را بهر دو طریق به بقیه مدار وصل نمود. حال آنکه برای عنصری که دوطرفه نباشد مانند یک دیود، باید سرهایش دقیقاً از هم متمایز گردند.

تمرین ۱- نشان دهید که آیا مشخصه های شکلهای (۱-۲) تا (۱-۴)، شکل (۱-۶) و شکلهای (۱-۸) تا (۱-۱۲) دوطرفه هستند.

تمرین ۲- مشخصه یک مقاومت غیرخطی دوطرفه را رسم کنید. به منظور تشریح نحوه کار یک مقاومت غیرخطی و بخصوص تأکید بر روی اختلاف آن با یک مقاومت خطی، مثال زیر ذکر میشود.

مثال- یک مقاومت فیزیکی که مشخصه آنرا بتوان بطور تقریب با مقاومت غیرخطی زیر تعریف نمود در نظر گیرید.

$$v = f(i) = 0.05i + 0.005i^3$$

که در آن v بر حسب ولت و i بر حسب آمپر است.

الف- گیریم v_1 و v_2 و v_3 ولتاژهای متناظر با جریانهای:

$$i_1 = 1.0 \quad \text{و} \quad i_2(t) = 2 \sin 2\pi 60 t \quad \text{و} \quad i_3 = 2$$

آمپر باشند. v_1 و v_2 و v_3 را حساب کنید. چه فرکانسهایی در v_2 وجود دارند؟ گیریم v_{12} ولتاژ متناظر با جریان $i_1 + i_2$ باشد آیا $v_{12} = v_1 + v_2$ است؟ گیریم v'_2 ولتاژ متناظر با جریان ki_2 باشد که در آن k یک مقدار ثابت است آیا $v'_2 = kv_2$ است؟

ب- فرض کنید فقط جریانهای حداکثر تا 1.0 mA (میلی آمپر) را در نظر گرفته بودیم. اگر برای محاسبه تقریبی v بجای مقاومت غیرخطی یک مقاومت خطی 0.05 اهمی در نظر میگرفتیم حداکثر درصد خطا برای v چقدر میشد؟

حل- همه ولتاژهای زیر بر حسب ولت میباشد.

$$v_1 = 0.05 \times 1 + 0.005 \times 1 = 0.055 \quad \text{الف}$$

$$v_2(t) = 0.05 \times 2 \sin 2\pi 60 t + 0.005 \times 8 \sin^3 2\pi 60 t$$

$$= 0.1 \sin 2\pi 60 t + 0.04 \sin^3 2\pi 60 t$$

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

با بخاطر آوردن اینکه برای تمام مقادیر θ ، $\sin^2 \theta = \sin \theta - \sin^3 \theta$ ، نتیجه میشود:

$$v_r(t) = 100 \sin 2\pi 60 t + 3 \sin 2\pi 60 t - \sin 2\pi 180 t$$

$$= 103 \sin 2\pi 60 t - \sin 2\pi 180 t$$

$$v_r = 0.0 \times 10 + 0.0 \times 1000 = 1000$$

فرکانسهای موجود در v_r عبارتند از ۶۰ Hz (فرکانس اصلی) و ۱۸۰ Hz (هارمونیک سوم فرکانس i_r).

$$v_{1r} = 0.0 (i_1 + i_r) + 0.0 (i_1 + i_r)^3$$

$$= 0.0 (i_1 + i_r) + 0.0 (i_1^3 + i_r^3) + 0.0 (i_1 + i_r)^2 i_1 i_r$$

$$= v_1 + v_r + 100 i_1 i_r (i_1 + i_r)$$

واضح است که $v_{1r} \neq v_1 + v_r$ و اختلاف آنها بصورت زیر است:

$$v_{1r} - (v_1 + v_r) = 100 i_1 i_r (i_1 + i_r)$$

ازاینرو:

$$v_{1r}(t) - [v_1(t) + v_r(t)] = 100 \times 2 \times 2 \sin(2\pi 60 t) \times (2 + 2 \sin 2\pi 60 t)$$

$$= 12 \sin 2\pi 60 t + 12 \sin^2 2\pi 60 t$$

$$= 6 + 12 \sin 2\pi 60 t - 6 \cos 2\pi 120 t$$

بنابراین v_{1r} هارمونیک «سوم» و همچنین هارمونیک «دوم» را دارا میباشد.

$$v'_r = 0.0 k i_r + 0.0 k^3 i_r^3 = k(0.0 i_r + 0.0 i_r^3) + 0.0 k(k^3 - 1) i_r^3$$

بنابراین:

$$v'_r \neq k v_r$$

و:

$$v'_r - k v_r = 0.0 k(k^3 - 1) i_r^3 = 4 k(k^3 - 1) \sin^3 2\pi 60 t$$

ب- برای $i = 10 \text{ mA}$ داریم :

$$v = 50 \times 0.01 + 0.5 (0.01)^2 = 0.5 (1 + 10^{-6})$$

باجریان حداکثر 10 mA ، درصد خطا بخاطر تقریب خطی مساوی 0.001 می باشد و بنابراین برای جریانهای کوچک، مقاومت غیرخطی را میتوان بایک مقاومت خطی 0.5 اهمی تقریب نمود.

این مثال بعضی از خواص اصلی مقاومت های غیرخطی را نشان میدهد. اول اینکه، ملاحظه میشود که یک مقاومت غیرخطی میتواند سیگنالهایی با فرکانس های متفاوت از فرکانس سیگنال ورودی تولید نماید و از این نظر شبیه مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان است که قبلاً در مورد آن بحث شد. دوم اینکه، اغلب میتوان مدل یک مقاومت غیرخطی را بطور تقریبی با یک مقاومت خطی جایگزین نمود بشرطی که دامنه تغییرات کار آن باندازه کافی کوچک باشد. سوم اینکه، محاسبات بروشنی نشان میدهد که خاصیت همگنی و خاصیت جمع پذیری^(۱) هیچ یک صادق نیستند*. در ضمیمه الف خواهیم دید که تابع f را همگن گویند اگر بازاء همه مقادیر x در میدان آن و برای هر مقدار عددی a داشته باشیم :

$$f(ax) = a f(x)$$

تابع f را جمع پذیر گویند اگر بازاء هر جفت عنصر x_1 و x_2 در میدان آن داشته باشیم :

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

تابعی را خطی گویند که (۱) میدان^(۲) و دامنه^(۳) تغییرات آن فضاهای خطی باشند. (۲) همگن باشند. (۳) جمع پذیر باشند.

بالاخره یک مقاومت غیرخطی را میتوان بر حسب اینکه تغییرناپذیر با زمان و یا تغییرپذیر با زمان باشد طبقه بندی نمود. بعنوان مثال، اگر یک دیود ژرمانیوم غیرخطی را در یک ظرف روغن غوطه ور نموده و درجه حرارت آنرا طبق برنامه معینی تغییر دهیم دیود ژرمانیوم دارای مشخصه یک مقاومت غیرخطی تغییرپذیر با زمان خواهد شد.

* به بخش ۲-۳ ضمیمه الف مراجعه شود.

۱ — Additivity

۲ — Domain

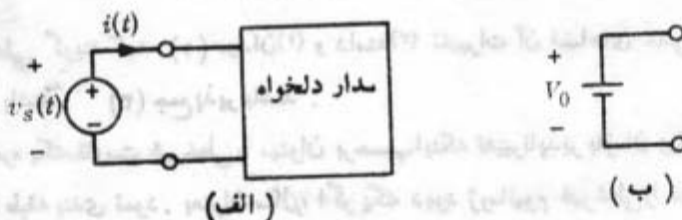
۳ — Range

۲- منابع ناپسته

در این بخش دو عنصر جدید، منبع ولتاژ ناپسته^(۱) و منبع جریان ناپسته معرفی می‌شود. منابع ولتاژ و جریان «ناپسته» را برای متمایز ساختن آنها از منابع «وابسته»^(۲) که بعداً با آنها مواجه خواهیم شد بیان می‌کنیم. برای سهولت، اغلب واژه‌های «منبع ولتاژ» و «منبع جریان» را بدون صفت «ناپسته» بکار خواهیم برد. این عمل نباید موجب اشتباه گردد زیرا هرگاه با منابع وابسته مواجه شویم صریحاً بیان می‌کنیم که آنها منابع وابسته هستند.

۲-۱- منبع ولتاژ

یک عنصر دوسر را منبع ولتاژ ناپسته گویند اگر یک ولتاژ معین $v_s(t)$ را در دوسر یک مدار دلخواه که بآن وصل شده است نگهدارد، یعنی صرف‌نظر از جریان $i(t)$ که از داخل آن می‌گذرد ولتاژ دوسر آن بمقدار $v_s(t)$ بماند. توصیف کامل منبع ولتاژ لازم می‌دارد که مشخصات تابع v_s معین شود. نمایشهای منبع ولتاژ و مدار دلخواهی که بآن وصل شده است در شکل (۲-۱ الف) نشان داده شده‌اند. اگر ولتاژ معین v_s ثابت باشد (یعنی وابسته بزمان نباشد)، این منبع ولتاژ را یک «منبع ولتاژ ثابت» نامیده* و مانند شکل (۲-۱ ب) نمایش می‌دهند.



شکل ۲-۱ - (الف) منبع ولتاژ ناپسته که بیک مدار دلخواه وصل شده است. (ب) نمایش یک منبع ولتاژ ثابت با ولتاژ V_0

* یک منبع ولتاژ ثابت را اغلب منبع dc و یا بطور ساده‌تر یک باتری می‌نامند.

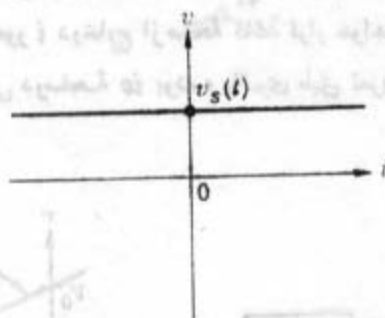
۱ — Independent Voltage source

۲ — Dependent

بکار بردن جهت‌های قراردادی برای ولتاژ شاخه و جریان شاخه یک منبع ناپسته که «مخالف جهت‌های قراردادی متناظر» میباشند معمول و راحت‌تر است. تحت این شرایط، حاصلضرب $i(t)v_s(t)$ توانی است که منبع فوق به مدار دلخواهی که بآن وصل شده است «تحويل میدهد» (به شکل (۲-۱) الف) مراجعه شود).

منبع ولتاژ بنا به تعریف آن، در لحظه t دارای مشخصه‌ای بصورت یک خط مستقیم سوازی با محور i و بعرض $v_s(t)$ در صفحه iv میباشد، مانند شکل (۲-۲). یک منبع ولتاژ را میتوان بعنوان یک مقاومت غیرخطی در نظر گرفت زیرا هر وقت $i \neq 0$ باشد خط مستقیم از مبدا عبور «نمی‌کند». منبع ولتاژ یک مقاومت غیرخطی کنترل شده با جریان است، زیرا برای هر مقدار جریان یک ولتاژ منحصر بفرد متناظر است. اگر v_s یک مقدار ثابت نباشد منبع ولتاژ تغییرپذیر با زمان و اگر v_s یک مقدار ثابت باشد تغییرناپذیر با زمان است. «اگر ولتاژ v_s یک منبع ولتاژ متحد با صفر باشد منبع ولتاژ معادل یک مدار با اتصال کوتاه میباشد». درحقیقت مشخصه این منبع بر محور i منطبق بوده و بازاء تمام مقادیر جریان درون آن، ولتاژ دوسر آن صفر است.

در دنیای فیزیکی دستگاهی بعنوان منبع ولتاژ ناپسته وجود ندارد*. معینا دستگاهی



شکل ۲-۲ - مشخصه یک منبع ولتاژ در لحظه t . یک منبع

ولتاژ را میتوان بعنوان یک مقاومت غیرخطی

کنترل شده با جریان در نظر گرفت.

* منبع ولتاژ ناپسته که در بالا تعریف شد ممکن است خیلی دقیق‌تر بصورت منبع ولتاژ ناپسته «ایده‌آل» تعریف شود. بعضی از مؤلفین منبع ولتاژ ناپسته ما را «منبع ولتاژ ایده‌آل» مینامند. واضح است که صفت «ایده‌آل» زاید است چون همه مدلها «ایده‌آل» هستند.

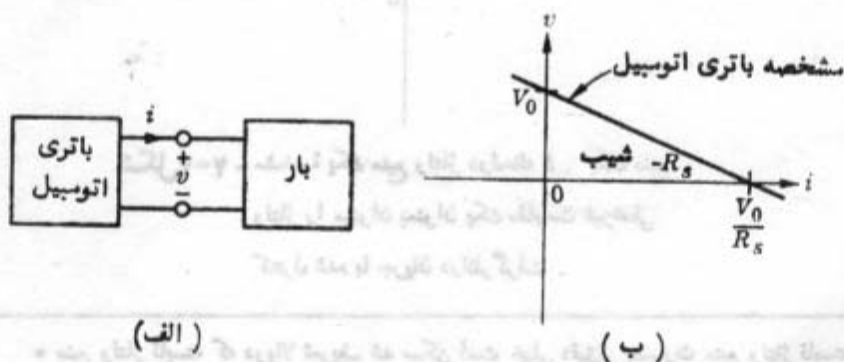
خاصی در دامنهٔ تغییرات معینی از جریان، یک منبع ولتاژ را با تقریب بسیار خوبی نشان می‌دهند.

مثال - باتری اتومبیل دارای ولتاژ و جریانی است که به بار متصل بآن طبق معادله

زیر بستگی دارد :

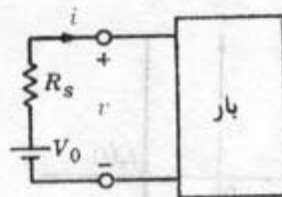
$$v = V_0 - R_s i \quad (۱ - ۲)$$

که در آن v و i - به ترتیب ولتاژ و جریان شاخه می‌باشند، طبق شکل (۳ - ۲ الف). مشخصهٔ معادله (۱ - ۲) که در صفحهٔ iv رسم شده، در شکل (۳ - ۲ ب) نشان داده شده است. محل تقاطع مشخصه با محور v برابر V_0 است. V_0 را میتوان بعنوان ولتاژ مدار باز باتری تعبیر نمود، یعنی ولتاژ دوسر آن وقتی که i صفر است. ثابت R_s را میتوان بعنوان مقاومت داخلی باتری در نظر گرفت. بنابراین، میتوان باتری اتومبیل را با یک مدار معادل متشکل از اتصال سری یک منبع ولتاژ ثابت V_0 و یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان با مقاومت R_s نمایش داد، مطابق شکل (۴ - ۲). برای تحقیق درستی مدار معادل میتوان معادلات KVL را برای حلقهٔ شکل (۴ - ۲) نوشت و معادله (۱ - ۲) را بدست آورد. اگر مقاومت R_s خیلی کوچک باشد شیب در شکل (۳ - ۲ ب) تقریباً صفر میشود و محل تقاطع مشخصه با محور i در خارج از صفحهٔ کاغذ قرار خواهد گرفت. اگر $R_s = 0$ باشد مشخصه یک خط افقی در صفحهٔ iv بوده و باتری طبق تعریف فوق یک منبع ولتاژ ثابت است.



شکل ۳-۲ - باتری اتومبیل که به یک بار دلخواه وصل شده

و مشخصهٔ آن که در صفحهٔ iv رسم شده است.



شکل ۴-۲ - مدار معادل باتری اتومبیل

۲-۲- منبع جریان

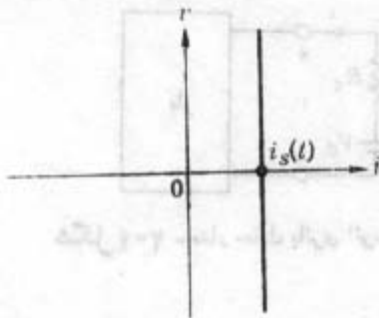
یک عنصر دوسر را منبع جریان^(۱) فابسته گویند اگر جریان معین $i_s(t)$ را در داخل مدار دلخواهی که بان وصل شده است نگهدارد، یعنی صرفنظر از ولتاژ $v(t)$ که ممکن است در دوسر مدار باشد جریانی که بداخل مدار می‌رود مساوی $i_s(t)$ است. جهت‌های قراردادی بکار برده شده را دوباره مورد توجه قرار دهید. توصیف کامل منبع جریان لازم می‌دارد که مشخصات تابع i_s معین گردد. نمایش یک منبع جریان در شکل (۵-۲) نشان داده شده است.

مشخصه یک منبع جریان در لحظه t خطی است عمودی بطول $i_s(t)$ که در شکل (۶-۲) نشان داده شده است. بنابراین یک منبع جریان را میتوان بعنوان یک مقاومت غیرخطی تغییرپذیر با زمان و کنترل شده با ولتاژ در نظر گرفت. «اگر جریان i_s متحد با صفر باشد منبع جریان در واقع معادل یک مدار باز است».



شکل ۵-۲ - منبع جریان فابسته که بیک مدار

دلخواه وصل شده است.



شکل ۲-۶ - مشخصهٔ یک منبع جریان . یک منبع

جریان را میتوان بعنوان یک مقاومت غیر

خطی کنترل شده با ولتاژ در نظر گرفت.

درحقیقت $i_s = 0$ لازم میدارد که مشخصه بر محور v منطبق شده و با زاء تمام مقادیر ولتاژ دوسر عنصر، جریان داخل آن صفر گردد.

۲-۳ - مدارهای معادل تونن و نرن

در مورد منبع ولتاژ ناپسته و منبع جریان ناپسته مطالبی یاد گرفتیم . آنها مدلهای مداری ایده‌آل میباشند . اکثر منابع عملی مشابه باتری اتومبیل هستند که در مثال قبل شرح داده شد، یعنی آنها را میتوان بشکل اتصال سری یک منبع ولتاژ ایده‌آل و یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان R_s نمایش داد . در این موقعیت، مناسب است که برای باتری اتومبیل نمایش معادلی که بصورت یک منبع جریان باشد معرفی شود .

اگر مشخصهٔ باتری اتومبیل را که در شکل (۳ - ۲) رسم شده است در نظر گیریم، میتوان آنرا بصورت یک منبع ولتاژ V_0 « بطور سری » با یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان R_s ، و یا بصورت یک منبع جریان ثابت $I_0 \triangleq \frac{V_0}{R_s}$ « بطور موازی » با یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان R_s طبق شکل (۷ - ۲) در نظر گرفت .

« بطور دقیق‌تر بایستی « یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان با مقاومت R_s » گفته شود .

معمولاً در شکل‌های مداری مانند شکل (۷ - ۲ الف)، یک مقاومت خطی را با مقاومت R_s آن نشان میدهم و برای سادگی آنرا فقط « مقاومت R_s » می‌نامیم .

چون دو مدار نشان داده شده دارای یک مشخصه میباشند آنها را معادل^(۱) همدیگر گویند. درحقیقت با نوشتن قانون ولتاژ کیرشف برای مدار شکل (۷-۲ الف) داریم:

(الف ۲-۲)

$$v = V_0 - R_s i$$

بطریق مشابه، با نوشتن قانون جریان کیرشف برای مدار شکل (۷-۲ ب) داریم:

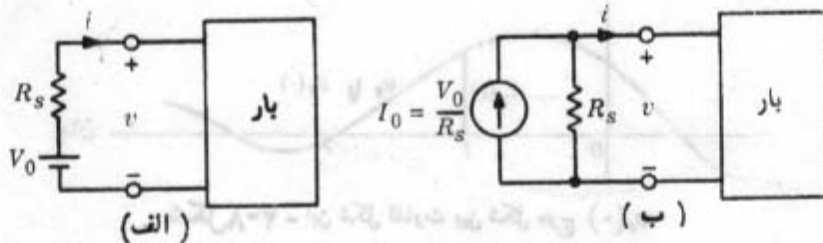
(ب ۲-۲)

$$i = I_0 - \frac{1}{R_s} v$$

چون $I_0 = \frac{V_0}{R_s}$ است، دو معادله فوق یکسان هستند و هر دو یک خط مستقیم را در صفحه i - v نشان میدهند.

اتصال سری منبع ولتاژ و مقاومت خطی تغییرناپذیر بازمان R_s نشان داده شده در شکل (۷-۲ الف) را مدار معادل تونن^(۲)، و اتصال موازی منبع جریان و مقاومت خطی تغییرناپذیر بازمان R_s نشان داده شده در شکل (۷-۲ ب) را مدار معادل نرتن^(۳) گویند. در بعضی موارد استفاده از منبع ولتاژ راحت تر از منبع جریان بنظر میرسد و در موارد دیگر استفاده از منبع جریان آسانتر است. بنابراین مدارهای معادل تونن و نرتن انعطاف پذیری بیشتری در بررسی مسائل به ما میدهند.

معادل بودن این دو مدار حالت خاص قضیه مدار معادل تونن و نرتن است که بعداً بطور مفصل در فصل شانزدهم مورد بحث قرار خواهد گرفت.



شکل ۷-۲ - (الف) مدار معادل تونن، (ب) مدار معادل نرتن باتری اتومبیل

۱ - Equivalent

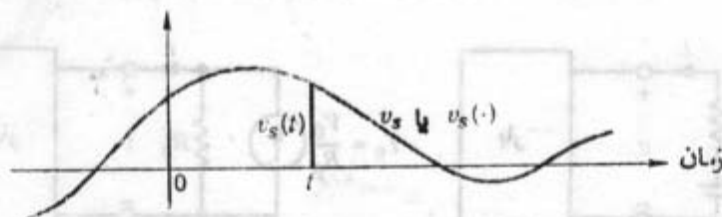
۲ - Thévenin

۳ - Norton

۴-۲- شکل موجها و طرز نمایش آنها

همانطور که قبلاً گفته شد برای تشریح کامل یک منبع ولتاژ v_s و یا یک منبع جریان i_s مشخصات کامل تابع زمانی آنها، یعنی $v_s(t)$ برای همه مقادیر t و یا $i_s(t)$ برای همه مقادیر t لازم است. بنابراین مشخصات منبع ولتاژ v_s یا باید شامل جدول بندی کامل تابع v_s بوده و یا شامل قاعده‌ای باشد که بکمک آن بتوان ولتاژ $v_s(t)$ را برای هر زمان t که ممکن است بعداً مورد توجه قرار گیرد محاسبه نمود. در اینجا به مشکل طرز نمایش^(۱) برمی‌خوریم که در سرتاسر این درس با آن روبرو خواهیم بود، یعنی بعضی مواقع «همه تابع v_s » مورد نظر است، مانند شکل موجی^(۲) که روی اسیلوسکوپ مشاهده میشود، و بعضی اوقات فقط یک مقدار بخصوص مانند $v_s(t)$ در زمان t مورد نظر است. اختلاف این دو مفهوم در شکل (۸-۲) تشریح شده است. هرگاه بخواهیم تأکید کنیم که منظور تمام تابع است، عبارت «شکل موج $v_s(0)$ » بکار خواهد رفت و بجای حرفی مانند t یک نقطه گذاشته میشود، چون یک مقدار خاص t مورد نظر نیست بلکه «تمام تابع» مورد نظر است.

متأسفانه پیروی دقیق این رویه منجر به عبارتهای بسیار پیچیده میشود. بنابراین زمانی که باید «شکل موج $f(0)$ »، که در آن برای تمام مقادیر t ، $f(t) = \cos \omega t$ می‌باشد گفته شود، اغلب برای سهولت «شکل موج $\cos \omega t$ » گفته میشود.



شکل ۸-۲ - این شکل تفاوت بین شکل موج $v_s(0)$

و عدد $v_s(t)$ را که مقدار تابع v_s در

لحظه t میباشد نشان میدهد.

یک استفاده نوعی^(۱) از تفاوت بین دو مفهوم « تعامی تابع » و « مقداری که تابع در یک لحظه t بخود میگیرد بشکل زیر است. مدار پیچیده‌ای را که از تعدادی مقاومت، سلف و خازن تشکیل یافته و فقط با یک منبع جریان تحریک میشود در نظر گیرید. ولتاژ دوسر یکی از خازنها را v_e بنامید. میتوان گفت که پاسخ^(۲) $v_e(t)$ (یعنی « مقدار پاسخ در لحظه t ») به شکل موج $i_s(0)$ (یعنی « تعامی تابع i_s ») بستگی دارد. استفاده از این طرز بیان بمنظور تأکید این مطلب است که $v_e(t)$ نه تنها به $i_s(t)$ (مقدار i_s در لحظه t) بستگی دارد بلکه به تمام مقادیر پیشین i_s نیز وابسته است.

۲-۵- بعضی شکل موجهای نمونه

اکنون بتعریف بعضی شکل موجهای مفید که بعداً بطور مکرر مورد استفاده قرار خواهند گرفت می‌پردازیم. « مقدار ثابت » این ساده‌ترین شکل موج است و بصورت زیر توصیف میشود:

$$f(t) = K \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

که در آن K یک مقدار ثابت است.

« سینوسوئید » برای نمایش یک شکل موج سینوسی و یا بطور خلاصه سینوسوئید^(۳) طرز نمایش متداول زیر بکار میرود:

$$f(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$$

که در آن ثابت A دامنه^(۴) سینوسوئید، ثابت ω فرکانس^(۵) (زاویه‌ای) (بر حسب رادیان بر ثانیه) و ثابت Φ فاز^(۶) نامیده میشود. سینوسوئید در شکل (۹-۲) نشان داده شده است.

۱ - Typical

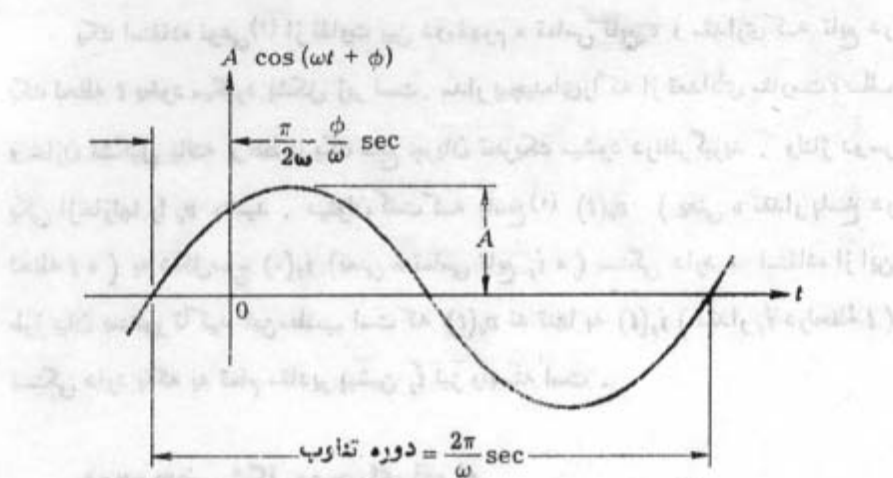
۲ - Response

۳ - Sinusoid

۴ - Amplitude

۵ - Frequency

۶ - Phase

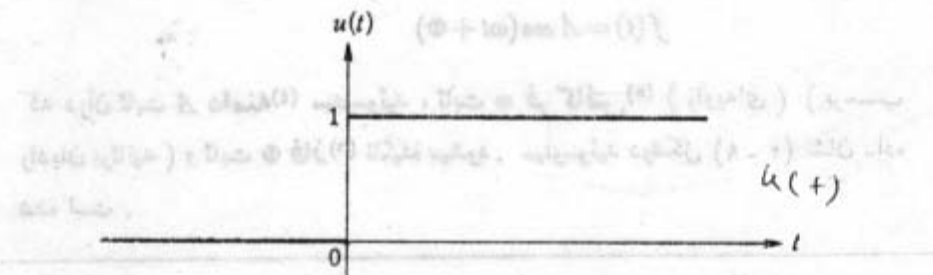


شکل ۹-۲- یک شکل موج سینوسی با دامنه A و فاز ϕ

«پله واحد» تابع پله واحد^(۱) همانطوریکه در شکل (۱۰-۲) نشان داده شده با $u(t)$ نمایش داده میشود و بصورت زیر تعریف میگردد:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{برای } t < 0 \\ 1 & \text{برای } t > 0 \end{cases} \quad (۱۰-۲)$$

در لحظه $t=0$ مقدار آنرا میتوان ۱، $\frac{1}{2}$ یا صفر گرفت. برای مطالب این کتاب



شکل ۱۰-۲- تابع پله واحد $u(t)$

موضوع فوق اهمیت ندارد، ولی هنگام استفاده از تبدیل لاپلاس یا فوریه بهتر است که:

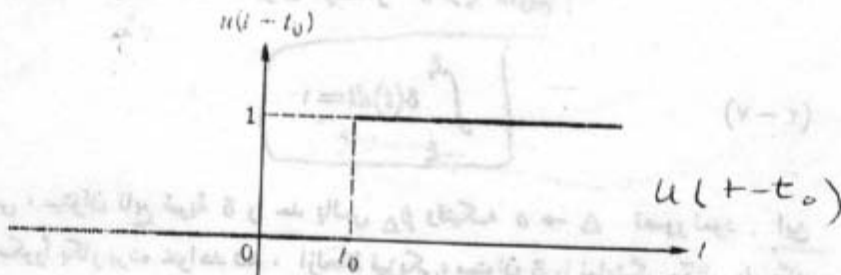
$$u(0) = \frac{1}{2}$$

انتخاب شود. در سراسر این کتاب حرف u منحصرأً برای پله واحد بکار خواهد رفت. فرض کنید یک پله واحد با اندازه t_0 ثانیه بتأخیر افتد. شکل موج حاصل در لحظه t دارای عرض $u(t - t_0)$ خواهد بود. در واقع برای $t < t_0$ آرگومان (۱) منفی بوده و در نتیجه عرض تابع صفر است، برای $t > t_0$ آرگومان مثبت بوده و عرض تابع برابر ۱ می باشد، این مطلب در شکل (۱۱ - ۲) نشان داده شده است.

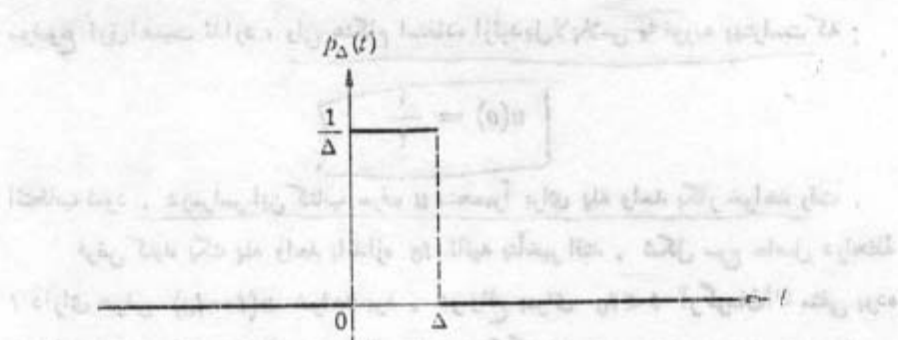
« پالس » - چون غالباً لازم است از یک پالس چهار گوش استفاده شود، تابع پالس (۲) $p_{\Delta}(t)$ را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$p_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta \\ 0 & \Delta < t \Rightarrow t > \Delta \end{cases}$$

بعبارت دیگر، p_{Δ} پالسی به ارتفاع $\frac{1}{\Delta}$ و عرض Δ است که در لحظه $t=0$ شروع میشود. توجه کنید که بازاء تمام مقادیر پارامتر مثبت Δ ، سطح زیر $p_{\Delta}(0)$ برابر ۱ است



شکل ۱۱-۲ = تابع پله واحد با تأخیر



شکل ۱۲-۲ یک تابع پالس $p_{\Delta}(t)$

(بشکل (۱۲-۲) مراجعه شود). در نظر داشته باشید که:

برای تمام مقادیر t

$$(۲-۵) \quad p_{\Delta}(t) = \frac{u(t) - u(t - \Delta)}{\Delta}$$

«ضربهٔ واحد» - ضربهٔ واحد^(۱) $\delta(t)$ (که تابع دلتای دیراک^(۱) نیز نامیده میشود) به مفهوم دقیقی ریاضی کلمه، یک تابع نیست (به ضمیمه الف مراجعه شود). برای منظوره‌های خود چنین بیان میکنیم:

برای $t \neq 0$ $\delta(t) = 0$ و در $t = 0$ ویژه

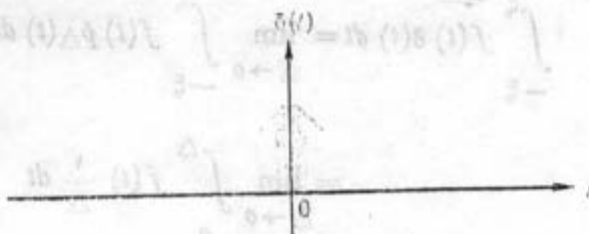
$$(۲-۶) \quad \delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{ویژه} & t = 0 \end{cases}$$

و ویژگی در سبدها چنان است که برای هر مقدار $\xi > 0$ داریم:

(۲-۷)

$$\int_{-\xi}^{\xi} \delta(t) dt = 1$$

بطورحسی، میتوان تابع ضربه δ را حد پالس p_{Δ} وقتی که $\Delta \rightarrow 0$ تصور نمود. این واقعیت مکرراً بکار برده خواهد شد. از لحاظ فیزیکی، میتوان δ را نمایشگر چگالی بار یک بار نقطه‌ای «واحد» واقع بر $t = 0$ در روی محور t تصور نمود.



شکل ۱۳-۲- یک تابع ضربه واحد $\delta(t)$

از تعریف δ و u نتیجه میشود که :

$$(۲-۸) \quad u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t') dt'$$

و :

$$(۲-۹) \quad \frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$$

این دو معادله حائز اهمیت بسیاری بوده و در فصلهای بعد بطور مکرر مورد استفاده قرار خواهند گرفت. تابع ضربه بطور ترمیمی در شکل (۱۳-۲) نشان داده شده است. خاصیت مفید دیگری که اغلب مورد استفاده قرار میگیرد «خاصیت غربالی»^(۱) ضربه واحد است. گیریم f یک تابع پیوسته باشد، در این صورت :

$$(۲-۱۰) \quad \int_{-\xi}^{\xi} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

برای هر مقدار مثبت ξ .

این مطلب را میتوان بهسولت با جایگزین کردن δ با p_{Δ} بطور تقریبی بصورت زیر

اثبات نمود :

نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$\begin{aligned} \int_{-\xi}^{\xi} f(t) \delta(t) dt &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{-\xi}^{\xi} f(t) p_{\Delta}(t) dt \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_0^{\Delta} f(t) \frac{1}{\Delta} dt \\ &= f(0) \end{aligned}$$

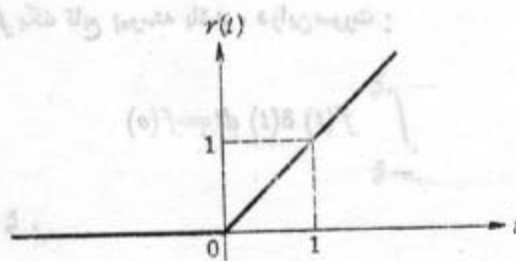
تبصره ۹- تابعی که به تابع پله واحد مربوط است تابع شیب واحد^(۱) $r(t)$ می‌باشد که بصورت زیر تعریف می‌شود:

برای $t \geq 0$ $r(t) = t u(t)$

شکل موج $r(t)$ در شکل (۲-۱۴) نشان داده شده است. از روابط (۲-۳) و (۲-۱۱) میتوان نشان داد که:

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(t') dt' \quad (2-12)$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = u(t) \quad (2-13)$$



شکل ۲-۱۴ - یک تابع شیب واحد $r(t)$

تبصره ۲- تابعی که با تابع ضربه واحد ارتباط نزدیکی دارد تابع دوبلت واحد^(۱) $\delta'(0)$ است که بصورت زیر تعریف میشود:

$$\delta'(t) = \begin{cases} 0 & \text{برای } t \neq 0 \\ \text{ویژه} & \text{در } t = 0 \end{cases}$$

ویژگی در $t=0$ چنان است که:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^t \delta'(t') dt' \quad (2-10)$$

و:

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \delta'(t) \quad (2-11)$$

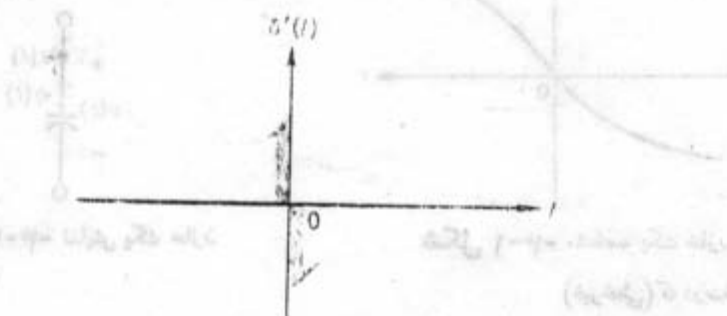
نمایش دوبلت واحد در شکل (۲-۱۰) نشان داده شده است.

تمرین ۱- شکل موجهای مشخص شده با روابط زیر را رسم کنید:

الف. $2u(t) - 2u(t-2)$

ب. $0.5p_{0.1}(t) - 0.5p_{0.1}(t-0.1) + 0.5p_{0.2}(t-2)$

پ. $r(t) - u(t-1) - r(t-1)$



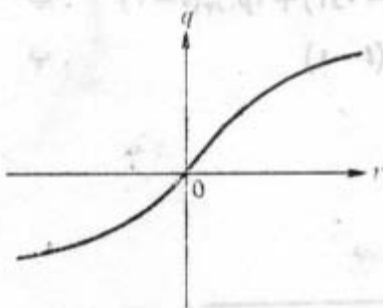
شکل ۲-۱۵- یک دوبلت $\delta'(0)$

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

تمرین ۲- $\sin t$ و $\sin(2t+1)$ را بشکل سینوسیوید استاندارد بیان کنید
(در اینجا فاز برحسب رادیان داده شده است).

۳- خازنها

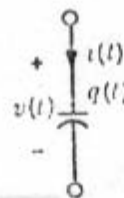
خازنها^(۱) بعلا اینکه بار الکتریکی ذخیره میکنند در مدارهای الکتریکی بکار میروند. عنصری که خازن خوانده میشود، مدل ایده‌آل شده یک خازن فیزیکی است مانند خازن با صفحات موازی. خازن فیزیکی عنصری است که علاوه بر خاصیت اصلی ذخیره نمودن بار الکتریکی، اندکی هم خاصیت پراکندگی دارد (معمولاً خیلی کم). عنصری که در هر لحظه t از زمان، بار الکتریکی ذخیره شده $q(t)$ و ولتاژ آن در رابطه‌ای که توسط یک منحنی در صفحه vq تعریف میشود صدق کند خازن نامیده میشود. این منحنی را مشخصه خازن در لحظه t مینامند. نکته اصلی آنست که بین مقدار «لحظه‌ای» بار $q(t)$ و مقدار «لحظه‌ای» ولتاژ $v(t)$ رابطه‌ای وجود دارد. مشخصه خازن نیز میتواند مانند مشخصه مقاومت با زمان تغییر کند. بطور نمونه، این مشخصه بصورت نشان داده شده در شکل (۱-۳) خواهد بود. تقریباً مشخصه همه خازنهای فیزیکی افزایشی یکنوا است، یعنی وقتی v اضافه شود q افزایش مییابد.



شکل ۱-۳- مشخصه یک خازن

(غیرخطی) که در صفحه

vq رسم شده است



شکل ۲-۳- نمایش یک خازن

در دیالگرامهای مداری یک خازن بطور نمایشی مطابق شکل (۲ - ۳) نمایش داده میشود. توجه کنید که همیشه $q(t)$ را باری خواهیم نامید که در لحظه t در صفحه ای که جهت قراردادی جریان $i(t)$ بآن وارد میشود وجود دارد. و تئیکه $i(t)$ مثبت باشد بارهای مثبت (در لحظه t) به صفحه فوقانی که بار آن $q(t)$ نامیده شده آورده میشوند و بنابراین شدت تغییر $q^{(1)}$ [یعنی جریان $i(t)$] نیز مثبت است و بنابراین داریم:

$$(۳ - ۱) \quad i(t) = \frac{dq}{dt}$$

در این معادله جریانها برحسب آمپر و بارها برحسب کولمب^(۲) داده میشود. با بکار بردن رابطه داده شده بین بار و ولتاژ، مشخصه ولتاژ شاخه و جریان شاخه یک خازن را از رابطه (۱ - ۳) بدست میآوریم.

خازنی را که مشخصه آن در هر لحظه از زمان خط مستقیمی باشد که از مبدا صفر vq میگذرد خازن خطی گویند. بعکس، اگر در لحظه ای از زمان مشخصه آن خط مستقیمی که از مبدا صفر vq میگذرد نباشد آنرا غیر خطی گویند. خازنی را که مشخصه آن با زمان تغییر نکند خازن تغییر ناپذیر با زمان، و اگر مشخصه آن با زمان تغییر کند خازن تغییر پذیر با زمان گویند. }
مانند آنچه که در مقاومتها گفته شد خازنها را برحسب آنکه خطی، غیر خطی، تغییر پذیر با زمان و یا تغییر ناپذیر با زمان باشند میتوان به چهار نوع تقسیم نمود.

۳-۱- خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان

از تعریف خطی بودن و تغییر ناپذیری با زمان، میتوان مشخصه یک خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان را بصورت زیر نوشت:

$$(۳ - ۲) \quad q(t) = C v(t)$$

که در آن C ثابتی است (ناسته از t و v) که شیب مشخصه را تعیین نموده و ظرفیت^(۳) خازن نامیده میشود. واحد کمیتهای معادله (۲ - ۳) بترتیب کولمب، فاراد^(۴) و ولت

۱ - Rate of change

۲ - Coulomb

۳ - Capacitance

۴ - Farad

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

است. معادله‌ای که ولتاژ دوسر خازن را به جریان آن ارتباط میدهد بصورت زیر است:

$$(۳-۳) \quad i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt} = \frac{1}{S} \frac{dv}{dt}$$

که در آن $S = C^{-1}$ بوده و الاستانس^(۱) گفته میشود. اگر $(۳-۳)$ را بین صفر و t انتگرال گیری کنیم بدست میآوریم:

$$(۳-۴) \quad v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt'$$

و برحسب الاستانس S ،

$$(۳-۵) \quad \boxed{v(t) = v(0) + S \int_0^t i(t') dt'}$$

بنابراین، خازن خطی تغییرناپذیر با زمان تنها وقتی بعنوان یک عنصر مدار کاملاً مشخص میشود که ظرفیت C (شیب مشخصه آن) و ولتاژ اولیه آن $v(0)$ داده شده باشند.

باید تأکید شود که معادله $(۳-۳)$ تابعی را تعریف میکند که $i(t)$ را برحسب

$\frac{dv}{dt}$ بیان می‌نماید، یعنی:

$$i(t) = f\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

توجه به این مطلب حائز اهمیت است که $f(0)$ تابع خطی میباشد. از طرف دیگر، معادله $(۳-۴)$ تابعی را تعریف میکند که $v(t)$ را برحسب $v(0)$ و شکل موج جریان $i(0)$ در فاصله $[0, t]$ بیان مینماید. لازم است توجه شود تابعی که توسط $(۳-۴)$ تعریف شده و مقدار $v(t)$ ، یعنی ولتاژ در لحظه t را برحسب «شکل موج» جریان در فاصله $[0, t]$ میدهد تنها وقتی «خطی» است که $v(0) = 0$ باشد. انتگرال موجود در معادله $(۳-۴)$ نشان دهنده سطح خالص^(۲) زیر منحنی جریان در فاصله زمانی صفر و t میباشد. «سطح خالص»،

برای بخاطر داشتن اینکه قسمتی از منحنی $i(0)$ که در بالای محور زمان قرار دارد مساحت مثبت، و بخشی که زیر محور زمان قرار دارد مساحت منفی بوجود میآورد گفته میشود. جالب است توجه کنیم که مقدار v در لحظه t ، یعنی $v(t)$ ، به مقدار اولیه $v(0)$ و همه مقادیر جریان از لحظه صفر تا لحظه t بستگی دارد. باین حقیقت معمولاً با گفتن اینکه «خازنها دارای حافظه^(۱) میباشند» اشاره میشود.

تمرین ۱ گیریم منبع جریان $i_s(t)$ به یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ظرفیت C و $v(0)=0$ وصل شده باشد. شکل موج ولتاژ $v(0)$ دوسرخازن را برای حالت‌های زیر تعیین نمائید:

$$i_s(t) = u(t) \quad \text{الف -}$$

$$i_s(t) = \delta(t) \quad \text{ب -}$$

$$i_s(t) = A \cos(\omega t + \Phi) \quad \text{پ -}$$

تمرین ۲ گیریم منبع ولتاژ $v_s(t)$ به یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ظرفیت C و $v(0)=0$ وصل شده باشد. شکل موج جریان $i(0)$ درخازن را برای حالت‌های زیر تعیین نمائید:

$$v_s(t) = u(t) \quad \text{الف -}$$

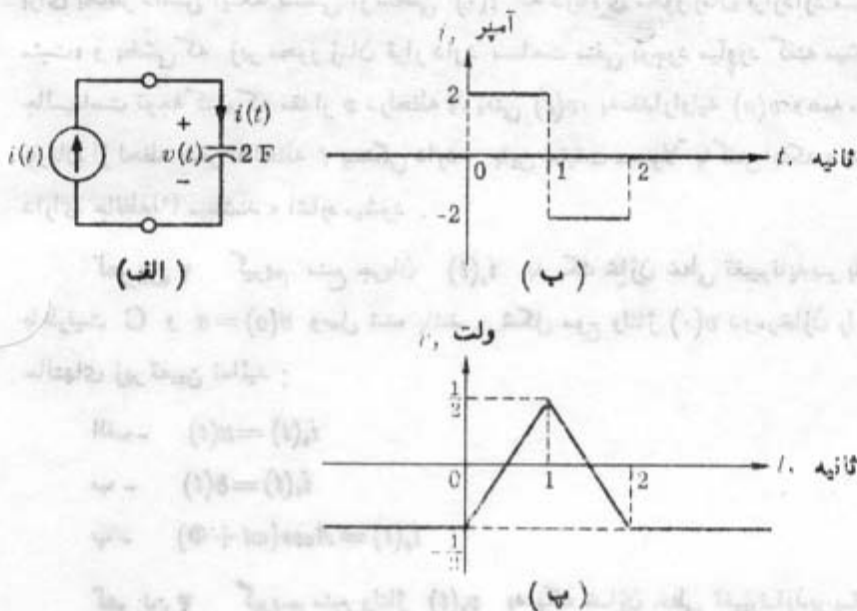
$$v_s(t) = \delta(t) \quad \text{ب -}$$

$$v_s(t) = A \cos(\omega t + \Phi) \quad \text{پ -}$$

مثال منبع جریانی بدوسریک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ظرفیت 2 فاراد و

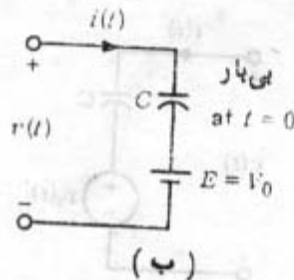
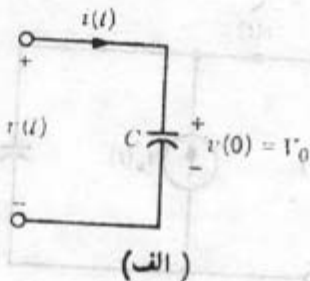
ولتاژ اولیه $v(0) = -\frac{1}{4}$ ولت مطابق شکل (۳-۳ الف) وصل شده است. گیریم که منبع جریان با شکل موج ساده $i(0)$ مطابق شکل (۳-۳ ب) داده شده باشد. ولتاژ شاخه دوسرخازن را میتوان بلافاصله از معادله (۳-۴) بصورت زیر حساب نمود:

$$v(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \int_0^t i(t') dt'$$



شکل ۳-۳- شکل موجهای ولتاژ و جریان دوسرخازن خطی تغییرناپذیر بازمان

شکل موج $v(t)$ در شکل (۳-۳ ب) رسم شده است. برای مقادیر منفی t ولتاژ مساوی $-\frac{1}{4}$ ولت است. در $t=0$ ولتاژ شروع به افزایش نموده و در لحظه $t=1$ در نتیجهٔ اثر قسمت مثبت شکل موج جریان به مقدار $\frac{1}{4}$ ولت میرسد، سپس برای $1 < t < 2$ به علت جریان منفی ثابت بطور خطی تا $-\frac{1}{4}$ ولت تنزل نموده و برای $t > 2$ ثانیه در $-\frac{1}{4}$ ولت ثابت میماند. این مثال ساده بروشنی نشان میدهد که برای $t > 0$ ، $v(t)$ به مقدار اولیه $v(0)$ و همهٔ مقادیر شکل موج $i(t)$ بین لحظهٔ صفر و t بستگی دارد. به علاوه سهولت مشاهده میشود که اگر $v(0)$ مساوی صفر نباشد، $v(t)$ یک تابع خطی از $i(t)$ نیست. از طرف دیگر، اگر مقدار اولیه $v(0)$ مساوی صفر باشد ولتاژ شاخه در لحظه t ، یعنی $v(t)$ ، یک تابع خطی از شکل موج جریان $i(t)$ میباشد.



شکل ۳-۴- خازن با بار اولیه $v(0) = V_0$ نشان داده شده در (الف)
معادل اتصال سری همان خازن (بدون بار اولیه) و یک منبع
ولتاژ ثابت $E = V_0$ است مطابق شکل (ب).

تمرین فرض کنید شکل موج جریان در شکل (۳-۳ ب) برای همه مقادیر t به‌تدریج دو برابر افزایش یابد. برای $t \geq 0$ ولتاژ $v(t)$ را محاسبه کنید. ثابت کنید که خطی بودن معتبر نخواهند بود مگر اینکه $v(0) = 0$ باشد.

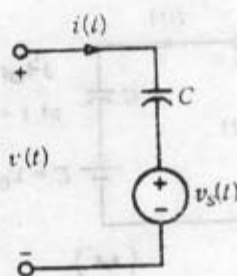
تبصره ۱- معادله (۳-۴) بیان می‌کند که برای $t \geq 0$ ، ولتاژ شاخه $v(t)$ در لحظه t در دوسریک خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان از مجموع دو جمله تشکیل می‌شود. جمله اول ولتاژ $v(0)$ در لحظه $t=0$ ، یعنی ولتاژ اولیه دوسریک خازن بوده و جمله دوم ولتاژ دوسریک خازن با ظرفیت C فاراد در لحظه t است بشرط اینکه در لحظه $t=0$ این خازن بار اولیه نداشته باشد. بنابراین هر خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان با ولتاژ اولیه $v(0)$ را می‌توان بصورت اتصال سری یک منبع ولتاژ dc با $E = v(0)$ و همان خازن با ولتاژ اولیه صفر مطابق شکل (۳-۴) در نظر گرفت. این نتیجه بسیار مفید است و در فصل‌های بعد مکرراً به‌کار برده خواهد شد.

تبصره ۲- خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان با ولتاژ اولیه صفر، یعنی $v(0) = 0$ را در نظر بگیرید. این خازن بطور سری با منبع ولتاژ وابسته $v_s(t)$ مطابق شکل (۳-۵ الف) وصل می‌شود. این اتصال سری معادل مداری است (همانطوریکه در شکل (۳-۵ ب) نشان داده شده است) که در آن همان خازن بطور موازی با یک منبع جریان وصل شده و

(۳-۶)

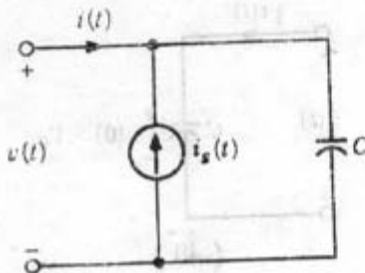
$$i_s(t) = C \frac{dv_s}{dt}$$

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها



$$v_s(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_s(t') dt'$$

(الف)



$$i_s(t) = C \frac{dv_s}{dt}$$

(ب)

شکل ۳-۵- مدارهای تونن و نرنن برای یک خازن با منبع ناپسته .

منبع ولتاژ $v_s(t)$ در شکل (الف) بر حسب منبع جریان $i_s(t)$ در شکل (ب) بصورت زیر داده میشود :

$$v_s(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_s(t') dt' \quad (۳-۷)$$

نتایج شکلهای (۳-۵ الف) و (۳-۵ ب) را بترتیب مدارهای معادل تونن و نرنن گویند . اثبات این مطلب مشابه آن است که در مورد مقاومت در بخش ۳-۲ گفته شد . بخصوص اگر منبع ولتاژ v_s در شکل (۳-۵ الف) یک تابع پله واحد باشد، بموجب معادله (۳-۶) منبع جریان i_s در شکل (۳-۵ ب) یک تابع ضربه $C\delta(t)$ میباشد .

تبصره ۳- مجدداً معادله (۳-۴) را در لحظه t و لحظه $t+dt$ در نظر گیرید . از تفاضل آنها بدست میآید که :

$$v(t+dt) - v(t) = \frac{1}{C} \int_t^{t+dt} i(t') dt' \quad (۳-۸)$$

گیریم $i(t)$ برای همه مقادیر t کراندار^(۱) باشد ، یعنی ثابت معینی مانند M وجود

داشته باشد بقسمی که برای همه مقادیر t مورد نظر داشته باشیم ، $|i(t)| \leq M$.
 وقتی که $dt \rightarrow 0$ مساحت زیر شکل موج $i(0)$ در فاصله $[t, t+dt]$ بسمت صفر میل
 میکند . همچنین از معادله (۳-۸) ملاحظه میشود وقتی که dt بسمت صفر میل کند :

$$v(t+dt) \rightarrow v(t)$$

که بنحو دیگر باینصورت بیان میشود که شکل موج ولتاژ $v(0)$ پیوسته است .

بنابراین میتوان یک خاصیت مهم خازن خطی تغییرناپذیر بازمان را چنین بیان نمود :
 « اگر برای همه زمان t در فاصله بسته $[0, T]$ ، جریان $i(0)$ در یک خازن خطی تغییرناپذیر
 با زمان کراندار بماند، ولتاژ v دوسرخازن در فاصله باز $(0, T)$ یک تابع پیوسته میباشد،
 یعنی برای چنین خازنی مادامیکه جریان آن کراندار بماند ولتاژ شاخه نمیتواند بطور
 لحظه ای از یک مقدار به مقدار متفاوت دیگری بجهد (مانند تابع پله) $\propto$. این خاصیت
 در حل مسائلی که در آن پالس یا تابع پله ولتاژ یا جریان به مداری اعمال میشود بسیار مفید
 است و کاربرد آن در فصلهای بعد تشریح خواهد شد .

تمرین آنچه را که در تبصره ۲ بیان شد ثابت کنید .

۳-۲- خازن خطی تغییرپذیر بازمان

اگر خازنی خطی ولی تغییرپذیر بازمان باشد مشخصه آن در هر لحظه خط مستقیم است
 که از مبدا میگذرد ولی شیب آن به زمان بستگی دارد . بنابراین میتوان مقدار بار در لحظه
 t را بر حسب ولتاژ در لحظه t بصورت معادله زیر بیان نمود :

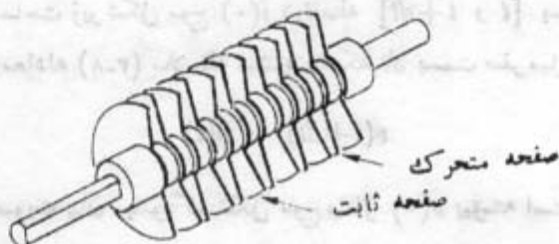
(۳-۹)

$$q(t) = C(t) v(t)$$

که در آن $C(0)$ یک تابع زمان مشخص شده ای است که برای هر t ، شیب مشخصه خازن
 را معین میکند . این تابع $C(0)$ جزو مشخصه خازن خطی تغییرپذیر بازمان میباشد . بنابراین
 معادله (۳-۱) بصورت زیر درمیآید :

(۳-۱۰)

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C(t) \frac{dv}{dt} + \frac{dC}{dt} v(t)$$



شکل ۳-۶ - با چرخانیدن صفحه متحرک بطور مکانیکی، این خازن بصورت خازن تغییرپذیر بازمان درمی‌آید

یک مثال ساده از خازن خطی تغییرپذیر بازمان در شکل (۳-۶) نشان داده شده است که در آن یک خازن با صفحات موازی شامل یک صفحه ثابت و یک صفحه متحرک است. صفحه متحرک بطور مکانیکی و بطور متناوب حرکت داده می‌شود. میتوان ظرفیت این خازن را که بطور متناوب تغییر میکند بصورت یک سری فوریه بیان نمود.

$$(۳-۱۱) \quad C(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(2\pi f_k t + \Phi_k)$$

که در آن f نشان دهنده فرکانس دوران صفحه متحرک است.

در بررسی تقویت کننده‌های^(۱) پارامتری، خازن‌های متغیر متناوب اهمیت اساسی دارند. در بخش بعد یک نوع دیگر از خازن‌های متناوب گفته خواهد شد.

تمرین مدار نشان داده شده در شکل (۳-۷) را در نظر گرفته و فرض کنید ولتاژ ورودی سینوسی و $v(t) = A \cos \omega_1 t$ میباشد که در آن ثابت $\omega_1 = 2\pi f_1$ فرکانس زاویه‌ای است. گیریم خازن خطی تغییرپذیر بازمان بصورت زیر مشخص شده باشد:

$$C(t) = C_0 + C_1 \cos 3\omega_1 t$$

که در آن C_0 و C_1 مقادیر ثابت هستند. جریان $i(t)$ را برای همه مقادیر t تعیین کنید.



شکل ۳-۷- یک خازن خطی تغییرپذیر بازمان که بوسیله منبع ولتاژ مینوسی تحریک میشود .

۳-۳- خازن غیر خطی

دیود و اراکتور^(۱) دستگاهی است که در بیشتر سیستمهای ارتباطی مدرن بعنوان یک عنصر خیلی مهم مدار در دستههای تقویت کننده پارامتری ، نوسان کننده ها^(۲) و مبدل های سیگنال^(۳) بکار میرود . یک دیود و اراکتور را میتوان اساساً بوسیله یک خازن غیر خطی مدل سازی نمود . مدل دقیق ترانزیستور نیز یک خازن غیر خطی در بر دارد . در کاربردهای قطع و وصل^(۴) خیلی سریع اغلب اثر خازن غیر خطی حائز اهمیت بسیار است . در حالت کلی ، تجزیه و تحلیل مدارهایی که شامل عناصر « غیر خطی » میباشد خیلی مشکل تر از مدارهای خطی است . در تجزیه و تحلیل های غیر خطی ، تکنیک های مختلفی که هر یک مناسب حالت خاصی میباشد وجود دارد که در میان آنها و شاید مفیدترین آنها روش « تجزیه و تحلیل سیگنال های کوچک^(۵) » است و این مفهوم اصلی را در مثال زیر معرفی مینمائیم .

مثال یک خازن غیر خطی را که توسط مشخصه اش $q = f(v)$ (مطابق شکل ۳-۸) معین شده است در نظر گرفته و فرض کنید ولتاژ v همانطوریکه در شکل (۳-۹) نشان داده شده مجموع دو جمله باشد ، جمله اول v_1 ، ولتاژ ثابتی است که بوسیله باتری بایاس کننده روی خازن وارد شده (که اغلب بنام « بایاس^(۶) dc » گفته میشود) و جمله دوم v_2 ، یک ولتاژ با تغییر کوچک می باشد . مثلاً v_2 ممکن است ولتاژ کوچکی در قسمت

۱ — Varactor

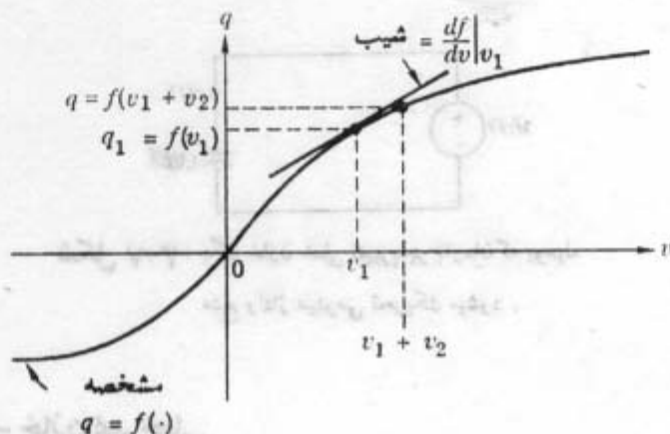
۲ — Oscillator

۳ — Signal converter

۴ — Switching

۵ — Small signal Analysis

۶ — Bias



شکل ۳-۸- مشخصه یک خازن غیرخطی و تقریب میگنال کوچک

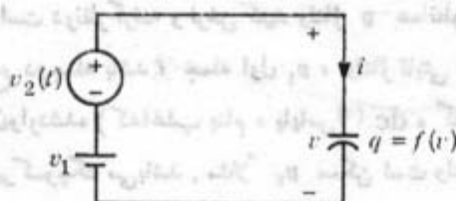
آن در اطراف نقطه کار $(v_1, f(v_1))$

ورودی یک گیرنده باشد. با پیکار بردن بسط سری تیلور داریم:

$$q = f(v) = f(v_1 + v_2)$$

$$(3-12) \quad \approx f(v_1) + \left. \frac{df}{dv} \right|_{v_1} v_2$$

در معادله (۳-۱۲)، ما از جمله‌های مرتبه دوم صرف‌نظر کردیم، اگر v_2 بمقدار کافی کوچک باشد این یک خطای جزئی بی‌ار می‌آورد. بعبارت دقیق‌تر، باید v_2 بقدر کافی کوچک باشد تا قسمتی از مشخصه که با طول $v_1 + v_2$ متناظر می‌باشد توسط قطعه خط مستقیمی که از نقطه



شکل ۳-۹- یک خازن غیرخطی بوسیله ولتاژ v که از مجموع ولتاژ

dc v_1 و ولتاژ با تغییرات کوچک v_2 تشکیل می‌یابد

تغذیه می‌شود.

$(v_1, f(v_1))$ گذشته و دارای شیب $\left. \frac{df}{dv} \right|_{v_1}$ است بطرز خوبی تقریب شده باشد. جریان $i(t)$ از معادله (۳-۱) عبارتست از:

$$(3-13) \quad i(t) = \frac{dq}{dt} = \left. \frac{df}{dv} \right|_{v_1} \frac{dv_1}{dt}$$

که معادله فوق بصورت زیر است:

$$(3-14) \quad i(t) = C(v_1) \frac{dv_1}{dt}$$

توجه کنید که v_1 مقدار ثابتی است و بنابراین از نقطه نظر سیگنالهای کوچک v_1 ، ظرفیت:

$$C(v_1) = \left. \frac{df}{dv} \right|_{v_1}$$

یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان بوده که مساوی شیب مشخصه خازن در نقطه کار آن در صفحه $q-v$ مطابق شکل (۳-۸) میباشد. از اینرو ظرفیت به ولتاژ v_1 ، بستگی دارد.

اگر خازن غیر خطی در تقویت کننده پارامتری بکار برده شود ولتاژ v_1 یک مقدار ثابتی نیست. معهذ v_1 که نمایشگر قسمت تغییرپذیر با زمان است باز هم کوچک فرض میشود تا تقریبی که در نوشتن معادله (۳-۱۲) بکار رفته هنوز معتبر باشد. بنابراین یک تغییر جزئی در تجزیه و تحلیل بالا باید انجام داد.

ولتاژ دوسرخازن مساوی $v_1(t) + v_2(t)$ است و از اینرو بار خازن چنین است:

$$q(t) = f(v_1(t) + v_2(t))$$

و چون $v_2(t)$ برای همه t کوچک است داریم:

$$q(t) \approx f(v_1(t)) + \left. \frac{df}{dv} \right|_{v_1(t)} v_2(t)$$

گیریم:

$$(3-15) \quad q_1(t) \triangleq f(v_1(t))$$

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

۶۰

بار $q_1(t)$ را میتوان بار ناشی از $v_1(t)$ در نظر گرفت. بار باقیمانده:

$$q_2(t) \triangleq q(t) - q_1(t)$$

بطور تقریبی با عبارت زیر داده میشود:

$$q_2(t) \approx \left. \frac{df}{dv} \right|_{v_1(t)} v_2(t) \quad (11-3)$$

بار q_2 متناسب با v_2 بوده و میتوان بعنوان تغییرات بار سیگنال کوچک ناشی از v_2 در نظر

گرفت. چون v_1 یک تابع داده شده‌ای از زمان میباشد، $\left. \frac{df}{dv} \right|_{v_1(t)}$ را میتوان بعنوان

خازن خطی تغییرپذیر با زمان $C(t)$ در نظر گرفت که در آن:

$$C(t) = \left. \frac{df}{dv} \right|_{v_1(t)}$$

بنابراین ما نشان دادیم که در تجزیه و تحلیل‌های سیگنال‌های کوچک، یک خازن غیرخطی

را میتوان بصورت یک خازن خطی تغییرپذیر با زمان مدل‌سازی نمود. این نوع تجزیه و

تحلیل، در درک تقویت‌کننده‌های پارامتری جنبهٔ اساسی دارد.

تمرین خازن غیرخطی که توسط معادله زیر مشخص میشود داده شده است:

$$q = 1 - e^{-v}$$

ظرفیت C متناظر با سیگنال‌های کوچک را که بصورت $\left. \frac{df}{dv} \right|_{v_1}$ در معادله (11-3) تعریف

میشود برای حالت‌های زیر تعیین کنید:

الف - $v_1 = 10$ ولت

ب - $v_1 = 10 + 0.1 \cos \omega_1 t$

فرض کنید که $v_2(t) = 0.1 \cos 10 \omega_1 t$ باشد جریان تقریبی خازن را که از v_2 ناشی

میشود برای هر دو حالت تعیین کنید.

۴- سلف‌ها

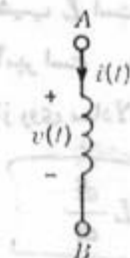
سلف‌ها^(۱) امات اینککه در میدان مغناطیسی خود انرژی ذخیره مینمایند در مدارهای الکتریکی بکار میروند. عنصری که سلف نامیده میشود ایده آل شده یک سلف فیزیکی است. عبارت دقیق تر، یک عنصر دوسر را سلف خواهیم گفت اگر در هر لحظه t از زمان، شار $\Phi(t)$ و جریان $i(t)$ آن در رابطه‌ای که توسط یک منحنی در صفحه Φ تعریف میشود صدق کنند. این منحنی را مشخصه سلف در زمان t نامند. نکته اساسی این است که رابطه‌ای بین مقدار «لحظه‌ای» شار $\Phi(t)$ و مقدار «لحظه‌ای» جریان $i(t)$ وجود دارد. در بعضی حالتها ممکن است مشخصه با زمان تغییر کند. در دیاگرامهای مداری، یک سلف را بطور نمایشی مطابق شکل (۴-۱) نشان میدهند. از آنجائیکه در تئوری مدار، مشخص سازی اساسی یک عنصر دوسر بر حسب جریان و ولتاژ آن انجام میگردد، لازم است که ارتباطی بین شار و ولتاژ شاخه برقرار شود. ولتاژ دوسر یک سلف (که با جهت قراردادی نشان داده شده در شکل (۴-۱) منجیده میشود) مطابق قانون القاء فاراده^(۲) بصورت زیر داده میشود:

(۴-۱)

$$v(t) = \frac{d\Phi}{dt}$$

که در آن v بر حسب ولت و Φ بر حسب وبر^(۳) است.

اکنون مطابقت کیفی رابطه (۴-۱) را با قانون لنز^(۴) بررسی میکنیم. این قانون بیان



شکل ۴-۱- نمایش یک سلف

۱ - Inductors

۲ - Faraday's induction law

۳ - Weber

۴ - Lenz

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

میدارد که نیروی محرکه‌ای که در اثر تغییر شار القاء میشود دارای چنان جهتی است که با علت تغییر شار مخالفت میکند. برای تشریح این مطلب فرض کنید که جریان i اضافه شود، یعنی $\frac{di}{dt} > 0$ ، جریان اضافه شده میدان مغناطیسی اضافی بوجود می‌آورد و بنابراین شار Φ افزوده میشود، یعنی $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ ، و مطابق رابطه $(1-1)$ ، $v(t) > 0$ ، و این بدان معنی است که پتانسیل گره A از پتانسیل گره B بیشتر است و این دقیقاً همان جهت پتانسیل لازم برای مخالفت با افزایش بیشتر جریان را نشان میدهد.

سلفها نیز مانند مقاومتها و خازنها بسته باینکه خطی، غیرخطی، تغییرپذیر با زمان و یا تغییرناپذیر با زمان باشند به چهار نوع تقسیم میشوند. سلفی را تغییرناپذیر با زمان گویند که مشخصهٔ آن با زمان تغییر نکند. سلفی را خطی گویند که در هر لحظه از زمان مشخصهٔ آن خط مستقیمی باشد که از مبدا صفحه Φ بگذرد.

۱-۴- سلف خطی تغییرناپذیر با زمان

بنا به تعریف، مشخصهٔ یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان دارای معادله‌ای بصورت زیر میباشد:

$$\Phi(t) = Li(t) \quad (1-2)$$

که در آن L مقدار ثابتی بوده (نا بسته به i و t) و اندوکتانس^(۱) گفته میشود. مشخصهٔ آن خط مستقیمی به شیب L است که از مبدا میگذرد. واحدهای این معادله برترتیب و بر، هائری^(۲) و آمپر است. معادله‌ای که ولتاژ دوسر سلف و جریان درون آن را بهم ارتباط میدهد باسانی از روی معادلات $(1-1)$ و $(1-2)$ بدست می‌آید و داریم:

$$v(t) = L \frac{di}{dt} \quad (1-3)$$

و اگر از معادله $(1-3)$ بین صفر و t انتگرال بگیریم بدست می‌آید:

$$(t-0) \quad \boxed{i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(t') dt'}$$

گیریم $\Gamma \triangleq \frac{1}{L}$ باشد. Γ را اندوکتانس معکوس^(۱) گویند و داریم:

$$(t-0) \quad \boxed{i(t) = i(0) + \Gamma \int_0^t v(t') dt'}$$

انتگرال موجود در معادلات (۴-۱) و (۴-۵) مساحت خالص زیر منحنی ولتاژ بین زمان صفر و زمان t می باشد. واضح است که مقدار i در لحظه t ، یعنی $i(t)$ ، بمقدار اولیه آن $i(0)$ و همه مقادیر شکل موج ولتاژ $v(0)$ در فاصله زمانی $[0, t]$ بستگی دارد. به این حقیقت، همانطوریکه در مورد خازن ها هم گفته شد، اغلب با گفتن اینکه «سلفها دارای حافظه میباشند» اشاره میشود.

با توجه به معادله (۴-۱) تذکر این موضوع حائز اهمیت است که یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان بعنوان یک عنصر مدار، فقط وقتی کاملاً مشخص میشود که جریان اولیه $i(0)$ و اندوکتانس L (شیب مشخصه آن) داده شده باشد. در همه مطالعات تئوری مدار ما با این واقعیت مهم مواجه خواهیم بود.

بایستی تأکید شود که معادله (۴-۳) یک تابع «خطی» را تعریف میکند که ولتاژ لحظه ای $v(t)$ را برحسب مشتق جریان که در لحظه t حساب شود بیان میدارد. معادله (۴-۴) تابعی را تعریف میکند که جریان لحظه ای $i(t)$ را برحسب $i(0)$ و شکل موج $v(0)$ در فاصله زمانی $[0, t]$ بیان میدارد. توجه به این مطلب حائز اهمیت است که تنها اگر $i(0) = 0$ باشد تابعی که بوسیله معادله (۴-۴) تعریف میشود یک «تابع خطی» است که مقدار جریان i در لحظه t ، یعنی $i(t)$ ، را برحسب شکل موج ولتاژ $v(0)$ در فاصله زمانی $[0, t]$ بدست میدهد.

تمرین ۱. گیریم منبع جریان $i_s(t)$ بیک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

اندوکتانس L و $i(0)=0$ وصل شود. شکل موج ولتاژ $v(t)$ دوسر سلف را برای حالت‌های زیر تعیین کنید:

الف - $i_s(t) = u(t)$

ب - $i_s(t) = \delta(t)$

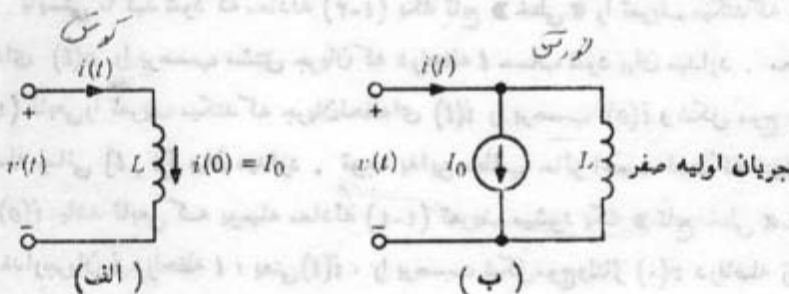
تمرین ۲ گیریم منبع ولتاژ $v_s(t)$ بیک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با اندوکتانس L و $i(0)=0$ وصل شود. شکل موج جریان $i(t)$ در داخل سلف را برای حالت‌های زیر تعیین کنید:

الف - $v_s(t) = u(t)$

ب - $v_s(t) = \delta(t)$

پ - $v_s(t) = A \cos \omega t$ که در اینجا A و ω مقادیر ثابت میباشند.

تبصره ۱-۴ معادله (۴-۴) بیان میکند که در لحظه t ، جریان شاخه $i(t)$ ($t \geq 0$) در یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان از دو جمله تشکیل مییابد. جمله اول جریان $i(0)$ در لحظه $t=0$ ، یعنی جریان اولیه در سلف، و جمله دوم جریان سلف L در لحظه t است بشرطیکه در $t=0$ این سلف دارای جریان اولیه صفر باشد. بنابراین هر سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با جریان اولیه $i(0)$ را میتوان بصورت اتصال موازی یک منبع جریان دائم $I_0=i(0)$ و همان سلف با جریان اولیه صفر در نظر گرفت، بشکل (۴-۲) مراجعه شود. اغلب در فصل‌های بعدی با این نتیجه مفید مواجه خواهیم بود.



شکل ۴-۲ - سلف با جریان اولیه $i(0)=I_0$ در حالت (الف)،

معادل اتصال موازی همان سلف با جریان اولیه صفر و منبع

جریان ثابت I_0 در حالت (ب) می باشد.

تبصره ۲- یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با جریان اولیه صفر، یعنی $i(0) = 0$ را در نظر بگیرید. این سلف بطور موازی با یک منبع جریان دلخواه $i_s(t)$ مطابق شکل (۳-۴) وصل شده است. این اتصال موازی معادل مدار نشان داده شده در شکل (۳-۴) می باشد که در آن همان سلف بطور سری با منبع ولتاژ $v_s(t)$ وصل شده و داریم:

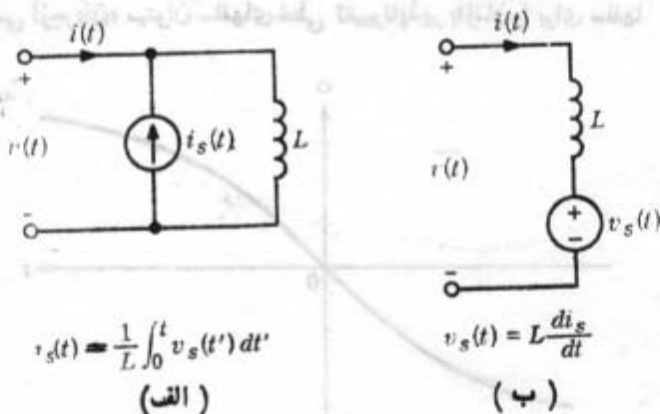
$$\text{مدار سری (۶-۴)} \quad v_s(t) = L \frac{di_s}{dt}$$

منبع جریان $i_s(t)$ در شکل (۳-۴) الف) (بر حسب منبع ولتاژ شکل (۳-۴) ب)) چنین است:

$$\text{مدار سری (۷-۴)} \quad i_s(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_s(t') dt'$$

نتایج شکلهای (۳-۴) الف و ب) را بترتیب مدارهای معادل نرتن و تونن گویند. به خصوص اگر $i_s(t)$ در شکل (۳-۴) الف) تابع پله واحد باشد منبع ولتاژ $v_s(t)$ در شکل (۳-۴) ب) تابع ضربه $\delta(t)$ خواهد بود.

تبصره ۳- با تکرار استدلالی مشابه آنچه که در مورد خازنها بکار رفت میتوان در مورد سلف ها هم، خاصیت مهم زیر را نتیجه گیری نمود: «اگر برای همه زمانها درفاصله بسته $[0, t]$ ، ولتاژ v دوسر یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان کراندار بماند، جریان i



شکل ۳-۴- مدارهای معادل نرتن (الف) و تونن (ب) برای سلف با یک منبع

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

در فاصله زمانی باز $(0, t)$ یک تابع پیوسته می‌باشد «، یعنی مادامیکه ولتاژ دوسریک سلف کراندار همانند جریان داخل آن سلف نمی‌تواند بطور لحظه‌ای از یک مقدار به مقدار متفاوتی بجهد.

۴-۲ سلف خطی تغییرپذیر بازمان

اگر سلفی خطی ولی تغییرپذیر با زمان باشد، مشخصهٔ آن در هر لحظه، خط مستقیمی است که از مبدا گذشته و شیب آن تابعی از زمان است. شار برحسب جریان بصورت زیر بیان میشود:

(۴-۸)

$$\Phi(t) = L(t) i(t)$$

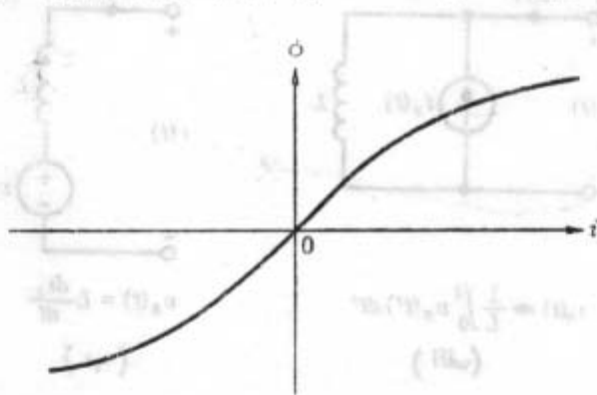
که در آن $L(0)$ یک تابع معینی از زمان می‌باشد. در واقع تابع $L(0)$ جزو مشخصه سلف تغییرپذیر بازمان است. معادله (۴-۱) بصورت زیر درمی‌آید:

(۴-۹) سلف خطی تغییرپذیر

$$v(t) = L(t) \frac{di}{dt} + \frac{dL}{dt} i(t)$$

۴-۳ سلف غیر خطی

اغلب سلفهای فیزیکی دارای مشخصه‌های غیرخطی هستند و فقط برای دامنه تغییرات خاصی از جریان، میتوان سلفهای خطی تغییرناپذیر بازمان را برای سلفها مدل قرار



شکل ۴-۴ - مشخصه یک سلف غیر خطی

داد. مشخصه نوعی یک سلف فیزیکی در شکل (۴-۱) نشان داده شده است. برای جریانهای زیاد شار به حالت اشباع میرسد، یعنی وقتی که جریان خیلی زیاد میشود شار به مقدار خیلی کم افزایش مییابد.

مثال گیریم مشخصه یک سلف غیرخطی تغییرناپذیر با زمان را بتوان بصورت زیر نمایش داد:

$$\Phi = \tanh i$$

جریان داخل سلف، سینوسیوئید $i(t) = A \cos \omega t$ میباشد. ولتاژ دوسر سلف را حساب کنید. شار سلف عبارتست از:

$$\Phi(t) = \tanh(A \cos \omega t)$$

و از رابطه (۴-۱) داریم:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d}{dt} \Phi(i(t)) = \frac{d\Phi}{di} \bigg|_{i(t)} \frac{di}{dt} \\ &= \frac{d \tanh i}{di} \bigg|_{i(t)} \frac{d A \cos \omega t}{dt} = \frac{1}{\cosh^2(A \cos \omega t)} (-A\omega \sin \omega t) \end{aligned}$$

و نتیجه میگیریم که:

$$v(t) = -A\omega \frac{\sin \omega t}{\cosh^2(A \cos \omega t)}$$

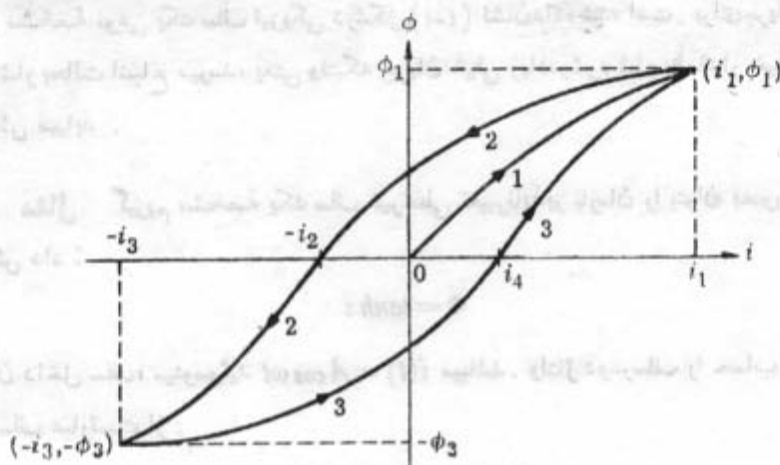
بنابراین با معلوم بودن دامنه A و فرکانس زاویه ای ω ، جریان و ولتاژ دوسر سلف بصورت تابعی از زمان کاملاً مشخص میشوند.

۴-۴ پس ماند

نوع خاصی از سلف غیرخطی مانند سلف با هسته فرومغناطیسی^(۱) مشخصه ای دارد که «پدیده پس ماند»^(۲) را نشان میدهد. مشخصه پس ماند بر حسب منحنی شار و جریان

۱ - Ferromagnetic - core

۲ - Hysteresis phenomenon



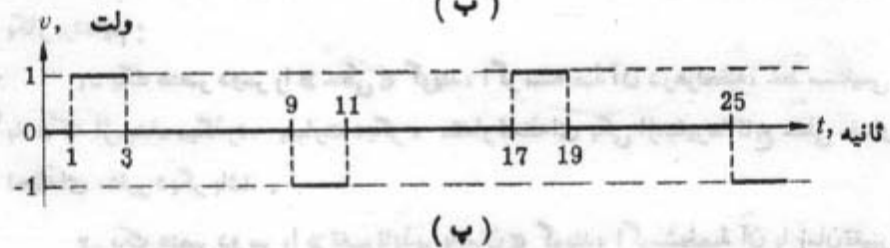
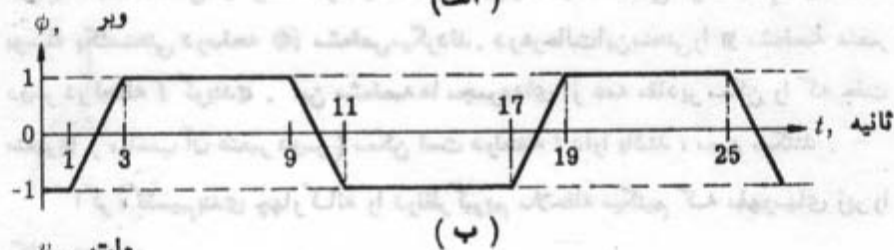
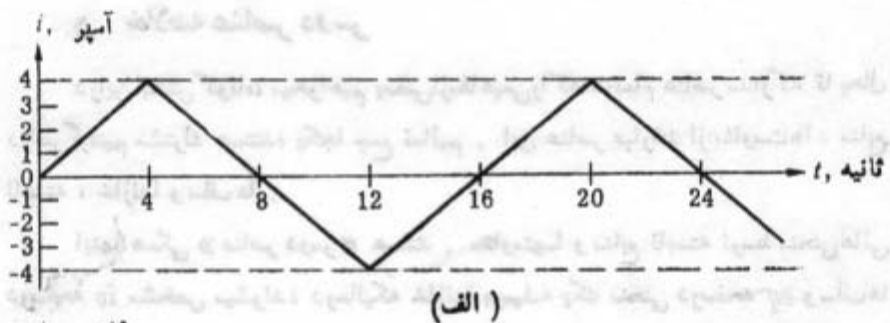
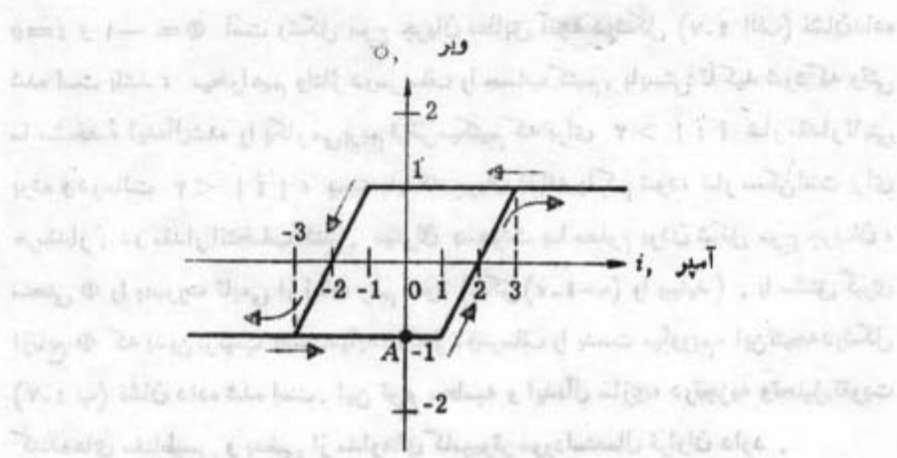
شکل ۵-۴- پدیده پس ماند

در شکل (۵-۴) نشان داده شده است. فرض کنید از مبدأ صفحه Φ شروع نموده و جریان را بتدریج افزایش دهیم شار مطابق منحنی ۱ زیاد میشود. اگر پس از رسیدن به نقطه (i_1, Φ_1) جریان را کاهش دهیم، شار بجای اینکه منحنی ۱ را بطور معکوس طی کند روی منحنی ۲ قرار میگیرد و وقتی که جریان به نقطه i_2 میرسد شار بالاخره مساوی صفر میشود، و اگر پس از رسیدن به نقطه $(-i_3, -\Phi_3)$ جریان را دوباره افزایش دهیم شار منحنی ۳ را طی میکند و وقتی که جریان به مقدار مثبت i_4 میرسد مقدار شار صفر میگردد.

تعریفی که برای سلف بعنوان یک عنصر مدار دادیم حالتی را که سلف فیزیکی پدیده پس ماند را نشان دهد شامل نمیشد زیرا وقتی که بطور دقیق صحبت شود مشخصه نشان داده شده در شکل (۵-۴) یک منحنی نیست. تا آنجا که میدانیم هیچ طریق مؤثری برای توصیف پدیده کمپس ماند وجود ندارد، معذرا ما در مثال زیر نشان میدهم که چگونه با ایده آل سازی مناسب و برای نوع معینی از شکل موج جریان، تعیین ولتاژ دوسر سلفی که پدیده پس ماند را نشان میدهد ساده میباشد.

مثال گیریم یک سلف غیرخطی دارای مشخصه پس ماند ایده آل شده مطابق شکل

(۵-۶) بوده و فرض میکنیم نقطه کار در لحظه صفر در نقطه A روی مشخصه باشد که در آن



شکل ۴-۷ - شکل موجهای i ، v و Φ برای یک سلف غیر خطی که مشخصه پسماند آن در شکل (۴-۶) نشان داده شده است.

نظریه^۲ اساسی مدارها و شبکه‌ها

$i=0$ و $\Phi = -1$ است و شکل موج جریان مطابق آنچه در شکل (۷-۴ الف) نشان داده شده است باشد، میخواهیم ولتاژ دوسر سلف را حساب کنیم. بایستی تأکید شود که وقتی ما مشخصه ایده‌آل شده را بکار می‌بریم فرض میکنیم که برای $|i| > 3$ شار مقدار ثابتی بوده و در حالت $|i| < 3$ ، بسته باینکه جریان اضافه یا کم شود، شار ممکن است برای هر مقدار i دو مقدار انتخاب کند. میتوان به‌سبب این معلوم بودن شکل موج جریان، منحنی Φ را بصورت تابعی از زمان رسم نمود (شکل (۷-۴ ب) را ببینید). با مشتق‌گیری از تابع Φ که بدین ترتیب بدست می‌آید، ولتاژ دوسر سلف را بدست می‌آوریم. این نتیجه در شکل (۷-۴ پ) نشان داده شده است. این نوع محاسبه و ایده‌آل سازی، در تجزیه و تحلیل تقویت کننده‌های مغناطیسی و بعضی از مدارهای کامپیوتر مورد استعمال فراوان دارد.

۵. خلاصه عناصر دوسر

در این بخش کوتاه، میخواهیم بعضی از مفاهیمی را که در تمام عناصر مدار که تا بحال در نظر گرفتیم مشترک هستند، یکجا جمع نمائیم. این عناصر عبارتند از مقاومت‌ها، منابع ناپسته، خازنها و سلف‌ها.

اینها همگی «عناصر دوسر» هستند. مقاومتها و منابع ناپسته توسط منحنی‌هایی در صفحه $i-v$ مشخص میشوند، در حالیکه خازنها بوسیله یک منحنی در صفحه $q-v$ و سلف‌ها بوسیله یک منحنی در صفحه $\Phi-i$ مشخص میگردند. در هر حالت این منحنی را «مشخصه عنصر دوسر در لحظه t گویند». این مشخصه‌ها مجموعه‌ای از همه مقادیر ممکن را که جفت متغیرها (مناسب آن عنصر دوسر) ممکن است در لحظه t دارا باشند، معین میکنند.

اگر، تقسیم‌بندی چهارگانه را در نظر گیریم ملاحظه میکنیم که مفهومیهای زیر را بکار برده‌ایم:

۱- یک عنصر دوسر را «خطی» گویند، اگر مشخصه آن در هر لحظه، خط مستقیمی باشد که از مبدأ می‌گذرد. بعبارت دیگر، مقدار لحظه‌ای یکی از متغیرها تابع خطی مقدار لحظه‌ای متغیر دیگر باشد.

۲- یک عنصر دوسر را «تغییرناپذیر با زمان» گویند، اگر مشخصه آن با زمان تغییر نکند، و بالتجیه یک عنصر دوسر را «خطی تغییرناپذیر با زمان» گویند، اگر این عنصر هم خطی و هم تغییرناپذیر با زمان باشد، و بنابه تعریف این بدین معنی است که مشخصه آن

خط مستقیم ثابتی است که از مبدا میگذرد. این مشخصه بوسیله یک عدد یعنی شیب آن کاملاً مشخص میشود.

در جدول (۱ - ۲) عبارتهای جبری معین کننده مشخصه ها و معادلات ارتباط دهنده ولتاژ و جریان برای هر یک از عناصر دوسر داده شده است. چنانکه قبلاً گفته شد، خازنهای فیزیکی معمولی دارای یک مشخصه vq است که بطور یکوا افزایش می یابد و بنابراین مقدار لحظه ای بار $q(t)$ را میتوان همیشه توسط یک تابع تک آرز بر حسب مقدار لحظه ای ولتاژ $v(t)$ بیان نمود. بنابراین اگر خازنی تغییرناپذیر با زمان باشد میتوان مشخصه آنرا بصورت $q=f(v)$ نوشت و اگر خازن تغییرپذیر با زمان باشد بصورت:

$$q(t)=f(v(t), t)$$

نوشت. اگر پدیده پس ماند را در نظر نگیریم، میتوان توضیحات مشابهی هم برای سلفها بیان نمود. برای سلفهای تغییرناپذیر با زمان، میتوان مشخصه را همواره بصورت $\Phi=f(i)$ و برای حالت تغییرپذیر با زمان بصورت $\Phi(t)=f(i(t), t)$ نوشت.

در مورد مقاومتها وضع پیچیده تری وجود دارد. با مراجعه به شکل (۹-۱) ملاحظه میشود که مشخصه یک دیود تونلی را میتوان بوسیله معادله ای بشکل $i=f(v)$ نوشت که در آن f یک تابع تک آرز میباشد. در واقع برای هر مقدار ولتاژ v ، مشخصه یک ولتاژ یک مقدار برای جریان لحظه ای i مجاز میدارد. چنین مقاومتی را «کنترل شده با ولتاژ» گویند. از طرف دیگر، اگر بشکل (۱۰-۱) مراجعه کنیم ملاحظه میکنیم که مشخصه یک حباب گازدار دارای این خاصیت است که برای هر مقدار جریان i ، مشخصه یک و تنها یک مقدار برای v مجاز میدارد و داریم $v=f(i)$ ، که در آن f یک تابع تک آرز میباشد. چنین مقاومتی را «کنترل شده با جریان» گویند. بعضی مقاومتها مانند دیود ایده آل، نه کنترل شده با جریان و نه کنترل شده با ولتاژ هستند. اگر $v=0$ باشد، جریان میتواند هر مقدار نامنفی را داشته باشد (از اینرو نمیتواند مقاومت کنترل شده با ولتاژ باشد) و اگر $i=0$ باشد ولتاژ میتواند هر مقدار نامنفی را داشته باشد (از اینرو نمیتواند مقاومت کنترل شده با جریان باشد). یک مقاومت خطی بشرطیکه $0 < R < \infty$ باشد، هم کنترل شده با ولتاژ و هم کنترل شده با جریان میباشد.

جدول ۲-۱ خلاصهٔ طبقه‌بندی چهار صفت عناصر دوسر

	خطی		غیر خطی	
	تغییر ناپذیر با زمان	تغییر پذیر با زمان	تغییر ناپذیر با زمان	تغییر پذیر با زمان
مقاومتها	$v(t) = R i(t)$ $i(t) = G v(t)$ $R = 1/G$	$v(t) = R i(t)$ $i(t) = G v(t)$ $R(t) = 1/G(t)$	$v(t) = f(i(t))$ Current-controlled $i(t) = g(v(t))$ Voltage-controlled	$v(t) = f(i(t), t)$ Current-controlled $i(t) = g(v(t), t)$ Voltage-controlled
خازنها	$q(t) = C v(t)$ $i(t) = C \frac{dv}{dt}$ $v(t) = v(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$	$q(t) = C(t) v(t)$ $i(t) = \frac{dC}{dt} v(t) + C(t) \frac{dv}{dt}$	$q(t) = f(v(t))$ $i(t) = \frac{df}{dv} \bigg _{v(t)} \frac{dv}{dt}$	$q(t) = f(v(t), t)$ $i(t) = \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial t} \bigg _{v(t)} \frac{dv}{dt}$
سلفها	$\phi(t) = L i(t)$ $v(t) = L \frac{di}{dt}$ $i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau) d\tau$	$\phi(t) = L(t) i(t)$ $v(t) = \frac{dL}{dt} i(t) + L(t) \frac{di}{dt}$	$\phi(t) = f(i(t))$ $v(t) = \frac{df}{di} \bigg _{i(t)} \frac{di}{dt}$	$\phi(t) = f(i(t), t)$ $v(t) = \frac{\partial f}{\partial i} + \frac{\partial f}{\partial t} \bigg _{i(t)} \frac{di}{dt}$

۶- توان و انرژی

در درس فیزیک یاد گرفتیم که یک مقاومت هیچگونه انرژی ذخیره نکرده بلکه انرژی الکتریکی را جذب میکند، اما یک خازن در میدان الکتریکی خود، و یک سلف در میدان مغناطیسی خود انرژی ذخیره مینمایند. در این بخش، توان^(۱) و انرژی^(۲) را از نقطه نظری که برای مدارهای فشرده بسیار راحت باشد مورد بحث قرار خواهیم داد.

در بررسی مدارهای فشرده، تا بحال توجه خود را به عناصر دوسر متمرکز کرده ایم. حال میخواهیم بررسی وسیعتری انجام دهیم. فرض کنید مداری در اختیار داشته و دوسیم از این مدار بیرون آورده و آنرا به مدار دیگری که مولد^(۳) مینامیم وصل کنیم (به شکل (۶-۱) مراجعه شود). مثلاً مداری که با آن شروع میکنیم ممکن است یک بلندگو باشد که آنرا بدوسر کابلی که از یک تقویت کننده قدرت بیرون آمده وصل کنیم. بنابراین تقویت کننده قدرت بعنوان یک مولد در نظر گرفته میشود. مداری را که در نظر گرفته ایم **مدار دوسر**^(۴) خواهیم گفت، زیرا از نقطه نظری، فقط ولتاژ و جریان دوسر آن و انتقال توانی که در این سراها انجام میگردد مورد توجه است.

در اصطلاح جدید، یک مدار دوسر را **یک قطبی**^(۵) گویند. لفظ «یک قطبی» در اینجا کاملاً مناسب است زیرا منظور از **قطب**، یک جفت از سرهای یک مدار است که در آن، در هر لحظه از زمان، جریان لحظه ای که وارد یکی از این سرها میشود مساوی جریان لحظه ای است که از سر دیگر خارج میشود. این واقعیت در شکل (۶-۱) تشریح شده است. توجه کنید که جریان $i(t)$ که وارد سربلانی یک قطبی $\mathcal{N}$ میشود مساوی جریان $i(t)$ است که از سربانی یک قطبی $\mathcal{N}$ خارج میشود. جریان $i(t)$ را که وارد قطب میشود **جریان قطب** و ولتاژ $v(t)$ دوسر قطب را **ولتاژ قطب** گویند. در نظریه مدارها، مفهوم قطب بسیار حائز اهمیت است و وقتی که کلمه یک قطبی را بکار میبریم، میخواهیم نشان دهیم که فقط ولتاژ و جریان قطب مورد توجه ما است. سایر متغیرهای شبکه که مربوط به عناصر داخل یک قطبی است قابل دسترس نیستند. وقتی که شبکه $\mathcal{N}$ را به عنوان یک قطبی در نظر

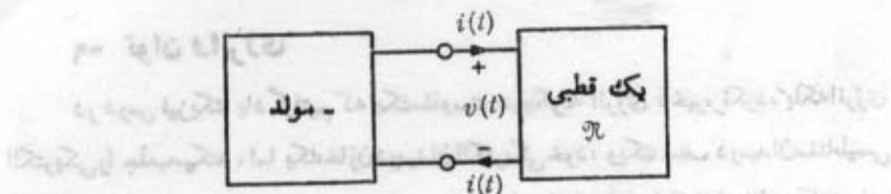
۱ - Power

۲ - Energy

۳ - Generator

۴ - Two Terminal

۵ - One port



شکل ۶-۱- توان لحظه‌ای که در زمان t وارد یک قطبی

$\mathcal{N}$ میشود مساوی $p(t) = v(t) i(t)$ است

میگیریم، تا آنجائیکه مورد توجه ما است، منظور از قطب، یک جفت سیمی است که از یک جعبه سیاه^(۱) بیرون آمده باشد. این جعبه بدان جهت سیاه گفته میشود که ما مجاز نیستیم محتویات داخل آنرا ببینیم! با بخاطر سپردن این مفهوم، واضح است که مقاومتها، منابع ولتاژ ناپسته، خازنها و سلفها مثالهای ساده و خاصی از «یک قطبی‌ها» هستند که فقط از یک عنصر تشکیل می‌یابند.

یک مطلب اساسی فیزیک این است که توان لحظه‌ای «که وارد یک قطبی میشود مساوی حاصلضرب ولتاژ قطب در جریان قطب است»، بشرطیکه جهت‌های قراردادی ولتاژ قطب و جریان قطب، جهت‌های قراردادی متناظر نشان داده شده در شکل (۶-۱) باشند. گیریم $p(t)$ نشان دهنده توان لحظه‌ای (برحسب وات^(۲)) باشد که در زمان t توسط مولد به یک قطبی تحویل داده میشود. در اینصورت:

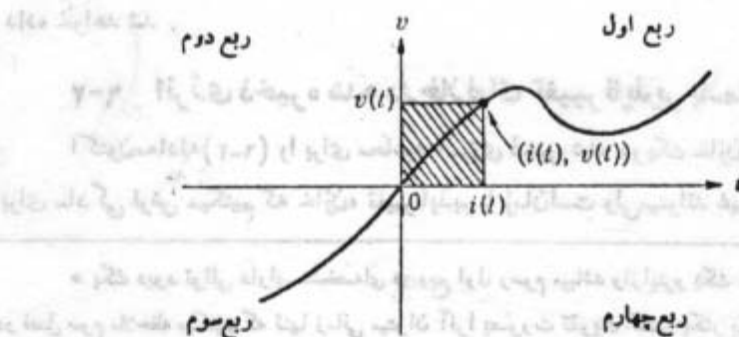
$$(۶-۱) \quad p(t) = v(t) i(t)$$

که در آن v برحسب ولت و i برحسب آمپر است. چون انرژی (برحسب ژول^(۳)) انتگرال توان (برحسب وات) میباشد، نتیجه میشود که «انرژی تحویل داده شده» «مولد به یک قطبی از t_0 تا زمان t عبارتست از»:

$$(۶-۲) \quad W(t_0, t) \triangleq \int_{t_0}^t p(t') dt' = \int_{t_0}^t v(t') i(t') dt'$$

۶-۱ توان ورودی به يك مقاومت - پسیو بودن

از آنجائیکه يك مقاومت بوسیله يك منحنی در صفحه $i-v$ (یا صفحه $i-v$) مشخص میشود، هرگاه «نقطه کار» $(i(t), v(t))$ در روی مشخصه معین شود، توان لحظه‌ای که در زمان t وارد مقاومت میشود بطور یکتائی معین میگردد. توان لحظه‌ای مساوی مساحت مستطیلی است که توسط نقطه کار و محورهای صفحه $i-v$ مطابق شکل (۶-۲) تشکیل میشود. هرگاه نقطه کار در ربع اول یا سوم باشد (بنابراین $i v > 0$)، توان وارد شده به مقاومت مثبت است، یعنی مقاومت از دنیای خارج توان دریافت مینماید. اگر نقطه کار در ربع دوم یا چهارم باشد (بنابراین $i v < 0$) توانی که وارد مقاومت میشود منفی است یعنی مقاومت از دنیای خارج توان تحویل میدهد. از این جهت، اگر برای هر لحظه t از زمان، مشخصه مقاومتی در ربع اول و سوم قرار گیرد این مقاومت را پسیو^(۱) گویند. در اینجا ربع‌های اول و سوم محورهای i و v را نیز شامل میشود. محدودیت هندسی مشخصه يك مقاومت پسیو معادل این است که در هر لحظه از زمان، صرف نظر از شکل موج جریانی که از داخل آن میگذرد $p(t) \geq 0$ میباشد. این خاصیت اساسی مقاومت‌های پسیو است. «يك مقاومت پسیو هیچوقت بدنیای خارج توانی تحویل نمیدهد». بسادگی میتوان



شکل ۶-۲- توانی که در زمان t وارد مقاومت میشود مساوی

$$i(t)v(t) \text{ است}$$

ملاحظه کرد که یک دیود ژرمانیوم و یک دیود تونلی*، یک مدار باز، یک مدار اتصال کوتاه و یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان با $R \geq 0$ مقاومتهای پسیو هستند.

مقاومتی را که پسیو نباشد اکتیو^(۱) گویند مثلاً «هرمنیج ولتاژ» (که در آن v متحد با صفر نباشد) و «هرمنیج جریان» (که در آن i متحد با صفر نباشد) یک مقاومت اکتیو است زیرا که مشخصه آن در هر لحظه، سوازی محور i ها یا محور v ها می باشد و بنابراین به ربع های اول و سوم محدود نشده است. تذکر این نکته قابل توجه است که برای یک «مقاومت خطی» (تغییرپذیر با زمان یا تغییرناپذیر با زمان) «اگر و تنها اگر، برای بعضی از زمان t رابطه $R(t) < 0$ برقرار باشد اکتیو است». دلیل این موضوع این است که مشخصه یک مقاومت خطی، خط مستقیمی است که از مبدأ گذشته و شیب آن مساوی مقاومت R می باشد، از اینرو اگر $R < 0$ باشد مشخصه در ربع های دوم و چهارم قرار میگیرد. از اینجاست نتیجه میشود که اگر جریانی از داخل این مقاومت بگذرد (مثلاً توسط یک منبع جریان) و $R(t) < 0$ باشد، مقاومت به دنیای خارج توانی بعیزان $i'(t)$ یا $R(t)$ و ات تحویل میدهد. حقیقت این است که بندرت میتوان یک عنصر فیزیکی پیدا نمود که مانند یک مقاومت خطی اکتیو طبق تعریف بالا رفتار نماید، مع هذا مدل یک مقاومت خطی اکتیو حائز اهمیت است زیرا یک مقاومت غیرخطی مانند دیود تونلی در تجزیه و تحلیل سیگنالهای کوچک بصورت یک مقاومت خطی اکتیو رفتار مینماید و این مطلب در فصل بعد توضیح داده خواهد شد.

۶-۲ انرژی ذخیره شده در خازنهای تغییرناپذیر با زمان

اکنون معادله (۶-۲) را برای محاسبه انرژی ذخیره شده در یک خازن بکار میبریم. برای سادگی فرض میکنیم که خازن، تغییرناپذیر با زمان است ولی میتواند غیرخطی باشد**.

* یک دیود تونلی دارای مشخصه ای در ربع اول و سوم میباشد و از اینرو یک عنصر پسیو است. در فصل سوم ملاحظه میکنیم که تنها زمانی میتوان آنرا بصورت تقویت کننده بکار برد که یک عنصر اکتیو خارجی به آن وصل شود. در عمل، این کار توسط یک مدار با پاس کننده که شامل یک باتری است انجام میگردد.

** انرژی ذخیره شده در خازنها و سلفهای تغییرپذیر با زمان مستلزم محاسبات دقیقی است.

محاسبه آنها در فصل ۱۹ انجام خواهد شد.

فرض کنید یک قطبی شکل (۱ - ۶) که به یک مولد وصل است یک خازن باشد .
جریان درون خازن عبارتست از :

$$(۱ - ۳) \quad i(t) = \frac{dq}{dt}$$

گیریم مشخصه خازن بوسیله تابع $\hat{v}(0)$ توصیف شده باشد یعنی :

$$(۱ - ۴) \quad v = \hat{v}(q)$$

بنابراین انرژی که از زمان t_0 تا t توسط مولد به خازن تحویل داده میشود عبارتست از :

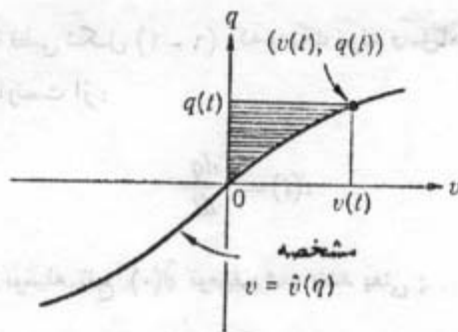
$$(۱ - ۵) \quad W(t_0, t) = \int_{t_0}^t v(t') i(t') dt' = \int_{q(t_0)}^{q(t)} \hat{v}(q_1) dq_1$$

برای بدست آوردن معادله (۱ - ۵) ابتدا معادله (۱ - ۳) را بکار برده و طبق آن نوشتیم:

$$i(t') dt' = dq_1$$

که در آن q_1 ، متغیر ساختگی انتگرال گیری و نشان دهنده بار الکتریکی میباشد .
معادله (۱ - ۴) را برای بیان ولتاژ $v(t')$ بصورت مشخصه خازن یعنی تابع $\hat{v}(0)$ بر حسب متغیر انتگرال گیری q_1 بکار بردیم ، و بنابراین حدهای پائین و بالای انتگرال گیری هم متعاقباً از t_0 به $q(t_0)$ و از t به $q(t)$ تغییر کردند . حال فرض میکنیم که بار اولیه خازن صفر باشد، یعنی $q(t_0) = 0$. بکار بردن حالت بدون بار خازن بعنوان حالتی که متناظر با انرژی ذخیره شده صفر در خازن باشد کاملاً طبیعی است . از آنجائیکه خازن فقط انرژی ذخیره نموده و هیچگونه انرژی اتلاف نمینماید، نتیجه میگیریم که انرژی ذخیره شده در زمان t ، یعنی $\mathcal{E}_E(t)$ مساوی انرژی $W(t_0, t)$ است که از زمان t_0 تا t توسط مولد به خازن تحویل داده شده است . بنابراین انرژی ذخیره شده در خازن از روی رابطه (۵ - ۱) بدست میآید :

$$(۱ - ۶) \quad \mathcal{E}_E(t) = \int_0^{q(t)} \hat{v}(q_1) dq_1$$



شکل ۳-۶ - سطح هاشورخورده انرژی ذخیره شده در زمان t

در یک خازن را نشان می‌دهد.

بر حسب مشخصه خازن در صفحه vq ، مساحت هاشورخورده در شکل (۳ - ۶) انرژی ذخیره شده را نشان می‌دهد (توجه کنید که در این شکل q محور عرضها و v محور طولها میباشد و بنابراین انتگرال (۶ - ۶) سطح هاشورخورده «بالای» منحنی را نشان می‌دهد). واضح است که اگر مشخصه از مبدا صفر vq گذشته و در ربع‌های اول و سوم قرار گیرد، انرژی ذخیره شده همیشه نامنفی است. هرگاه انرژی ذخیره شده در یک خازن همیشه نامنفی باشد خازن را پسیو گویند. برای یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان، معادله مشخصه بصورت زیر است:

(۶ - ۷)

$$q = Cv$$

که در آن C ثابتی است که به t و v بستگی ندارد. معادله (۶ - ۶) تبدیل به عبارت آشنای زیر میگردد:

$$(۶ - ۸) \quad \mathcal{E}_E(t) = \int_0^{q(t)} \frac{q_1}{C} dq_1 = \frac{1}{C} \frac{q^2(t)}{2} = \frac{1}{2} C v^2(t)$$

بنابراین خازن خطی تغییرناپذیر با زمان وقتی پسیو است که ظرفیت آن نامنفی باشد و زمانی اکتیو است که ظرفیت آن منفی باشد. یک خازن اکتیو انرژی منفی ذخیره می‌نماید، یعنی به خارج انرژی تحویل می‌دهد. البته این عمل از لحاظ فیزیکی تحقق پذیر نیست. معینا میتوان در یک فاصله کار کوچک و باند باریکی از فرکانس، بوسیله مدارهای

الکترونیکی که بطور مناسبی طرح شده باشند یک خازن با ظرفیت منفی تهیه نمود .
در فصل ۱۹ خواهیم دید که یک خازن خطی تغییرپذیر با زمان حتی اگر $C(t)$ برای تمام t مثبت باشد ممکن است اکتیو باشد .

۶-۳ انرژی ذخیره شده در سلفهای تغییرناپذیر با زمان

محاسبه انرژی ذخیره شده در یک سلف، مشابه محاسباتی است که در مورد خازن انجام گرفت و در واقع اگر در محاسبات قبلی متغیرها را بطور مناسبی تغییر دهیم (i را به v ، q را به Φ و v را به i تبدیل کنیم) نتایج متناظر را برای یک سلف بدست میآوریم. این عمل که جنبه ای از روش دوگانی^(۱) است در نظریه مدار اهمیت زیادی دارد. بحث دوگانی بعداً با تشریح کافی بررسی خواهد شد.

قانون فاراده در مورد یک سلف بیان میکند که :

$$(۶-۹) \quad v(t) = \frac{d\Phi}{dt}$$

گیریم مشخصه سلف بوسیله تابع $\hat{i}(0)$ توصیف شده باشد یعنی :

$$(۶-۱۰) \quad i = \hat{i}(\Phi)$$

فرض کنید که سلف یک قطبی ای باشد که مطابق شکل (۶-۱) به مولد وصل شده است در این صورت انرژی تحویل داده شده به سلف بوسیله مولد از زمان t_0 تا t عبارتست از :

$$(۶-۱۱) \quad W(t_0, t) = \int_{t_0}^t v(t') i(t') dt' = \int_{\Phi(t_0)}^{\Phi(t)} \hat{i}(\Phi) d\Phi$$

برای بدست آوردن (۶-۱۱) معادله (۶-۹) را بکار برده و نوشتیم :

$$v(t') dt' = d\Phi$$

که در آن متغیر ساختگی انتگرال Φ ، شار را نشان میدهد. برای بیان جریان بر حسب

نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

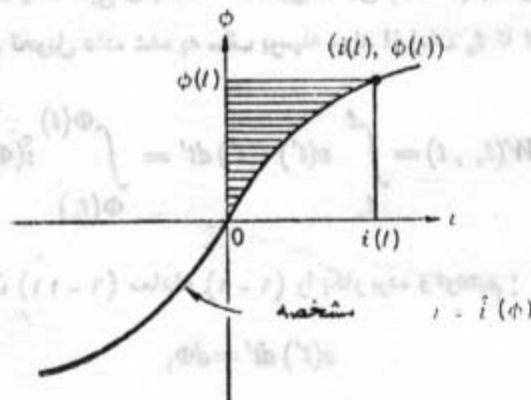
شار معادله (۶-۱۰) بکار رفت. روش عمل، مشابه روش بدست آوردن معادله (۶-۵) می‌باشد. فرض کنید که شار اولیه صفر باشد یعنی $\Phi(t_0) = 0$. مجدداً انتخاب این حالت سلف، متناظر با حالتی است که انرژی ذخیره شده مساوی صفر باشد و با مشاهده اینکه یک سلف فقط انرژی ذخیره کرده و هیچگونه انرژی تلف نمی‌کند، نتیجه می‌گیریم که انرژی مغناطیسی ذخیره شده در زمان t یعنی $\mathcal{E}_M(t)$ مساوی انرژی تحویل داده شده $W(t_0, t)$ مولد به سلف از زمان t_0 تا t می‌باشد و بنابراین انرژی ذخیره شده در سلف عبارتست از:

$$(۶-۱۲) \quad \mathcal{E}_M(t) = \int_0^{\Phi(t)} i(\Phi_1) d\Phi_1$$

سطح هاشور زده شکل (۶-۴)، انرژی ذخیره شده در سلف را بر حسب مشخصه آن در صفحه $i\Phi$ نمایش می‌دهد و بطریق مشابه، اگر مشخصه صفحه $i\Phi$ از مبدا گذشته و در ربع‌های اول و سوم قرار گیرد انرژی ذخیره شده همیشه نامنفی است. اگر انرژی ذخیره شده یک سلف همیشه نامنفی باشد آنرا پسیو گویند. یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان دارای مشخصه‌ای بصورت زیر می‌باشد.

(۶-۱۳)

$$\Phi = Li$$



شکل ۶-۴ - سطح هاشور خورده انرژی ذخیره شده در زمان t

در سلف را نشان می‌دهد

که در آن L ثابتی است که به i و t بستگی ندارد. از اینرو معادله (۱۲ - ۶) به صورت
آشنای زیر متجر میشود:

$$(۱۴-۶) \quad \mathcal{E}_M(t) = \int_0^{\Phi(t)} \frac{\Phi_1}{L} d\Phi_1 = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2(t)}{L} = \frac{1}{2} Li^2(t)$$

و بنابراین یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان وقتی پسو است که اندوکتانس آن نامنفی باشد و زمانی اکتیو است که اندوکتانس آن منفی باشد.

۷- عناصر فیزیکی در مقابل اجزاء مدار

چنانکه در ابتدای این فصل بیان شد اجزاء مدار که تعریف آنها داده شد، مدلهای مداری با مشخصه های ساده ولی دقیق هستند. این مدلهای مداری مشابه ذره و جسم سخت یک فیزیکدان می باشند. مدلهای مداری در تجزیه و تحلیل و ترکیب مدارها و سیستمهای فیزیکی ضروری هستند هر چند باید دانست که «اجزاء فیزیکی» مانند مقاومتهای فیزیکی (که باید از مقاومتهای مدلی متمایز شوند)، دیودها، سیم پیچ ها و ظرفیت ها که ما با آنها در آزمایشگاه سروکار داشته یا آنها را در مدارهای عملی بکار میبریم فقط میتوانند توسط مدلهای مداری ما تقریب شوند. علم مهندسی برخلاف ریاضیات موضوع دقیقی نیست و تقریباً در حل تمام مسائل بکار بردن تقریب لازم و اساسی است. مسأله اساسی شناختن مدل مناسب و بکار بردن تقریب معتبر در حل مسائل است.

در این بخش به بحث مختصری درباره مسأله مدل سازی بعضی از عناصر فیزیکی که معمولاً بکار میروند می پردازیم. بسیاری از عناصر فیزیکی را میتوان، کم و بیش دقیق، با مشخصه اصلی فیزیکی آنها مدل سازی کرد. مثلاً یک ظرفیت با صفحات موازی را در شرایط عادی کار (که شرح داده خواهد شد)، میتوان با یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان مدل نمود. در فرکانسهای پائین میتوان یک دیود پیوندی را بعنوان یک مقاومت غیرخطی در نظر گرفته و سپس آنرا به صورت ترکیبی از یک دیود ایده آل و مقاومت خطی تقریب نمود. معهذاً در بکار بردن این عناصر بایستی متوجه شویم که تحت چه شرایطی این مدلها معتبر است و مهمتر از آن در چه صورتی لازم است اصلاحاتی در مدل بعمل آید. در مطالب زیر

نظریه^۱ اساسی مدارها و شبکه‌ها

به موضوع اساسی را که در مدل سازی برای عناصر فیزیکی اهمیت فراوان دارند مورد بحث قرار می‌دهیم .

« دامنه کار » هر عنصر فیزیکی بر حسب دامنه کار^(۱) طبیعی خود مشخص می‌شود. ولتاژ حداکثر، جریان حداکثر و توان حداکثر تقریباً همواره برای هر دستگاهی معین می‌شود و اگر درمداری ولتاژ، جریان یا توان از مقدار معین شده تجاوز نماید نمیتوان برای عنصر بطریق معمولی خود مدل سازی کرد و اگر عنصری در چنین شرایطی بکار برده شود ممکن است عملاً از کار بیافتد .

دامنه کار دیگری که معمولاً معین می‌شود، دامنه تغییرات فرکانس می‌باشد. مثلاً در فرکانسهای خیلی بالا نمیتوان یک مقاومت را برای یک مقاومت فیزیکی مدل قرارداد. وقتی بطور دقیق صحبت شود، هر زمان که اختلاف ولتاژی موجود باشد یک میدان الکتریکی بوجود می‌آید و از اینرو مقداری انرژی الکترواستاتیکی ذخیره می‌شود. بطریق مشابه، وجود یک جریان لازم می‌دارد که مقداری انرژی مغناطیسی هم ذخیره شود. در فرکانسهای پائین این گونه آثار قابل صرف نظر است و بنابراین میتوان یک مقاومت فیزیکی را بعنوان، تنها یک عنصر مدار، یعنی یک مقاومت مدل نمود. درحالیکه در فرکانسهای بالا، یک مدل خیلی دقیق باید علاوه بر مقاومت شامل سلف و خازن نیز باشد. بنابراین بمنظور مدل ساختن برای یک عنصر فیزیکی، دو یا چند جزء مدار را بکار می‌بریم. با مشخص کردن دامنه تغییرات فرکانس، میدانیم که در داخل این فاصله، یک مقاومت فیزیکی را تنها میتوان بوسیله یک مقاومت مثلاً ۱۰۰ اهمی مدل سازی کرد.

« اثر درجه حرارت » مقاومت‌ها، دیودها و تقریباً همه عناصر مدار در مقابل درجه حرارت حساس هستند و اگر آنها را در محیط‌هایی که درجه حرارت آنها تغییر میکند بکار ببرند مشخصه آنها تغییرپذیر با زمان خواهد بود. دستگاههایی که با نیمه هادی‌ها^(۲) کار میکنند در مقابل تغییر درجه حرارت بسیار حساس هستند و مدارهایی که از دستگاههای نیمه هادی تشکیل میشود، اغلب قسمتهای اضافی دیگری مانند فیدبک^(۳) همراه دارند که آثار ناشی از تغییر درجه حرارت را از بین میبرد.

« اثر پارازیتی^(۱) » و قتیکه جریانی از یک سلف فیزیکی میگذرد، شاید مهمترین پدیده قابل ملاحظه علاوه بر میدان مغناطیسی، اتلاف آن باشد. سیم پیچی یک سلف فیزیکی دارای مقاومتی است که در بعضی مدارها ممکن است آثار عمده‌ای داشته باشد. بنابراین در مدل سازی یک سلف فیزیکی، اغلب از اتصال سری یک سلف و یک مقاومت استفاده میکنیم. بطریق مشابه در فرکانسهای بالا برای یک دیود پیوندی بایستی مدلی بصورت اتصال موازی یک مقاومت غیرخطی و یک خازن در نظر گرفته شود. وجود خازن اساساً بعلت بار ذخیره شده در پیوند میباشد. قبلاً گفته شده است که یک باتری عملی، یک منبع ولتاژ (ایده‌آل) نیست، مع هذا میتوان برای تقریب نمودن رفتار خارجی باتری، مدلی که اثر مقاومت پارازیتی را نیز شامل باشد بکاربرد.

مهندسین باید در انتخاب عناصر فیزیکی تجربه و عقل سلیم خود را بکار ببرند مثلاً سیم پیچی‌های با کیفیت بسیار عالی و اتلاف قابل صرف نظر وجود دارند، ولی ممکن است در یک طرح عملی از لحاظ اقتصادی مقرون بصرفه نباشند و بجای آن اجباراً از مدار پیچیده‌تری با عناصر ارزان که همان منظور را برآورده نماید استفاده شود.

بطور خلاصه، تشخیص تفاوت میان یک جزء مدار که یک مدل ایده‌آل بوده و یک عنصر فیزیکی که شیئی از دنیای واقعی است اهمیت بسیار دارد. ما بایستی فرضیه‌هایی را که تحت آنها مدلهائی برای نمایش عناصر فیزیکی انتخاب میشود بخوبی بدانیم، هر چند منظور اصلی ما در این کتاب بررسی نظریه مدارهائی است که از مدلهای تشکیل می‌یابند. همچنین دانستن این موضوع نیز حائز اهمیت است که تنها از طریق مدل سازی قادر هستیم روشهای تجزیه و تحلیل دقیق، قضایای محکم و درك عمیقی از مدارها و سیستمهای فیزیکی بدست آوریم.

« اندازه معمولی اجزاء مدار » در اینجا بطور خلاصه اندازه مقادیر اجزاء مدار که در عمل با آنها مواجه میشویم بیان میکنیم. در مورد مقاومتها مقادیری که معمولاً بکار میرود از چند اهم تا چند مگا اهم تغییر میکند و دقت مقادیر مشخص شده بستگی به مورد استعمال خاص آن دارد. برای یک آزمایش فیزیکی دقیق شاید بخواهیم مقاومتها را تا چند دهم و یا صدم اهم اندازه بگیریم در حالیکه در طرح مدار بایاس کننده یک تقویت کننده صوتی، یک دقت ۱۰ درصد در مقدار مقاومتها معمولاً کفایت میکند.

حدود مفید اندازه خازنها از چند پیکوفاراد (10^{-12} فاراد) در مورد ظرفیتهای پارازیتی دستگاههای الکترونیکی تا چند میکروفاراد (10^{-6} فاراد) است. مقادیر عملی یک سلف از چند میکروهانری در مورد اندوکتانس پوشش^(۱) یک سیم کوتاه، تا چند هانری در مورد ترانسفورماتورهای قدرت تغییر میکند.

در مورد مثالهایی که در این کتاب گفته میشود پیوسته اعداد ساده و روند شده‌ای مانند مقاومت ۱۰ اهم، خازن یک فاراد و سلف $\frac{1}{\mu}$ هانری بکار می‌بریم. دانستن اینکه این مقادیر متناظر با مقادیر عملی اجزاء فیزیکی نیستند حائز اهمیت است. البته منظور از بکار بردن این اعداد آن است که توجه خود را بجای محاسبات عددی مفصل به روشها و ایده‌ها متمرکز کنیم. در فصل هفتم بحث مختصری درباره نرمالیزه کردن^(۲) مقادیر عناصر که در تجزیه و تحلیل و طرح مدارها مفید هستند خواهد شد. بکمک نرمالیزه کردن اجزاء مدار میتوان یک مدار عملی را با انجام دادن تمام محاسبات روی مقادیر نرمالیزه شده نظیر ۱ فاراد و ۷ هانری، طرح نمود. مزیت دیگری که این روش دارا میباشد کم کردن اثر خطای روند کردن در محاسبات عددی است.

خلاصه

- اجزاء مدار، مدل‌های ایدئالی هستند که در تجزیه و تحلیل و طرح مدارها بکار می‌روند. عناصر فیزیکی را میتوان بطور تقریبی با اجزاء مدار تقریب نمود.
- هر عنصر دوسر با یک مشخصه یعنی با یک منحنی که در صفحه مناسبی رسم شده است تعریف میشود. هر جزء مدار را بر حسب خطی بودن و تغییرناپذیر با زمان بودن میتوان به چهار طبقه تقسیم نمود. هرگاه مشخصه عنصری با زمان تغییر نکند آنرا «تغییرناپذیر با زمان» و اگر تغییر کند «تغییرپذیر با زمان» گویند. اگر برای هر زمان t ، مشخصه عنصری خط مستقیمی باشد که از مبدا می‌گذرد آنرا «خطی» و در غیر اینصورت آنرا «غیرخطی» گویند.

● برای هر زمان t ، یک مقاومت بوسیله یک منحنی در صفحه iv (یا vi) مشخص میشود. یک منبع ولتاژ ناپسته با خطی موازی محور i ها، و یک منبع جریان ناپسته با خطی موازی محور v ها، مشخص میشود.

● برای هر زمان t ، یک خازن با یک منحنی در صفحه vq و یک سلف با یک منحنی در صفحه $i\Phi$ مشخص میشود.

● یک «یک قطبی» (یا مدار دوسر) بوسیله دوسر از یک مدار مشخص میشود بشرطیکه در هر لحظه از زمان جریانیکه از یک سر وارد میشود مساوی جریانی باشد که از سر دیگر خارج میشود. و تئیکه کلمه «یک قطبی» را بکار میبریم، ما تنها به ولتاژ و جریان قطب علاقمند هستیم. «توان لحظه ای» که وارد یک قطبی میشود بوسیله رابطه:

$$p(t) = v(t) i(t)$$

و «انرژی تحویل داده شده» به یک قطبی، از زمان t_0 تا زمان t توسط رابطه:

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^t v(t') i(t') dt'$$

داده میشود.

● میتوان اجزاء مدار را بسته به پسیو بودن آنها هم طبقه بندی نمود. عنصری را «پسیو» گویند که هرگز انرژی خالصی بدنیای خارج تحویل ندهد. عنصری را که پسیو نباشد «اکتیو» گویند.

● مقاومتها، خازنها و سلفهای خطی تغییرناپذیر بازمان پسیو هستند، اگر و تنها اگر، روابط زیر به ترتیب برای آنها برقرار باشد. $L \geq 0$ و $C \geq 0$ و $R \geq 0$.

● انرژی مغناطیسی ذخیره شده در یک سلف خطی تغییرناپذیر بازمان عبارتست از:

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}$$

● انرژی الکتریکی ذخیره شده در یک خازن خطی تغییرناپذیر بازمان عبارتست از:

$$\mathcal{E}_E = \frac{1}{2} C v^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

مسائل

۱- خواص مقاومت غیرخطی فرض کنید مقاومت غیرخطی R دارای مشخصه‌ای باشد که بوسیله معادله زیر مشخص شود.

$$v = 20i + i^2 + \frac{1}{2}i^3$$

الف- برای جریان $i(t) = \cos \omega_1 t + 2 \cos \omega_2 t$ ، v را بصورت مجموع سینوسوئیدها بیان کنید.

ب- اگر $\omega_2 = 2\omega_1$ باشد چه فرکانسهایی در v وجود دارند؟

۲- مشخص کردن مقاومتها معادلات زیر مشخصه‌های بعضی مقاومتها را بیان میدارند. تعیین کنید که آیا آنها خطی، غیرخطی، تغییرپذیر با زمان، تغییرناپذیر با زمان، دوطرفه، کنترل شده با ولتاژ، کنترل شده با جریان، پسیو یا اکتیو هستند.

الف- $v + 10i = 0$

ب- $v = (\cos 2t)i + 2$

پ- $i = e^{-v}$

ت- $v = i^2$

ث- $i = \tanh v$

ج- $i + 2v = 10$

چ- $i = 2 + \cos \omega t$

ح- $i = \ln(v + 2)$

خ- $i = v + (\cos 2t) \frac{v}{|v|}$

۳- شکل موجها شکل موجهای تعیین شده زیر را رسم کنید.

الف- $2\delta(t-2)$

ب- $\delta(t) - \delta(t-1) + \delta(t-2)$

پ- $u(2t)$

$$u(t) \cos(2t + 90^\circ) \quad - \text{ت}$$

$$u(-t) \quad - \text{ث}$$

$$u(2 - 2t) \quad - \text{ج}$$

$$u(t)e^{-t} \quad - \text{چ}$$

$$2p_r(t) \quad - \text{ح}$$

$$\frac{p_1(t-2)}{2} \quad - \text{خ}$$

$$e^{2t} \cos t \quad - \text{د}$$

$$u(t) - 2u(t-1) \quad - \text{ذ}$$

$$r(t) \sin t \quad - \text{ر}$$

$$u(t)e^{-2t} \sin(t - 90^\circ) \quad - \text{ز}$$

۴- شکل موجها نمایش تابعی شکل موجهای داده شده در شکل (مسأله ۲-۴) را بنویسید (شکلهای صفحه ۸۸ و ۸۹ را ببینید) .

۵- خازن و سلف خطی تغییرناپذیر با زمان بفرض اینکه شکل موجهای داده شده در شکل (مسأله ۲-۴) جریانهای شاخه ها باشد ولتاژ شاخه ها را درحالتهای زیر روی کاغذ میلیمتری رسم کنید :

الف - عنصر ، یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با اندوکتانس یک هانری است .

ب - عنصر ، یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ظرفیت یک فاراد است ($v(0)=0$)

۶- خازن و سلف خطی تغییرناپذیر با زمان بفرض اینکه شکل موجهای داده شده در شکل (مسأله ۲-۴) ولتاژهای شاخه ها باشد جریانهای شاخه ها را درحالتهای زیر روی کاغذ میلیمتری رسم کنید :

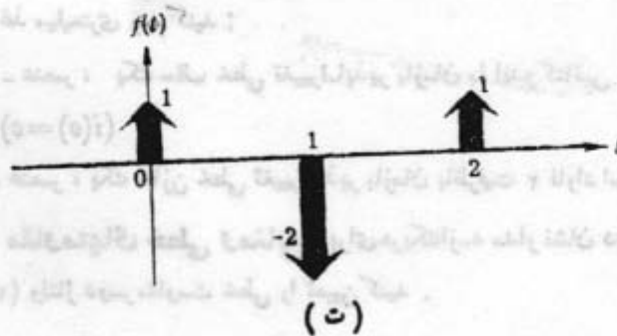
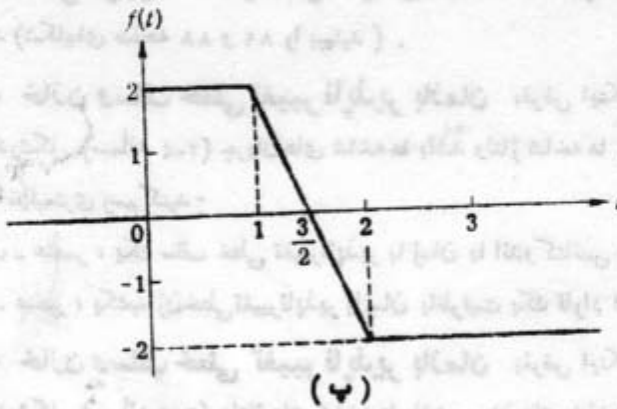
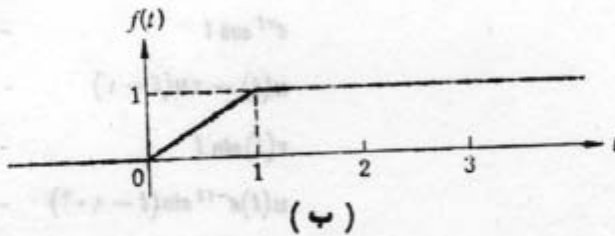
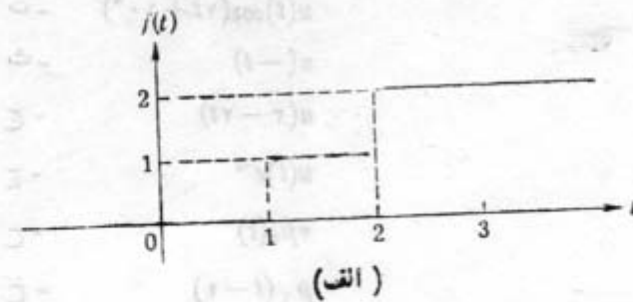
الف - عنصر ، یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با اندوکتانس ۲ هانری است

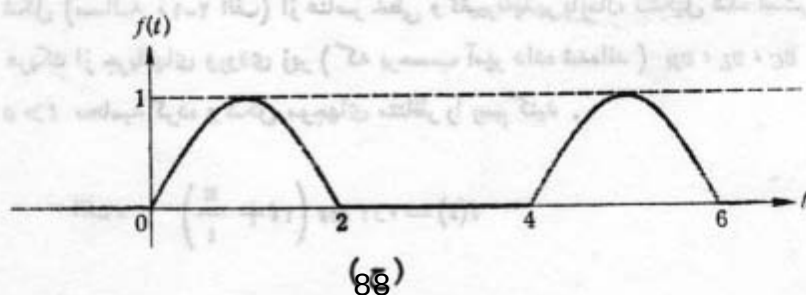
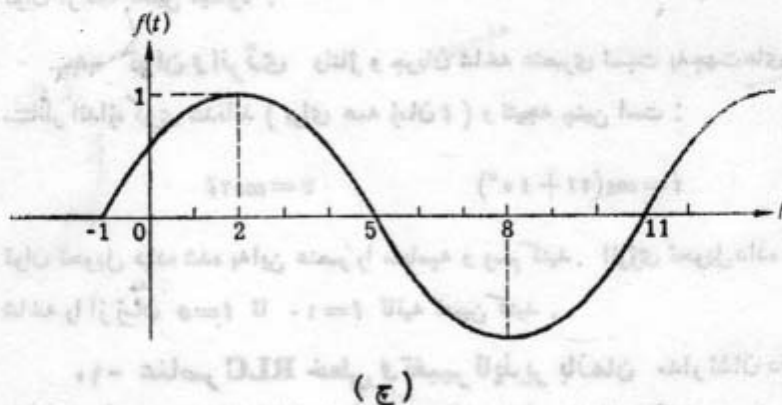
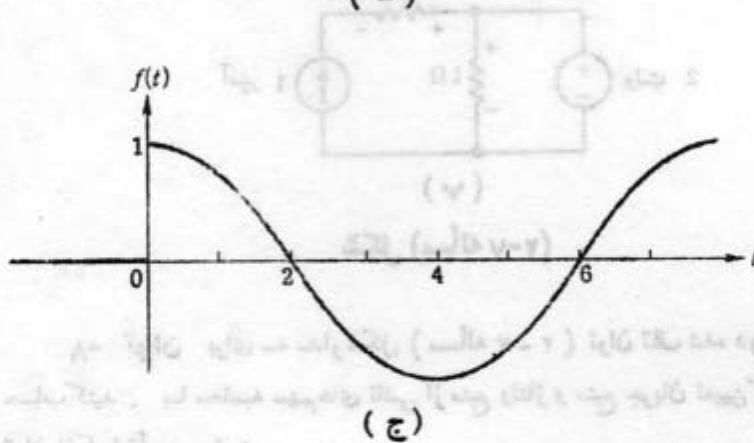
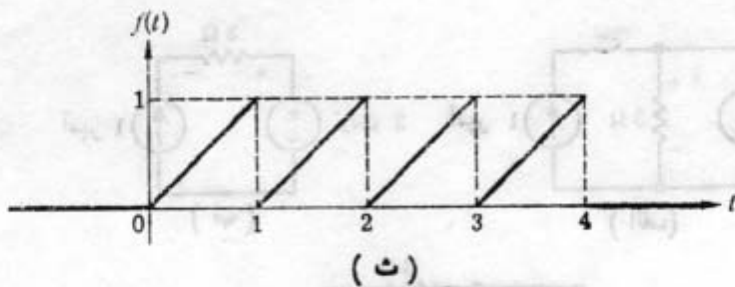
$$(i(0)=0)$$

ب - عنصر ، یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ظرفیت ۲ فاراد است .

۷- مقاومت های خطی و منابع برای هر یک از سه مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۲-۷) ولتاژ دوسر مقاومت خطی را تعیین کنید .

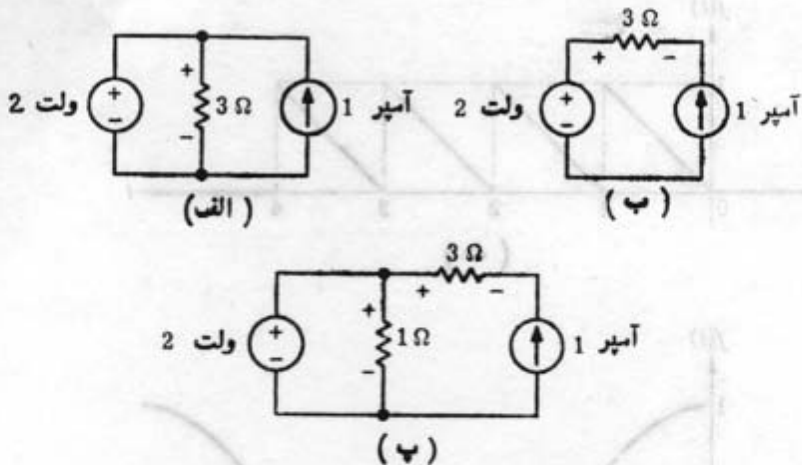
نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها





شکل (مساله ۴-۲)

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها



شکل (مسأله ۷-۲)

۸- توان برای سه مدار شکل (مسأله ۷-۲) توان تلف شده در هر مقاومت را حساب کنید. با محاسبه سهم‌های ناشی از منبع ولتاژ و منبع جریان تعیین کنید که این توان از کجا تأمین میشود.

۹- توان و انرژی ولتاژ و جریان شاخه عنصری نسبت به جهت‌های قراردادی متناظر اندازه‌گیری شده‌اند (برای همه زمان t) و نتیجه چنین است:

$$i = \cos(2t + 45^\circ) \quad v = \cos 2t$$

توان تحویل داده شده به این عنصر را محاسبه و رسم کنید. انرژی تحویل داده شده به این شاخه را از زمان $t=0$ تا $t=10$ ثانیه تعیین کنید.

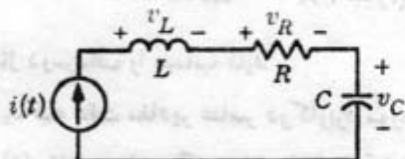
۱۰- عناصر RLC خطی و تغییرناپذیر با زمان مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۰-۲ الف) از عناصر خطی و تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده است. برای هریک از جریانهای ورودی زیر (که برحسب آمپر داده شده‌اند) v_C ، v_L ، v_R را برای $t > 0$ محاسبه کرده و شکل موجهای متناظر را رسم کنید.

$$i(t) = 0.2 \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{الف}$$

$$i(t) = e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad \text{ب-}$$

پ- $i(0)$ در شکل (مسأله ۱۰ - ۲ ب) داده شده است.

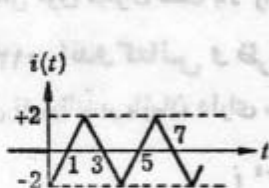
ت- $i(0)$ در شکل (مسأله ۱۰ - ۲ پ) داده شده است.



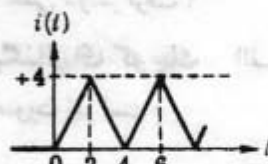
$$L = 5 \text{ H}, \quad R = 10 \, \Omega, \quad C = 0.1 \text{ F}$$

توجه کنید: $v_C(0) = 0$

(الف)



(ب)



(پ)

شکل (مسأله ۱۰-۲)

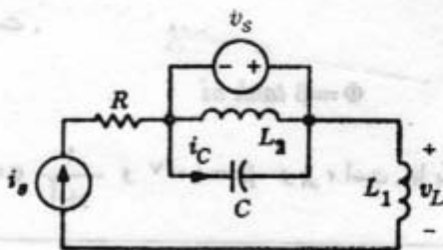
۱۱- مدار RLC خطی تغییرناپذیر با زمان با منابع در مدار خطی تغییر

ناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۱ - ۲) ولتاژ $v_s(t)$ و جریان $i_s(t)$

بصورت زیر داده شده اند:

$$i_s(t) = Be^{-\alpha t} \quad \text{و} \quad v_s(t) = A \cos \omega t$$

(که در آن A و B و α و ω مقادیر ثابتی میباشند) $i_C(t)$ و $v_L(t)$ را محاسبه کنید.



شکل (مسأله ۱۱-۲)

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

۱۲- تقریب خطی سلف غیر خطی فرض کنید که سلفی دارای مشخصه $\Phi = 10^{-2} (1 - i^2) i$ باشد.

الف - اگر جریان داخل سلف (برحسب آمپر) بصورت:

$$i(t) = 2 \times 10^{-2} \cos 2\pi 60 t$$

باشد ولتاژ دوسلف را حساب کنید.

ب - فرض کنید که دقت مقادیر عناصر در کاربرد مورد نظر، یک درصد باشد یعنی تولرانس^(۱) مقادیر عناصر یک درصد باشد. آیا با جریان بکار رفته:

$$i(t) = 2 \times 10^{-2} \cos 2\pi 60 t$$

و تولرانس فوق میتوان سلف بالا را بعنوان سلف خطی در نظر گرفت؟

۱۳- اندوکتانس و ظرفیت در سیگنالهای کوچک الف - یک سلف غیر خطی تغییرناپذیر با زمان دارای مشخصه‌ای بصورت زیر است:

$$\Phi = 10^{-2} \tanh i + 10^{-4} i$$

مقدار اندوکتانس سیگنال کوچک (خطی) را نسبت به جریان بایاس رسم کنید.

ب - یک خازن غیر خطی تغییرناپذیر با زمان دارای مشخصه‌ای بصورت زیر است:

$$q = 1 - e^{-10i}$$

این معادله فقط برای آن مقادیر v که از چند دهم ولت بزرگتر نباشد معتبر است. مقدار ظرفیت سیگنال کوچک (خطی) را نسبت به ولتاژ بایاس رسم کنید.

۱۴- سلف غیر خطی مشخصه Φ یک سلف داده شده با تقریب خوبی بر منحنی تابع زیر منطبق است.

$$\Phi = \beta \tanh \alpha i$$

که در آن $\alpha = 10^2$ و $\beta = 10^{-7}$ و بر، است. با بکار بردن تقریب مناسبی،

ولتاژ ناشی از برقراری جریانهای همزمان سینوسی و ثابت (به ترتیب i_{dc} و i_{ac}) که بصورت جفت های زیر داده شده اند را تعیین کنید :

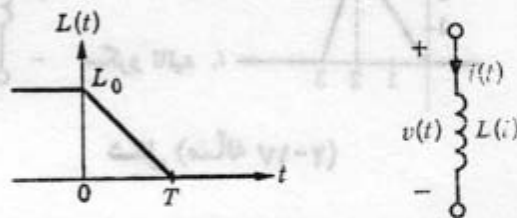
الف - $I_{dc} = 16 \times 10^{-2}$ آمپر ، $i_{ac}(t) = 10^{-4} \sin 10^6 t$ ،

ب - $I_{dc} = -4 \times 10^{-2}$ آمپر ، $i_{ac}(t) = 10^{-4} \sin 10^6 t$ ،

۱۵- سلف خطی تغییرپذیر بازمان از یک سلف خطی تغییرپذیر بازمان که

وابستگی با زمان آن توسط منحنی نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۵ - ۲) مشخص

میشود جریان ثابت $i(t) = I_0$ آمپر میگذرد (I_0 مقدار ثابتی بوده و $-\infty < t < \infty$) .
 $v(t)$ را محاسبه کنید .



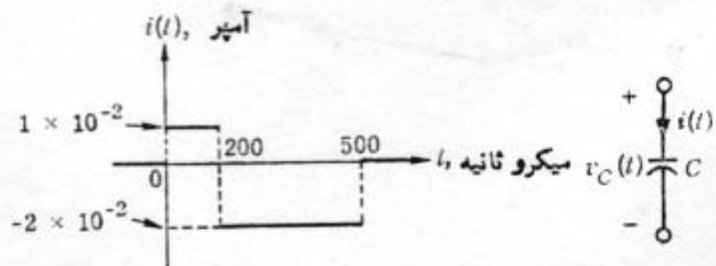
شکل (مسأله ۱۵-۲)

۱۶- انرژی ذخیره شده در خازن خطی جریان $i(t)$ که توسط منحنی نشان

داده شده در شکل (مسأله ۱۶ - ۲) مشخص میشود از یک خازن خطی تغییرناپذیر بازمان

با ظرفیت $C = 2 \mu F$ میگذرد . اگر داشته باشیم $v_C(0) = 0$ ، ولتاژ $v_C(t)$ ، توان

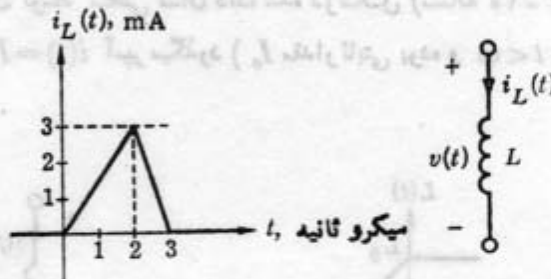
لحظه ای $p(t)$ ، تحویل داده شده بوسیله منبع و انرژی ذخیره شده $W_E(t)$ ، در خازن را برای $t \geq 0$ محاسبه و رسم کنید .



شکل (مسأله ۱۶-۲)

۱۷- توان و انرژی ذخیره شده در سلف خطی یک سلف خطی تغییرناپذیر

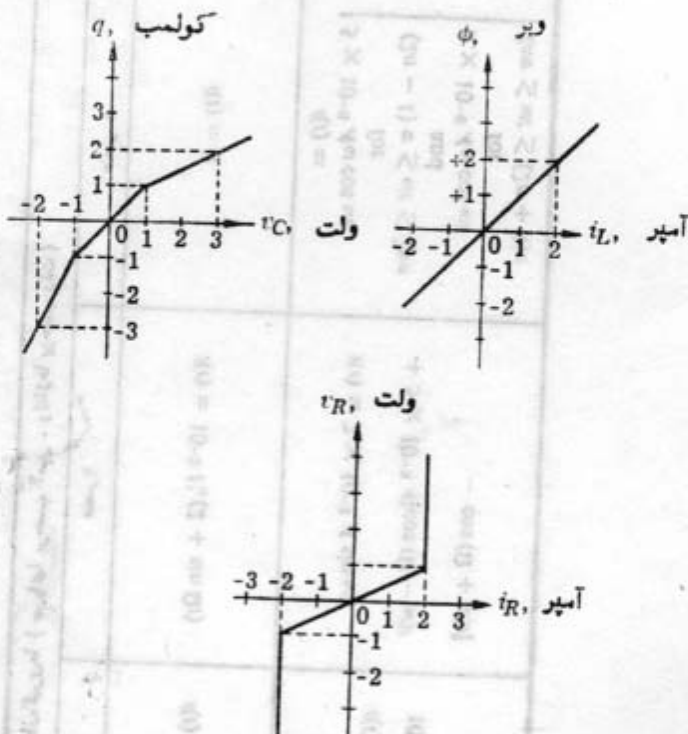
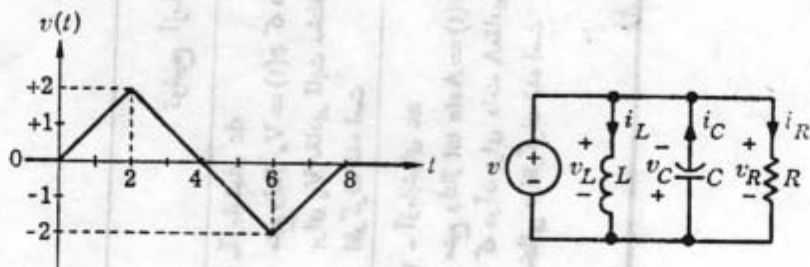
بازمان با اندوکتانس $L = 10$ میلی‌هائری در مداری که جریان وابسته بر زمان $i_L(t)$ نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۷-۲) از آن می‌گذرد، کار میکند. ولتاژ $v_L(t)$ ، توان لحظه $p(t)$ تحویل داده شده بوسیله منبع و انرژی ذخیره شده $g_M(t)$ در سلف را برای $t \geq 0$ محاسبه و رسم کنید.



شکل (مسأله ۱۷-۲)

۱۸- عناصر RLC غیر خطی و تغییرناپذیر بازمان ولتاژ $v(t)$ که بوسیله

منحنی نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۸-۲) مشخص میشود یک مدار موازی RLC تغییرناپذیر بازمان که هریک از اجزاء آن با یک منحنی مشخصه تعیین شده‌اند وصل شده است با فرض اینکه $i_L(0) = 0$ باشد. جریانهای $i_L(t)$ و $i_C(t)$ و $i_R(t)$ را محاسبه و رسم کنید.



شکل (مسئله ۱۸-۲)

۱۹- مدل سازی دسته ای از عناصر مداری دوسر، که ناشناخته اند (مقاومتها ، خازنها ، سلفها و منابع) برای تشخیص مورد آزمایش قرار میگیرند. نمونه ای از ورقه آزمایش که متناظر با چهار عنصر میباشد درجدول (مسئله ۱۹ - ۲) عرضه شده است . مشخصه هر یک از عناصر را تعیین کنید .

جدول (مسأله ۱۹-۲)

توضیح آزمایش	اندازه گریها (جریانها بر حسب آمپر - ولتاژها بر حسب ولت)			
	منبر ۱	منبر ۲	منبر ۳	منبر ۴
۱- آزمایشهای dc منبع ولتاژ $V_0 = 7$ در آن برای V_0 مقادیر ثابت مختلفی در نظر گرفته شده است	$i(t) = 0$	$i(t) = 10^{-2} i_0 (2 + \sin \Omega t)$	$i(t) = 10^{-2} i_0^3$	$K(t) = 10^{-2}$
۲- آزمایشهای ac منبع ولتاژ $v(t) = A \sin \omega t$ که در آن برای دامنه A مقادیر مختلفی در نظر گرفته شده است	$i(t) = \begin{cases} 5 \times 10^{-6} A \omega \cos \omega t & \text{for } (2\pi - 1)\pi \leq \omega t \leq 2\pi\pi \\ 2 \times 10^{-6} A \omega \cos \omega t & \text{and for } 2\pi\pi \leq \omega t \leq (2\pi + 1)\pi \end{cases}$	$i(t) = 2 \times 10^{-3} A \sin \omega t + 5 \times 10^{-3} A (\cos(\Omega - \omega)t - \cos(\Omega + \omega)t)$	$i(t) = 10^{-3} A^3 \sin^3 \omega t$	$K(t) = 10^{-3}$

فصل سوم

مدارهای ساده

در فصل اول دو قانون کیرشف را در مورد مدارهای فشرده معرفی نموده و روی این حقیقت تأکید کردیم که این قوانین به ماهیت عناصر مدار بستگی ندارند بلکه تنها بر روی مقادیر لحظه‌ای که جریان و ولتاژ شاخه‌ها می‌توانند بگیرند محدودیت‌های خطی ایجاد می‌کنند و چون این محدودیت‌ها فقط به نحوه بهم پیوستن عناصر مدار بستگی دارند آنها را «محدودیت‌های توپولوژیکی»^(۱) گویند.

در فصل دوم خواص عناصر مدار دو سر را به تفصیل مطالعه نمودیم. در یک مدار داده شده، هر شاخه با رابطه شاخه‌ای خود، یعنی رابطه‌ای بین ولتاژ و جریان شاخه مشخص می‌شود. محدودیت‌های توپولوژیکی و روابط شاخه‌ای برای تمام شاخه‌ها در یک مدار، آنرا بطور کامل توصیف می‌کنند. مسأله تجزیه تحلیل مدار، تعیین جریان و ولتاژ تمام شاخه‌های مدار، میباشد.* این ولتاژها و جریانها، **متغیرهای شبکه**^(۲) نامیده می‌شود. بسیاری از مفاهیم اساسی و روشهای اصلی که در حل مسائل تجزیه تحلیل مدار مفید هستند موضوعات اصلی این کتاب میباشند. در این فصل بعضی نظرها و تکنیک‌های مقدماتی برای تجزیه تحلیل مدارهای ساده ارائه خواهد شد. این مدارها فقط از یک «نوع عنصر» مدار ساخته شده‌اند یعنی آنها فقط شامل مقاومت، سلف یا خازن میباشند.

در بحث زیر راحت‌تر است که مفهوم معادل بودن معرفی شود. «مدارهای یک قطبی را وقتی معادل گویند که مشخصه آنها بر حسب ولتاژ و جریان قطب همواره یکی باشد». در فصل پیش ما قبلاً در مورد شکلهای ساده مدارهای معادل تونن و نرتن به منظور تبدیل منابع ولتاژ به منابع جریان و برعکس بحث کرده‌ایم. این مدارهای معادل حالت‌های خاصی از یک قطبی‌های معادل

* البته در موارد بسیاری تنها میخواهیم ولتاژ و جریان بعضی شاخه‌ها و یا بعضی ترکیبهای خطی ولتاژها و جریانهای شاخه‌ها را بدانیم.

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

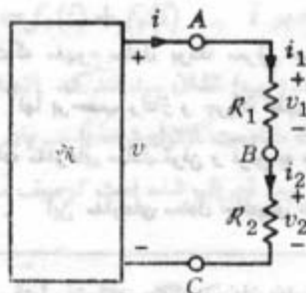
میباشند. در این فصل یک قطبی‌های معادل کلی‌تری بنست خواهیم آورد. لفظ «معادل» غالباً برای بیان این حقیقت که مدارهای متفاوت دارای مشخصه الکتریکی یکسان بر حسب متغیرهای مربوطه ولتاژ و جریان میباشند بکار میرود. اغلب، واژه «شاخه‌های معادل» را بکار میبریم در اینصورت متغیرهای مربوطه ما ولتاژ شاخه و جریان شاخه میباشند.

۱- اتصال سری مقاومتها

معنی اتصال سری^(۱) عناصر مدار بطور حسی آشکار است. در فصل قبل درباره اتصال سری یک مقاومت و یک منبع ولتاژ بحث کرده‌ایم. در این بخش، روش عمل کلی‌تری برای اتصال سری مقاومتها ارائه خواهیم داد.

مثال ۱ مدار شکل (۱-۱) را که در آن دو مقاومت غیر خطی R_1 و R_2 در گره B بهم وصل شده‌اند در نظر بگیرید. گره‌های A و C به بقیه مدار که با N مشخص گردیده وصل شده است. یک قطبی متشکل از R_1 و R_2 که سرهای آن گره‌های A و C میباشند، «اتصال سری مقاومتهای R_1 و R_2 نامیده میشود». برای منظور فعلی ما ماهیت N اهمیت ندارد. دو مقاومت R_1 و R_2 بوسیله مشخصه‌هایشان چنانکه در صفحه $2v$ در شکل (۱-۲) نشان داده شده است، معین میشوند. می‌خواهیم مشخصه اتصال سری R_1 و R_2 ، یعنی مشخصه یک مقاومت معادل اتصال سری را معین کنیم. اولاً، KVL در سورد حلقه ABCA لازم میدارد که:

$$(1-1) \quad v = v_1 + v_2$$



شکل ۱-۱- اتصال سری R_1 و R_2

سپس ، KCL در مورد گره های A و B و C لازم می‌دارد که :

$$i = i_1 \quad i_1 = i_2 \quad i_2 = i$$

آشکار است که یکی از سه معادله فوق زائد است. آنها را میتوان باینصورت خلاصه کرد:

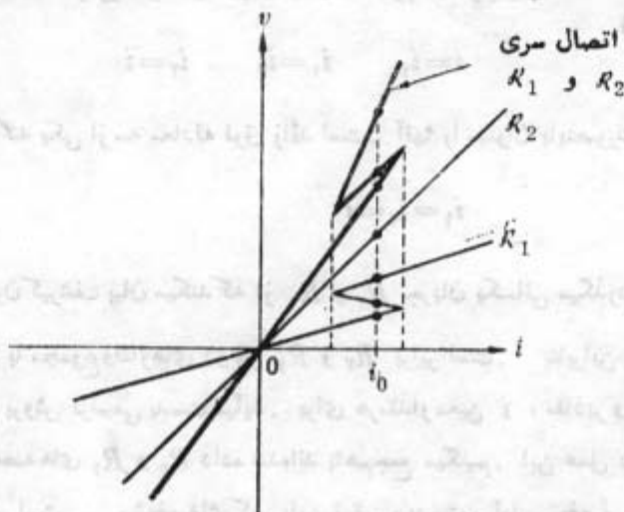
$$(1-2) \quad i_1 = i_2 = i$$

بنابراین قانون کیرشف بیان میکند که از R_1 و R_2 جریان یکسانی می‌گذرد و ولتاژ دو سر اتصال سری با مجموع ولتاژهای دو سر R_1 و R_2 برابر است. بنابراین مشخصه اتصال سری باسانی بروش ترسیمی بدست می‌آید. برای هر مقدار معین i ، مقادیر ولتاژهایی را که بوسیله مشخصه های R_1 و R_2 داده شده‌اند باهم جمع میکنیم. این عمل در شکل (۱-۲) تشریح شده است. مشخصه‌ای که باین ترتیب بدست می‌آید مشخصه مقاومت معادل اتصال سری R_1 و R_2 نامیده میشود. ملاحظه کنید که در این مثال R_2 یک مقاومت خطی و R_1 یک مقاومت غیرخطی کنترل شده بوسیله ولتاژ است، یعنی جریان مقاومت R_1 بوسیله یک تابع (تک ارز) ولتاژ مشخص میشود. در شکل (۱-۲) دیده میشود که اگر جریان i باشد سه مقدار ممکن برای ولتاژ در مشخصه R_1 مجاز میباشد، پس R_1 کنترل شده بوسیله جریان نیست. تذکر این مطلب جالب است که اتصال سری دارای مشخصه‌ای میباشد که نه کنترل شده با ولتاژ و نه کنترل شده با جریان است.

در مثال فوق، با جمع کردن ولتاژهای متناظر دو سر مقاومتها برای جریان یکسان، مشخصه اتصال سری دو مقاومت را بطور ترسیمی بدست آوردیم. از نظر تحلیلی، مشخصه مقاومت معادل اتصال سری دو مقاومت R_1 و R_2 را فقط زمانی که هر دو کنترل شده بوسیله جریان باشند، میتوان معین کرد. مقاومت‌های کنترل شده بوسیله جریان R_1 و R_2 دارای مشخصه‌هایی هستند که ممکن است با معادلاتی بشکل زیر توصیف شوند:

$$(1-3) \quad v_1 = f_1(i_1) \quad v_2 = f_2(i_2)$$

که در آن، جهت‌های قراردادی در شکل (۱-۱) نشان داده شده‌اند. نظر به معادلات (۱-۱) و (۱-۲)، اتصال سری دارای مشخصه‌ای بشکل زیر است:



شکل ۱-۲- اتصال سری دو مقاومت R_1 و R_2 مثال ۱

$$(۱-۴) \quad \begin{aligned} v &= f_1(i_1) + f_2(i_2) \\ &= f_1(i) + f_2(i) \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه میگیریم که مدار دوسر مشخص شده با معادله ولتاژ-جریان $(۱-۴)$ ، مقاومت دیگری است که این چنین مشخص میشود:

(الف ۱-۵)

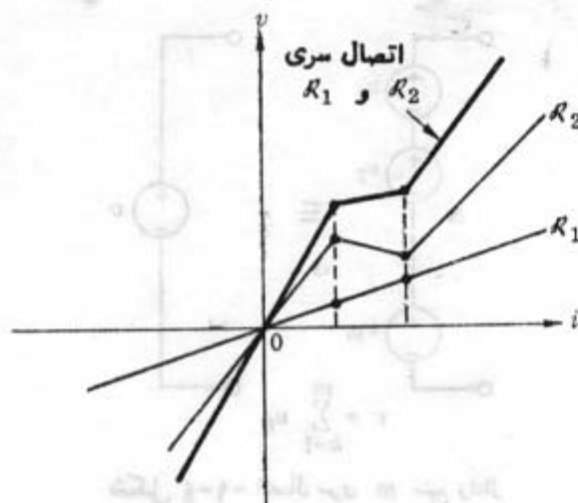
$$v = f(i)$$

که در آن:

$$(۱-۵) \quad f(i) = f_1(i) + f_2(i) \quad \text{برای تمام مقادیر } i$$

معادلات (۱-۵) الف) و (۱-۵) ب) نشان میدهند که اتصال سری دو مقاومت کنترل شده بوسیلهٔ جریان، معادل یک مقاومت کنترل شده با جریان R است و مشخصهٔ آن با تابع $f(i)$ که در رابطه (۱-۵) ب) تعریف شده است توصیف میشود. این مشخصه در شکل (۱-۳) نشان داده است.

با استدلال مشابه میتوان بیان کرد که «اتصال سری m مقاومت کنترل شده با جریان با مشخصه‌های توصیف شده با $v_k = f_k(i_k)$ ، $k = 1, 2, \dots, m$ ، معادل یک مقاومت کنترل شده بوسیلهٔ جریان است که مشخصهٔ آن با $v = f(i)$ توصیف میشود که در آن



شکل ۳-۱- اتصال سری دو مقاومت کنترل شده با جریان

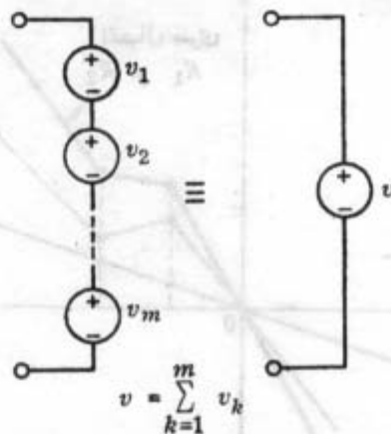
اگر در حالت خاص همه مقاومتها خطی باشند، یعنی $v_k = R_k i_k$ و $k = 1, 2, \dots, m$ ، مقاومت معادل نیز خطی است و $v = Ri$ که در آن:

$$(۱-۱) \quad R = \sum_{k=1}^m R_k$$

مثال ۲ مدار شکل (۱-۴) را در نظر بگیرید که در آن m منبع ولتاژ بطور سری بهم وصل شده‌اند. واضح است که این، یک حالت خاص از اتصال سری m مقاومت کنترل شده با جریان است. با تعمیم معادله (۱-۱) ملاحظه میکنیم که ترکیب سری m منبع ولتاژ، معادل یک منبع ولتاژ تنها میباشد که ولتاژ دوسر آن v است بطوریکه:

$$(۱-۷) \quad v = \sum_{k=1}^m v_k$$

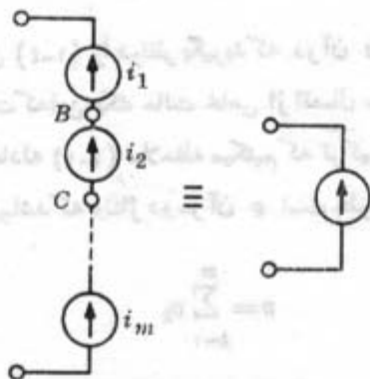
مثال ۳ اتصال سری m منبع جریان را مطابق شکل (۱-۵) در نظر بگیرید. فوراً ملاحظه میشود که چنین اتصالی معمولاً KCL را نقض میکند. در حقیقت کاربرد



شکل ۴-۱- اتصال سری m منبع ولتاژ

KCL در گره‌های B و C لازم می‌دارد که $i_1 = i_2 = i_3 = \dots$. بنابراین در نظر گرفتن اتصال سری منابع جریان از نظر فیزیکی دارای معناییست مگر اینکه شرط فوق برقرار باشد. پس اتصال سری m منبع جریان مشابه، معادل یک چنین منبع جریانی است.

مثال ۴: اتصال سری یک مقاومت خطی R_1 و یک منبع ولتاژ v_1 را مطابق شکل (۱-۶ الف) در نظر بگیرید. مشخصهٔ آنها در یک صفحهٔ $i-v$ کشیده شده و در شکل (۱-۶ ب) نمایش داده شده است. اتصال سری دارای مشخصه‌ای مطابق



شکل ۵-۱- اتصال سری منابع جریان فقط زمانی عملی است که

$$i_1 = i_2 = \dots = i_m$$

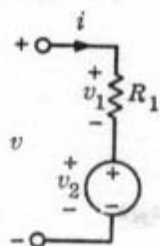
شکل (۱-۶) پ است. برحسب مشخص سازی تابعی (۱) داریم:

(۱-۸)

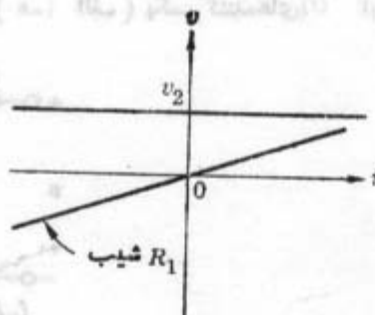
$$v = v_1 + v_2 = R_1 i + v_2$$

چون R_1 یک ثابت معلوم و مقدار v_2 نیز معلوم است، معادله (۱-۸) همه مقادیر ممکن v و i را بهم مرتبط میسازد و مطابق شکل (۱-۶) پ) معادله یک خط مستقیم می باشد. در شکل (۱-۶) ت) مشخصه را در صفحه $v-i$ رسم میکنیم و دوباره مشخصه باتری اتوسپیل را که در بخش ۲ فصل دوم در مورد آن بحث شد تشخیص میدهیم که در آن برای باتری جهت مخالف قرار دادی متناظر بکار رفته است.

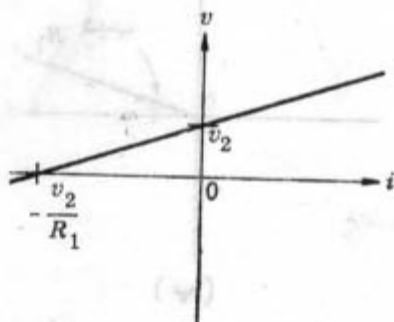
مثال ۵ مدار شکل (۱-۷) الف) را که در آن یک مقاومت خطی به یک دیود



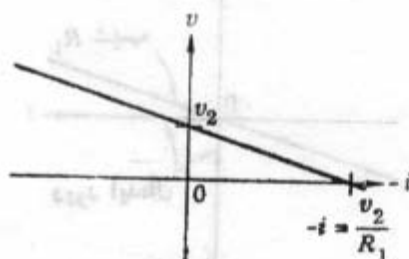
(الف)



(پ)



(و)



(ت)

شکل ۱-۶-۱ اتصال سری یک مقاومت خطی و یک منبع ولتاژ

۱۰۴

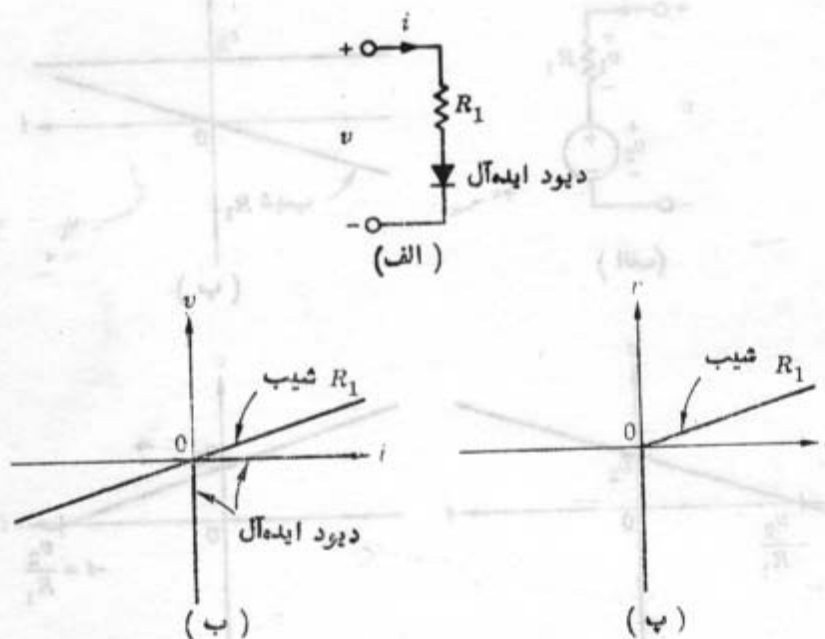
نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

ایده‌آل وصل شده است در نظر بگیرید. مشخصه‌های آنها در روی یک نمودار رسم شده و در شکل (۱-۷) نشان داده شده‌اند. اتصال سری دارای مشخصه‌ای مطابق شکل (۱-۷) پی می‌باشد و با استدلال زیر بدست آمده است.

ابتدا برای جریانهای مثبت میتوان بسادگی عرضهای دو منحنی را با هم جمع کرد. سپس برای ولتاژ منفی در دو سر دیود، دیود ایده‌آل بمنزله یک مدار باز است. پس اتصال سری مجدداً یک مدار باز است. جریان i نمیتواند منفی باشد.

برای تشریح اینکه دیود ایده‌آل یک عنصر دو طرفه نیست فرض کنید آنرا مطابق شکل (۱-۸) الف) معکوس کنیم. با همان استدلال، مشخصه‌ای مطابق شکل (۱-۸) ب) پیدا میکنیم.

مدارهای شکلهای (۱-۷) الف) و (۱-۸) الف) یکسوکننده‌های (۱) ایده‌آل

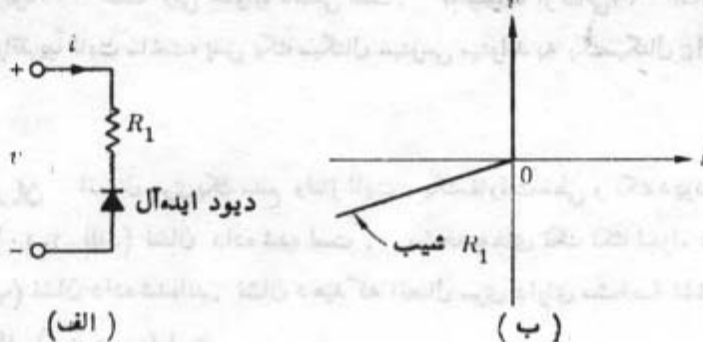


شکل ۱-۷- اتصال سری یک دیود ایده‌آل و یک مقاومت خطی. (الف) مدار.

(ب) مشخصه هر عنصر. (پ) مشخصه اتصال سری

۱۰۵

مدارهای ساده



شکل ۱-۸- اتصال سری مشابه اتصال شکل (۱-۷) است بجز اینکه دیود معکوس شده است

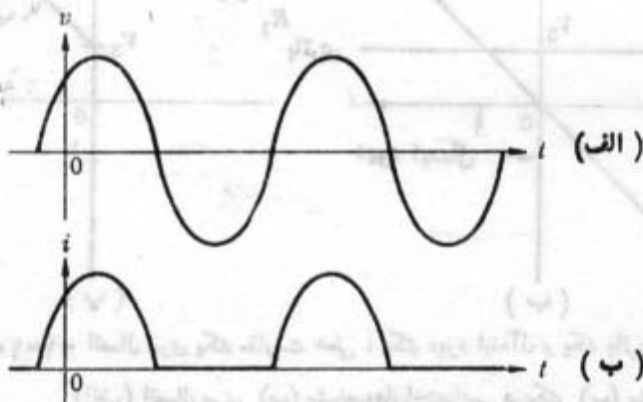
(الف) مدار. (ب) مشخصه اتصال سری

میباشند. گرییم یک منبع ولتاژ به یک قطبی شکل (۱-۷ الف) وصل شود و دارای یک شکل موج سینوسی:

(۱-۹)

$$v_s(t) = A \cos(\omega_s t + \Phi)$$

مطابق شکل (۱-۹ الف) باشد. جریان i که از اتصال سری میگذرد مطابق شکل (۱-۹ ب) یک تابع متناوب از زمان است. ملاحظه کنید که ولتاژ وارده $v(0)$ یک تابع متناوب از زمان با مقدار متوسط صفر است. جریان $i(0)$ نیز یک تابع متناوب از زمان



شکل ۱-۹- برای ولتاژ ورودی نشان داده شده در (الف)، جریان حاصله برای مدار شکل

(۱-۷ الف) در (ب) نشان داده شده است.

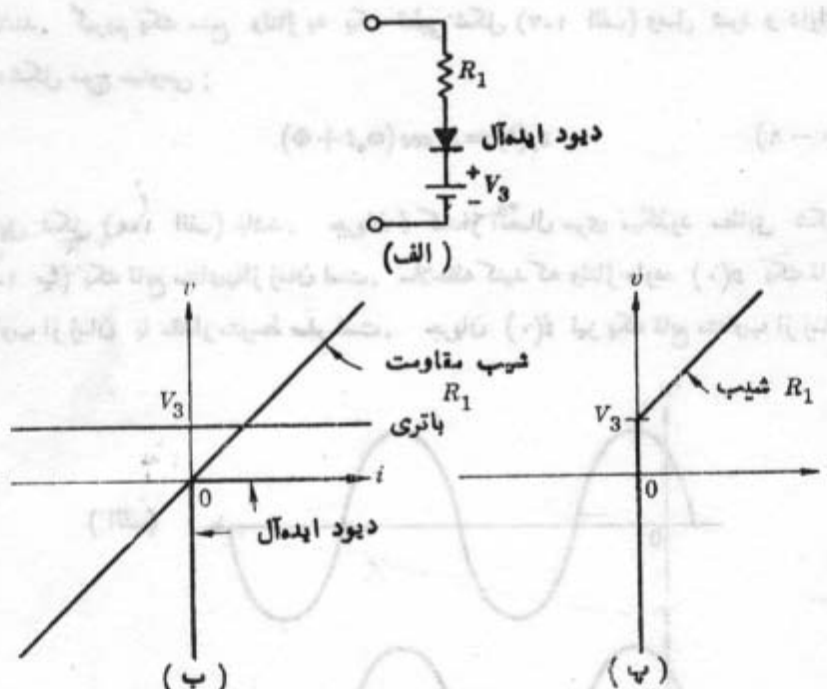
۱۰۶

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

با همان پریود^(۱) است ولی همواره نامتفی است. با استفاده از صافی^(۲) امکان دارد این جریان را تقریباً ثابت ساخت، پس یک سیگنال سینوسی می‌تواند به یک سیگنال dc تبدیل شود.

تمرین اتصال سری یک منبع ولتاژ ثابت، یک مقاومت خطی و یک دیود ایده‌آل در شکل (۱۰-۱ الف) نشان داده شده است. مشخصه‌های تک تک اجزاء در شکل (۱۰-۱ ب) نشان داده شده‌اند. نشان دهید که اتصال سری دارای مشخصه نشان داده شده در شکل (۱۰-۱ پ) است.

خلاصه در مورد اتصال سری عناصر، KCL جریان یکسانی در همه عناصر (شاخه‌ها) برقرار می‌کند و KVL لازم می‌دارد که ولتاژ دوسر اتصال سری برابر مجموع



شکل ۱۰-۱ = اتصال سری یک مقاومت خطی، یک دیود ایده‌آل و یک باتری.

(الف) اتصال سری (ب) مشخصه‌های اختصاصی هر یک (پ) مشخصه کلی.

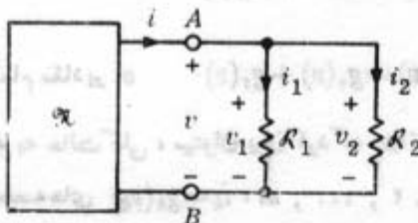
ولتاژهای دوسر همه شاخه‌ها باشد. بنابراین اگر همه مقاومتهای غیر خطی، کنترل شده با جریان باشند مقاومت معادل اتصال سری دارای یک مشخصه $v=f(i)$ است که با جمع کردن توابع $f_k(\cdot)$ که تک تک مقاومتهای کنترل شده با جریان را مشخص میکنند بدست میآید. در مورد مقاومتهای خطی مجموع مقاومتهای تک تک عناصر، مقدار مقاومت معادل را میدهد، یعنی برای m مقاومت خطی سری:

$$R = \sum_{k=1}^m R_k$$

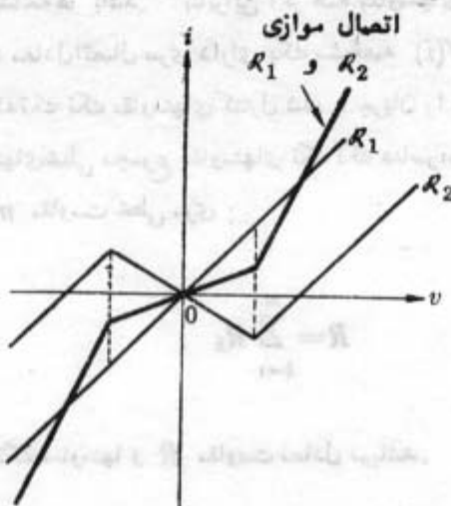
که در آن R_k تک تک مقاومتها و R مقاومت معادل میباشد.

۲- اتصال موازی مقاومتها

مدار شکل (۲-۱) را که در آن دو مقاومت R_1 و R_2 بطور موازی در گره‌های A و B وصل شده‌اند در نظر بگیرید. گره‌های A و B به بقیه مدار که با N نشان داده شده است نیز وصل شده‌اند. توصیف دقیق N برای منظور فعلی ما دارای اهمیت نیست. گیریم دو مقاومت با مشخصه‌هایشان که در شکل (۲-۲) نشان داده شده و در صفحه $v-i$ رسم شده‌اند معین شوند. میخواهیم مشخصه اتصال موازی R_1 و R_2 را پیدا کنیم. بنابراین قوانین کیرشف ملزم میدارند که R_1 و R_2 دارای ولتاژ شاخه یکسان میباشند و جریان داخل اتصال موازی، مساوی مجموع جریانهای داخل هر یک از مقاومتها است. بدین ترتیب مشخصه اتصال موازی با جمع کردن مقادیر جریان مجاز از مشخصه‌های R_1 و R_2 درازاء هر ولتاژ ثابت v بدست میآید. این عمل در شکل (۲-۲) تشریح گردیده است.



شکل ۲-۱- اتصال موازی دو مقاومت



شکل ۲-۲- مشخصه‌های R_1 و R_2 و اتصال موازی آنها

مشخصه‌ای که این چنین بدست آمده مشخصهٔ مقاومت «معادل» اتصال موازی می‌باشد. از نظر تحلیلی، اگر R_1 و R_2 کنترل شده با ولتاژ باشند مشخصهٔ آنها را می‌توان بشکل زیر توصیف کرد:

$$(۲-۱) \quad i_1 = g_1(v_1) \quad i_2 = g_2(v_2)$$

و از نظر قوانین کیرشف، اتصال موازی دارای مشخصه‌ای است که باین صورت توصیف می‌شود.

$$(۲-۲) \quad i = i_1 + i_2 = g_1(v) + g_2(v)$$

بعبارت دیگر اتصال موازی با تابع $g(0)$ که بصورت زیر است توصیف می‌گردد:

$$(۲-۳) \quad i = g(v)$$

که در آن:

$$(۲-۳) \quad g(v) = g_1(v) + g_2(v) \quad \text{برای تمام مقادیر } v$$

باتعمیم این نتیجه به حالت کلی، می‌توان بیان کرد که «اتصال موازی m مقاومت کنترل شده با ولتاژ با مشخصه‌های $i_k = g_k(v_k)$ ، $k = 1, 2, \dots, m$ ، معادل یک مقاومت کنترل شده با ولتاژ تنها با مشخصهٔ $i = g(v)$ است که در آن برای تمام مقادیر v ،

۱۰۹

مدارهای ساده

اگر در حالت خاص همه مقاومتها خطی باشند، یعنی $i_k = G_k v_k$ ، $g(v) = \sum_{k=1}^m g_k(v)$.
مقاومت معادل نیز خطی است و $i = Gv$ که در آن:

(۲-۴)

$$G = \sum_{k=1}^m G_k$$

G رسانائی مقاومت معادل است. برحسب مقادیر مقاومتها داریم:

$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{\sum_{k=1}^m G_k}$$

یا:

(۲-۵)

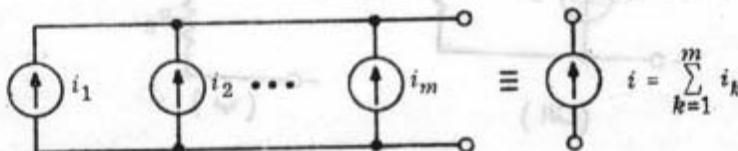
$$\frac{1}{R} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{R_k}$$

مثال ۱ اتصال موازی m منبع جریان مطابق شکل (۲-۳) معادل یک منبع جریان تنها است که جریان آن برابر است با:

(۲-۶)

$$i = \sum_{k=1}^m i_k$$

مثال ۲ اتصال موازی منابع ولتاژ و ولتاژ، KVL را نقض میکند بجز در یک مورد جزئی که همه منابع ولتاژ برابر باشند.



شکل ۲-۳- اتصال موازی منابع جریان
 $i = \sum_{k=1}^m i_k$

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

مثال ۳ اتصال موازی یک منبع جریان i_1 و یک مقاومت خطی با مقاومت R_T طبق شکل (۲-۴ الف) را میتوان با یک مقاومت معادل که به صورت زیر مشخص میشود نشان داد:

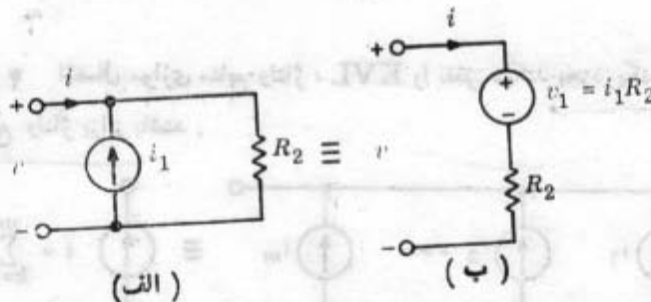
$$(۲-۷) \quad i = -i_1 + \frac{1}{R_T} v$$

معادله (۲-۷) را میتوان چنین نوشت:

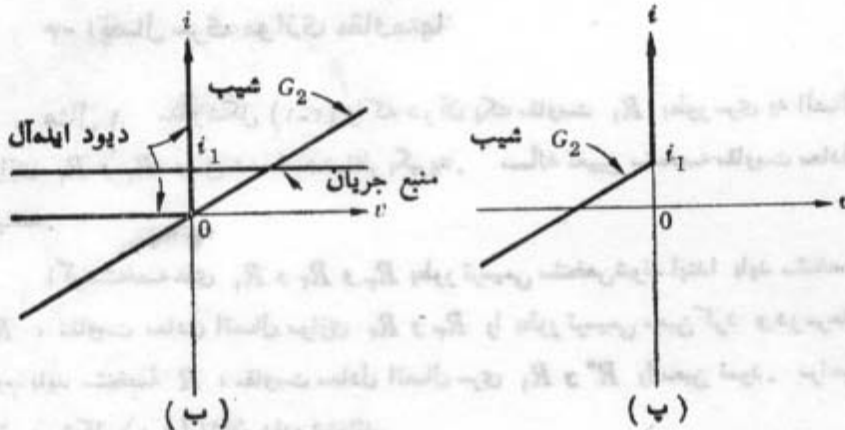
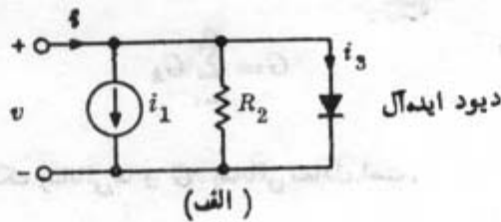
$$(۲-۸) \quad v = i_1 R_T + i R_T$$

با تعبیر ولتاژ v بصورت مجموع دو جمله، میتوان مدار معادل دیگری متشکل از یک منبع ولتاژ $v_1 = i_1 R_T$ و یک مقاومت خطی با مقاومت R_T مطابق شکل (۲-۴ ب) بدست آورد. این معادل بودن که در بخش ۲ فصل دوم نیز در مورد آن بحث شد، حالت خاصی از قضیه مدار معادل تونن و نرتن است و در تجزیه و تحلیل مدار بسیار مفید می‌باشد.

مثال ۴ اتصال موازی یک منبع جریان، یک مقاومت خطی و یک دیود ایده‌آل در شکل (۲-۵ الف) و مشخصه‌های آنها در شکل (۲-۵ ب) نشان داده شده است. مقاومت معادل دارای مشخصه نشان داده شده در شکل (۲-۵ پ) است. مجدداً باید خاطرنشان ساخت که در مورد یک دیود ایده‌آل جریان تابعی از ولتاژ نیست. هرچند میتوان با استفاده از استدلال فیزیکی مشخصه حاصل را بدست آورد، یعنی برای مقادیر منفی v مشخصه مقاومت معادل از جمع کردن سه منحنی بدست می‌آید.



شکل ۲-۵- پ یک قطبی‌های معادل که یک حالت ساده قضایای مدار معادل تونن و نرتن را تشریح میکنند



شکل ۲-۵- اتصال موازی یک منبع جریان، یک مقاومت خطی و یک دیود ایده‌آل
(الف) مدار (ب) مشخصه هر عنصر (پ) مشخصه اتصال موازی

برای مقادیر مثبت i_2 ، دیود ایده‌آل یک مدار با اتصال کوتاه و بنابراین ولتاژ دوسر آن همواره صفر است. در نتیجه اتصال موازی دارای مشخصه نشان داده در شکل (۲-۵ پ) است.

خلاصه برای اتصال موازی عناصر، KVL لازم می‌دارد که ولتاژهای دوسر عناصر یکی باشند و KCL لازم می‌دارد که جریان درون اتصال موازی مساوی مجموع جریان همه شاخه‌ها باشد. در مورد مقاومتهای غیر خطی کنترل شده با ولتاژ، مقاومت معادل اتصال موازی دارای مشخصه $i = g(v)$ می‌باشد که با جمع کردن تک‌تک توابع $g_k(0)$ که هر یک از مقاومتهای کنترل شده با ولتاژ را جداگانه مشخص می‌کنند بدست می‌آید. در مورد مقاومتهای خطی، مجموع تک‌تک رسانائی‌ها، رسانائی معادل را میدهد. بنابراین برای m مقاومت خطی موازی داریم:

$$G = \sum_{k=1}^m G_k$$

که در آن G_k تک تک رسانائی‌ها و G رسانائی معادل است.

۳- اتصال سری موازی مقاومتها

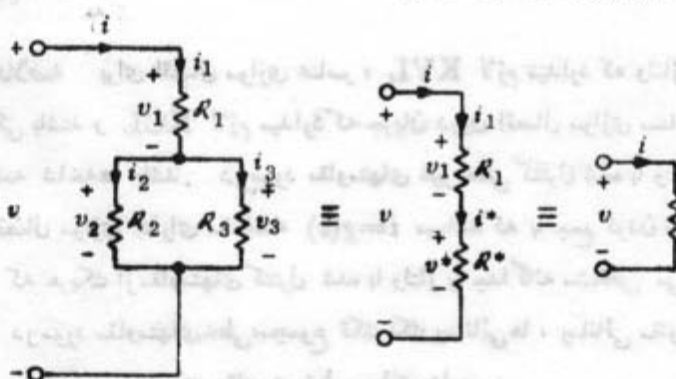
مثال ۱ مدار شکل (۳-۱) را که در آن یک مقاومت R_1 بطور سری به اتصال موازی R_2 و R_3 وصل شده است در نظر بگیرید. مسأله تعیین مشخصه مقاومت معادل می‌باشد.

اگر مشخصه‌های R_1 و R_2 و R_3 بطور ترسیمی مشخص شوند ابتدا باید مشخصه R^* ، مقاومت معادل اتصال موازی R_2 و R_3 را بطور ترسیمی معین کرد و در مرحله دوم باید مشخصه R ، مقاومت معادل اتصال سری R_1 و R^* را معین نمود. مراحل لازم در شکل (۳-۱) نشان داده شده‌اند.

گیریم مشخصه‌های R_2 و R_3 کنترل شده باولتاژ باشند و بصورت زیر مشخص شوند.

$$i_2 = g_2(v_2) \quad \text{و} \quad i_3 = g_3(v_3) \quad (۳-۱)$$

که در آن $g_2(0)$ و $g_3(0)$ توابع تک ارز می‌باشند. اتصال موازی دارای مقاومت معادل R^* است که باینصورت مشخص می‌شود:



شکل ۳-۱- اتصال سری موازی مقاومتها و ساده کردن متوالی آن

$$(۳-۲) \quad i^* = g(v^*)$$

که در آن طبق شکل (۳-۱) i^* و v^* جریان شاخه و ولتاژ شاخه مقاومت R^* هستند. اتصال موازی لازم میدارد که ولتاژهای v_1 و v_2 مساوی v^* باشند. جریان حاصله i^* با مجموع i_1 و i_2 برابر است. بنابراین مشخصه R^* با مشخصه های R_1 و R_2 بصورت زیر مربوط میشود:

$$(۳-۳) \quad g(v^*) = g_1(v^*) + g_2(v^*) \quad \text{برای تمام مقادیر } v^*$$

گیریم که $g_1(0)$ و $g_2(0)$ طبق شکل (۳-۲) الف) مشخص شود. $g(0)$ با جمع دو تابع بدست میآید.

قدم بعدی بدست آوردن مشخصه اتصال سری R_1 و R^* است. گیریم که مشخصه R_1 کنترل شده با جریان باشد و بصورت زیر مشخص گردد.

$$(۳-۴) \quad v_1 = f_1(i_1)$$

که در آن $f_1(0)$ مطابق شکل (۳-۲) ب) یک تابع تک ارز است. اتصال سری R_1 و R^* دارای مقاومت معادل R ، طبق شکل (۳-۱) است. مشخصه R را که بصورت زیر مشخص میشود:

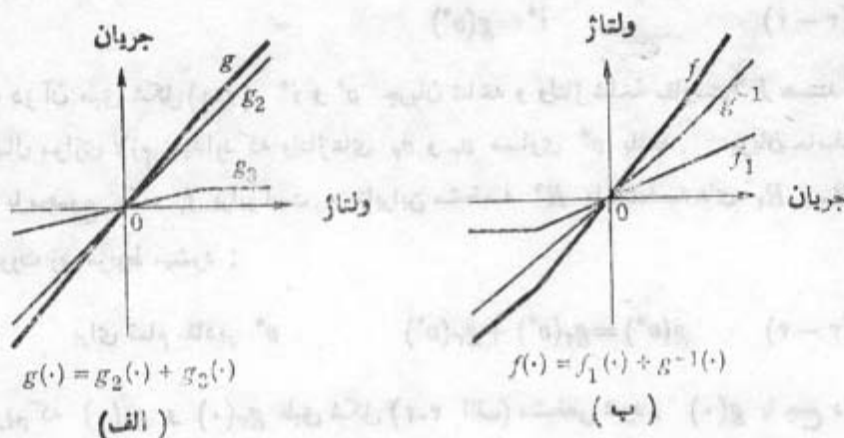
$$(۳-۵) \quad v = f(i)$$

باید تعیین کرد. واضح است که اتصال سری لازم میدارد که جریانهای i_1 و i^* یکسان بوده و برابر i باشند و بسادگی ولتاژ v مجموع v_1 و v^* است. اگرچه برای جمع کردن دو ولتاژ باید اول بتوانیم v^* را برحسب i^* پیدا کنیم، از رابطه (۳-۲) میتوان نوشت:

$$(۳-۶) \quad i^* = g^{-1}(v^*)$$

که در آن $g^{-1}(0)$ تابع معکوس $g(0)$ است. در مورد مثال فوق، تابع معکوس $g^{-1}(0)$ در صفحه جریان - ولتاژ در شکل (۳-۲) ب) مستقیماً از تابع $g(0)$ در صفحه ولتاژ - جریان در شکل (۳-۲) الف) رسم شده است. این عمل باسانی با معکوس نمودن منحنی $g(0)$ و تشکیل تصویر آینه ای آن نسبت به خط مستقیمی که از مبدا میگذرد و با

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها



شکل ۲-۳- مثال ۱: اتصال سری موازی مقاومتها

محورها زاویه 90° میسازد، انجام میگیرد. بنابراین اتصال سری R_1 و R^* با تابع $f(i)$ از رابطه (۲-۵) مشخص میشود که در آن:

$$f(i) = f_1(i) + g^{-1}(i) \quad \text{برای تمام مقادیر } i$$

این مشخصه نیز در شکل (۲-۳ ب) رسم شده است. بنابراین مرحله اساسی در بدست آوردن مشخصه نهایی این سؤال است که آیا $g^{-1}(i)$ بتواند یک تابع تک‌ارز وجود دارد یا نه؟ اگر تابع معکوس وجود نداشته باشد، روش تبدیل با شکست مواجه میشود. درحقیقت هیچ نمایش معادلی بصورت توابع تک‌ارز وجود ندارد. یک معیار ساده که وجود چنین طرز نمایشی را تضمین میکند آنست که همهٔ مقاومتها دارای مشخصه‌های افزایشی یکنوازی دقیق (۱) باشند. بعنوان مثال، مقاومت‌های خطی با مقاومت مثبت، افزایشی یکنوازی میباشند. مقاومت معادل R برای مدار شکل (۲-۱) با فرض خطی بودن همهٔ مقاومتها برابر است با:

$$(۲-۷) \quad R = R_1 + \frac{1}{1/R_2 + 1/R_3}$$

که در آن R_1 و R_2 و R_3 بترتیب عبارتند از مقاومت‌های R_1 و R_2 و R_3 .

تمرین مداری که در شکل (۲-۳) نشان داده شده شبکهٔ نردبانی نامحدود (۲)

نامیده میشود. همه مقاومتها خطی هستند و مقاومتهای سری دارای مقاومت R_s و مقاومتهای موازی دارای مقاومت R_p میباشد. مقاومت ورودی R یعنی مقاومت یک قطبی معادل را تعیین کنید.

راهنمایی: چون نردبان از رشته نامحدودی از طبقات مشابه تشکیل مییابد (یک R_s سری و یک R_p موازی) میتوان طبقه اول را منتهی بیک زنجیر نامحدود با همان تعداد زیاد از طبقات کاملاً مشابه در نظر گرفت. بنابراین اگر طبقه اول به یک مقاومت با مقاومت R منتهی شود مقاومت ورودی R تغییر نخواهد کرد.

تا حال مسأله تعیین مشخصه های مقاومت معادل اتصالیهای سری، موازی و سری-موازی مقاومتها را بررسی کردیم. در تجزیه و تحلیل مدار اغلب پیدا کردن ولتاژها و جریانهای درقسمتهای مختلف مدار وقتی منابع بکار میروند، توجه ما را جلب میکند. مثالهای زیر نحوه حل این مسائل را تشریح میکند.

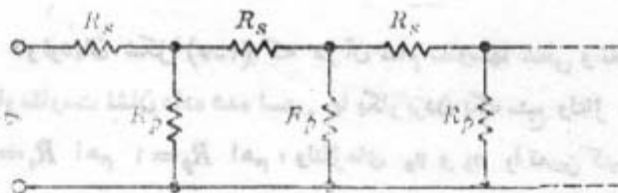
مثال ۲ مدار ساده نشان داده شده در شکل (۳-۴) را در نظر بگیرید که در آن R_p و R_s مقاومتهای کنترل شده با ولتاژ میباشد و به اینصورت مشخص میشوند:

$$i_1 = 1 + v_1 + v_1^2 \quad \text{و} \quad i_2 = 3v_2 \quad (3-8)$$

i_0 یک منبع جریان ثابت با جریان ۲ آمپر است. منظور ما یافتن جریانهای i_1 و i_2 و ولتاژ v است. چون $v = v_1 = v_2$ ، مشخصه مقاومت معادل ترکیب موازی بسادگی بدست میآید.

$$i = i_1 + i_2$$

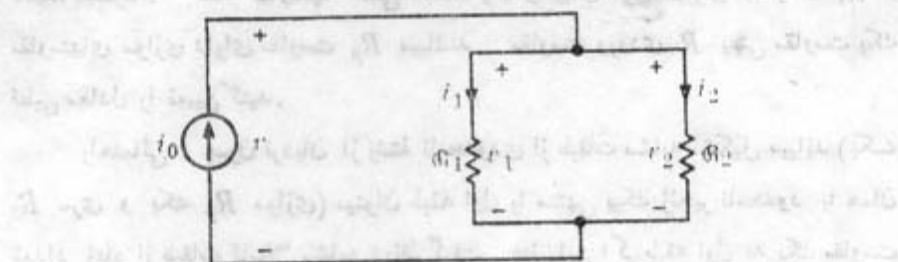
$$= 1 + v + v^2 + 3v = 1 + 4v + v^2 \quad (3-9)$$



شکل ۳-۳ یک نردبان نامحدود متشکل از مقاومتهای خطی. R_s را مقاومت سری

و R_p را مقاومت موازی مینامیم. R مقاومت ورودی یعنی مقاومت

یک قطبی معادل میباشد.



شکل ۳-۴ = مثال ۲ : اتصال موازی مقاومتها و یک منبع جریان

برای بدست آوردن ولتاژ v به ازاء جریان $i = i_0 = 2$ آمپر، لازمست معادله (۳-۹) را حل کنیم. بنابراین :

$$v^2 + 4v + 6 = 2$$

یا :

$$v = -2 \quad \text{ولت} \quad (3-10)$$

چون $v = v_1 = v_2$ ، با جایگزینی (۳-۱۰) در (۳-۸) بدست میآوریم :

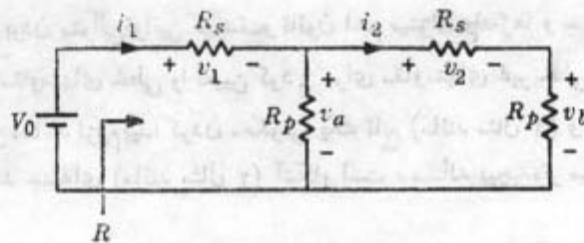
$$i_1 = 8 \quad \text{آمپر}$$

$$i_2 = -6 \quad \text{آمپر}$$

تمرین توان تلف شده در هر یک از مقاومتها را تعیین کنید و نشان دهید که مجموع تلفات توان آنها با توان تحویل داده بوسیله منبع جریان برابر است.

مثال ۳ در نردبان شکل (۳-۵) که در آن تمام مقاومتها خطی و تغییر ناپذیر بازمان هستند، چهار مقاومت نشان داده شده است. با بکار بردن یک منبع ولتاژ $V_0 = 10$ ولت وانتخاب $R_3 = 2$ اهم $R_4 = 1$ اهم ، ولتاژهای v_3 و v_4 را تعیین کنید.

ابتدا مقاومت ورودی R یکک قطبی معادل را که منبع ولتاژ V_0 با آن روبرو میشود پیدا میکنیم. بر مبنای روش اتصال سری - موازی مقاومتها ، بلافاصله فرمولی مشابه معادله (۳-۷) پیدا میکنیم ، بنابراین :



شکل ۳-۵- مثال ۳: یک نردبان با مقاومتهای خطی

$$R = R_s + \frac{1}{1/R_p + 1/(R_s + R_p)}$$

$$= 2 + \frac{1}{1 + 1/2}$$

$$= 2 \frac{2}{3} \text{ اهم}$$

بنابراین جریان i_1 باینصورت داده میشود:

$$i_1 = \frac{V_0}{R} = \frac{10}{2 \frac{2}{3}} = \frac{15}{2} \text{ آمپر}$$

ولتاژ شاخه v_1 باینصورت داده میشود:

$$v_1 = R_s i_1 = \frac{10}{2} \text{ ولت}$$

با استفاده از KVL برای حلقه اول بدست میآید:

$$v_a = V_0 - v_1 = \frac{10}{2} \text{ ولت}$$

با دانستن v_a فوراً تعیین میکنیم:

$$i_2 = \frac{v_a}{R_s + R_p} = \frac{\frac{10}{2}}{2} = \frac{10}{4} \text{ آمپر}$$

از قانون اهم داریم:

$$v_b = R_p i_2 = \frac{10}{2} \text{ ولت}$$

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

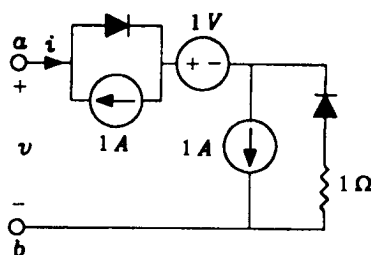
بنابراین با بکار بردن متوالی قوانین کیرشف و قانون اهم میتوان ولتاژها و جریانهای هر اتصال سری - موازی مقاومتهای خطی را تعیین کرد. برای مقاومتهای غیر خطی، همانطور که از مشکلات ممکن، مانند لزوم پیدا کردن معکوس یک تابع (مانند مثال ۱) و پیدا کردن جواب یک معادله چند جمله‌ای (مانند مثال ۲) آشکار است، مسأله پیچیده‌تر میباشد.

تمرین ۱ برای نردبان نامحدود شکل (۳-۲) نسبت R_p/R_s را چنان تعیین کنید که ولتاژ هر گره نصف ولتاژ گره قبلی باشد.

تمرین ۲ فرض کنید میخواهیم یک نردبان محدود مثلاً یک زنجیر متشکل از ۱۰ طبقه را با نسبت R_p/R_s یافته شده در تمرین ۱ طرح کنیم. این زنجیر را چگونه ختم کنیم تا آنکه خاصیت تشریح شده در تمرین ۱ برقرار باشد؟ در مورد مدارهای مقاومتی که بشکل اتصال سری - موازی نیستند، تجزیه و تحلیل بازهم پیچیده‌تر است. در فصلهای ۱۰ و ۱۱ برای تجزیه تحلیل مدارهای با مقاومت خطی، روشهای عمومی ارائه خواهیم کرد. باین حال معرفی مثالی از نوع غیر سری - موازی که میتوانیم در حال حاضر با استدلال فیزیکی ساده حل کنیم مفید است.

مثال ۴ مدار پل^(۱) شکل (۳-۶) را در نظر بگیرید و توجه کنید که بشکل یک اتصال سری - موازی نیست. فرض کنید که چهار مقاومت یکسان هستند. واضح است که بعلت تقارن، جریان i_b باتری باید بطور مساوی در گره A و همچنین در گره B تقسیم شود. یعنی $i_1 = i_2 = i_b/2$ و $i_3 = i_4 = i_b/2$. در نتیجه جریان i_5 باید صفر باشد.

تمرین دوازده مقاومت خطی هریک با مقاومت R بر روی یالهای یک مکعب چیده شده‌اند. در هر رأس مکعب مقاومتهای بهم لحیم شده‌اند. دو گره که در دو رأس متقابل قطر مکعب قرار دارند ① و ② نامیده می‌شوند. مقاومت معادل بین گره‌های ① و ② چقدر است؟ (راهنمایی: پرسپکتیو^(۲) مکعب را رسم کرده و با استفاده از بحث‌های تقارن، چگونگی تقسیم جریان در هر گره را تعیین کنید).



شکل تمرین ۳.

اگر منبع ولتاژ $v_s(t) = 2 \cos \frac{\pi t}{4}$ را در سرهای a و b وصل کنیم، جریان $i(t)$ گذرنده از مدار را تعیین و شکل موج آن را برای یک پریود رسم کنید.

در مورد مدارهای مقاومتی که به شکل اتصال سری-موازی نیستند، تجزیه و تحلیل باز هم پیچیده‌تر است. گرچه در فصلهای ۱۰ و ۱۱ برای تجزیه و تحلیل مدارهای با مقاومت خطی، روشهای عمومی ارائه خواهیم کرد؛ لیکن بیان روشهای تحلیل مدارهای مقاومتی ساده با استفاده از روش تحلیل گره و روش تحلیل مش در این مرحله، بسیار سودمند است.

* روشهای تحلیل مدارهای مقاومتی

همان‌طوری که می‌دانیم منظور از تحلیل یک مدار به دست آوردن ولتاژ و جریان تمام شاخه‌ها و یا دسته معینی از شاخه‌ها است. اساس کلیه روشهای تحلیل مدار اعمال مناسب قوانین KCL و KVL و نوشتن درست معادلات شاخه‌ها می‌باشد. یعنی نقطه شروع هر روش تحلیل مدار نوشتن تمام معادلات KCL و KVL و همچنین تمام معادلات شاخه‌ها است. اختلاف اصلی میان روشهای مختلف تحلیل مدار در تعداد و نوع متغیرهایی است که نهایتاً به عنوان متغیرهای مدار در نظر گرفته شده و بقیه متغیرهای باقیمانده حذف می‌شوند. در میان روشهای کلی تحلیل مدار می‌توان از دو روش مهم **تحلیل گره** و **تحلیل مش** نام برد. چون اعمال این روشها در مدارهای مقاومتی خطی به معادلات جبری خطی منجر می‌شوند که به سادگی با روش کرامر حل می‌شوند، از این رو بهتر است هرچه زودتر با این روشها و کاربرد آنها در تحلیل مدارهای مقاومتی آشنا شویم و تجربیات مفیدی در به کارگیری آنها در حل انواع مدارهای متفاوت کسب کنیم و سپس آنها را به راحتی به مدارهای مرتبه بالاتر که شامل سلف‌ها و خازن‌ها بوده و به معادلات دیفرانسیل منجر می‌شوند، اعمال کنیم.

* ۱- روش تحلیل گره

همان‌طوری که از نام روش تحلیل گره برمی‌آید، در این روش متغیرهای مورد نظر **ولتاژ گره‌ها** هستند و چون ولتاژ گره‌ها نسبت به هم سنجیده می‌شوند بنابراین ابتدا گرهی را به عنوان **گره مبنا** یا ولتاژ دلخواه انتخاب می‌کنیم. سپس با به کارگیری روش تحلیل گره **ولتاژ گره‌های دیگر** را نسبت به این گره مبنا به دست

می‌آوریم. بنابراین تعداد متغیرهای انتخاب شده برابر تعداد گره‌ها منهای یک خواهد بود. از آنجایی که انتخاب ولتاژ گره مبنا دلخواه است، معمول براین است که برای راحتی کار ولتاژ گره مبنا را صفر انتخاب کنیم. معمولاً گره‌ای را که تعداد بیشتری شاخه یا منبع ولتاژ به آن وصل شده است به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم. گره مبنا را با علامت زمین، یعنی به صورت $\perp$ ، مشخص می‌کنیم. بدیهی است چون ولتاژ هر شاخه برابر تفاضل ولتاژ گره‌های دوسر آن شاخه است، پس با معلوم بودن ولتاژ گره‌ها، ولتاژ تمام شاخه‌ها به دست می‌آیند. چون مدار را مقاومتی فرض کردیم بنابراین با معلوم بودن ولتاژ هر شاخه جریان آن شاخه نیز به راحتی به دست می‌آید.

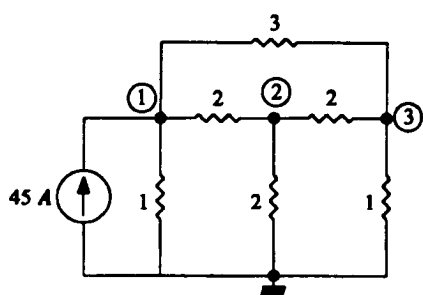
از آن‌جا که اساس روش تحلیل گره نوشتن معادلات KCL در تمام گره‌ها به استثنای گره مبنا است، پس ابتدا باید تمام منابع ولتاژ سری با مقاومتها را به منابع جریان موازی با آنها تبدیل کرد. همچنین چون جهت واقعی جریان در شاخه‌ها را نمی‌دانیم هنگام نوشتن معادلات KCL جهت تمام شاخه‌ها را جهت‌های خارج شونده از گره در نظر می‌گیریم.

با توجه به آنچه که گفته شد می‌توان مراحل مختلف روش تحلیل گره را به شرح زیر بیان نمود:

- ۱- ابتدا گره‌ای را به عنوان گره مبنا انتخاب کرده و ولتاژ آن را صفر در نظر بگیرید.
- ۲- همه گره‌های مدار را شماره گذاری کنید و گره مبنا را با شماره صفر نشان دهید.
- ۳- ولتاژ گره‌ها را نسبت به گره مبنا به عنوان متغیرهای مدار انتخاب کنید.
- ۴- قانون KCL را در تمام گره‌های مدار به جز گره مبنا بنویسید (معادلات گره) و سعی کنید معادلات حاصل منحصرأ بر حسب ولتاژ گره‌ها نوشته شوند. یعنی متغیرهای دیگر را بر حسب ولتاژ گره‌های انتخاب شده بیان کنید.
- ۵- منابع وابسته را از هر نوع که باشند مانند منابع ناپسته در نظر بگیرید و پس از اعمال KCL به گره‌ها، سعی کنید فقط متغیرهای ولتاژ گره‌ها در معادلات ظاهر شوند.
- ۶- در حالت کلی، اعمال مراحل فوق به هر مدار مقاومتی به n معادله n مجهولی بر حسب متغیرهای ولتاژ گره منجر می‌شود (n تعداد گره‌ها به استثنای گره مبنا است). این معادلات را با روش کرامر یا هر روش دیگری که راحت‌تر باشد، حل کنید و ولتاژ گره‌ها را به دست آورید.
- ۷- ولتاژ هر شاخه برابر تفاضل ولتاژ گره‌های دوسر آن شاخه است و جریان هر شاخه با استفاده از رابطه اساسی آن شاخه، که در این فصل تمام شاخه‌ها را مقاومتی فرض می‌کنیم، به دست می‌آید.

مثال ۱ مدار شکل (۱-۱) را با روش تحلیل گره تحلیل کنید و ولتاژ گره‌های آن را به دست آورید. مقادیر رسانایی‌ها بر حسب مهو داده شده‌اند.

مدار دارای چهار گره است. یکی از آنها را به عنوان گره مبنا انتخاب می‌کنیم و ولتاژ آن را برای راحتی صفر در نظر می‌گیریم. گره‌های دیگر مدار را با شماره‌های ①، ② و ③ مشخص می‌کنیم و ولتاژ آنها را به



شکل ۱-۱* مثال ۱.

ترتیب با e_1 ، e_2 و e_3 نشان می‌دهیم. با اعمال KCL در سه گره ①، ② و ③ به دست می‌آوریم:

$$e_1 + 2(e_1 - e_2) + 3(e_1 - e_3) = 45 \quad (1-*)$$

$$2(e_2 - e_1) + 2e_2 + 2(e_2 - e_3) = 0 \quad (2-*)$$

$$3(e_3 - e_1) + 2(e_3 - e_2) + e_3 = 0 \quad (3-*)$$

توجه کنید که اگر سه معادله فوق را با هم جمع کنیم به دست می‌آوریم:

$$e_1 + 2e_2 + e_3 = 45 \quad (4-*)$$

معادله (۴-*) نشانگر اعمال KCL در گره مبنا است. یعنی اعمال KCL در گره مبنا معادله مستقلی از نوشتن KCL در گره‌های دیگر به دست نمی‌دهد و بدین دلیل است که در تحلیل گره ما KCL را در همه گره‌های مدار به استثنای گره مبنا می‌نویسیم.

معادلات (۱-*)، (۲-*) و (۳-*) پس از ساده کردن به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$6e_1 - 2e_2 - 3e_3 = 45 \quad (5-*)$$

$$-2e_1 + 6e_2 - 2e_3 = 0 \quad (6-*)$$

$$-3e_1 - 2e_2 + 6e_3 = 0 \quad (7-*)$$

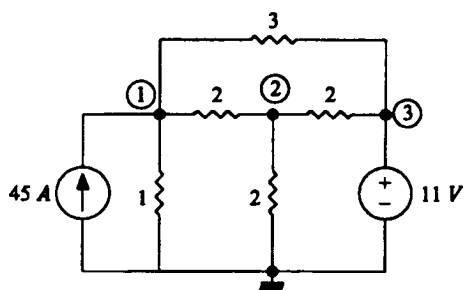
از حل دستگاه معادلات فوق با روش کرامر یا هر روش دیگر به دست می‌آوریم:

$$e_1 = 16 \text{ ولت}, \quad e_2 = 9 \text{ ولت}, \quad e_3 = 11 \text{ ولت}$$

بدیهی است با دانستن ولتاژ گره‌ها می‌توان ولتاژ و جریان تمام شاخه‌ها را تعیین کرد.

مثال ۲ فرض کنید در مدار شکل (۱-۱*)

مقاومت یک اهمی وصل شده به گره ③ را با منبع ولتاژ ۱۱ ولتی مطابق شکل (۲-۱*) تعویض کنیم. بار دیگر مدار را تحلیل کرده و ولتاژ گره‌ها را بدست آورید.



شکل ۲-۱* مثال ۲.

گرچه مدار دارای سه گره و یک گره مبنا است، لیکن ولتاژ گره ③ دیگر مجهول نبوده و برابر ۱۱ ولت است. در حقیقت با انتخاب دو متغیر

مجهول e_1 و e_2 و اعمال KCL فقط در گره‌های ① و ② به دست می‌آوریم:

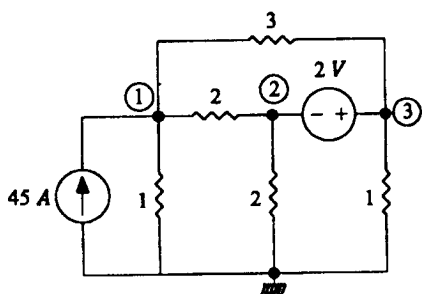
$$6e_1 - 2e_7 = 78 \quad (۸-*)$$

$$-2e_1 + 6e_7 = 22 \quad (۹-*)$$

از حل این دو معادله، مقادیر ولتاژهای گره‌ها را به صورت $e_1 = ۱۶$ ولت و $e_7 = ۹$ ولت، به دست می‌آوریم.

تبصره ۱ گرچه ولتاژ گره ۳ مجهول نبود، ولی اعمال KCL به این گره مستلزم معرفی یک متغیر جدید I_E به نام جریان گذرنده از منبع ولتاژ ۱۱ ولتی است. بنابراین نوشتن KCL در گره‌ای که منبع ولتاژی به آن وصل است، متغیر جدیدی را وارد معادلات می‌کند که اثر نوشتن یک معادله اضافی را از میان می‌برد. در نتیجه، در هنگام به کار بردن روش تحلیل گره اعمال KCL در گره‌هایی که منابع ولتاژ به آنها وصل است، چندان مؤثر نخواهد بود.

تبصره ۲ در مثال ۱ چنین به دست می‌آوریم که $e_7 = ۱۱$ ولت، یعنی ولتاژ شاخه یک اهمی برابر ۱۱ ولت است. ما این شاخه را با منبع ولتاژی جایگزین کردیم که ولتاژ آن دقیقاً برابر ولتاژ همین شاخه بود و به طوری که ملاحظه کردیم ولتاژ گره‌های دیگر همان مقادیر قبلی به دست آمد و هیچ تغییری در ولتاژ گره‌های مدار به وجود نیامد. در حقیقت این مطلب بیانگر یک قضیه مهم مدار به نام **قضیه جانشینی** است که در فصل ۱۶ بیان و اثبات خواهد شد. مفهوم اصلی این قضیه آن است که اگر پس از تحلیل یک مدار، هر شاخه آن را با یک منبع ولتاژ یا منبع جریان نایسته که مقادیر آنها به ترتیب برابر ولتاژ شاخه یا جریان شاخه باشد، جایگزین کنیم، هیچ‌گونه تغییری در مقادیر ولتاژ و جریان شاخه‌ها حاصل نمی‌شود.



شکل ۳-۱* مثال ۳.

مثال ۳ همان مدار مثال ۱ را بار دیگر در نظر بگیرید و مقاومت $\frac{1}{3}$ اهمی وصل شده میان گره‌های ۲ و ۳ را با منبع ولتاژ نایسته ۲ ولتی مطابق شکل (۳-۱*) جایگزین کنید. ولتاژ گره‌های این مدار را به دست آورید.

البته چون ولتاژ شاخه وصل شده میان گره‌های

۲ و ۳ در مثال ۱ برابر ۲ ولت بود، مطابق قضیه

جانشینی انتظار داریم ولتاژ گره‌های مدار تغییر نکرده، همان مقادیر به دست آیند. اکنون این مدار را با روش تحلیل گره حل می‌کنیم و نتایج مورد انتظار را به دست می‌آوریم.

در این مدار سه ولتاژ گره مجهول داریم؛ لیکن میان e_1 و e_7 رابطه $e_7 - e_1 = 2$ برقرار است. با توجه به تبصره ۱ مثال ۲، اعمال KCL به تنهایی در گره ۲ یا گره ۳ چندان سودمند نخواهد بود؛ زیرا جریان گذرنده از منبع ۲ ولتی به عنوان یک متغیر اضافی در معادلات ظاهر خواهد شد. لیکن با اعمال KCL در گره مرکب متشکل از گره‌های ۲ و ۳ که شاخه منبع ولتاژ در درون آن قرار می‌گیرد، نیازی در به کارگیری جریان گذرنده از منبع ولتاژ ۲ ولتی نخواهد بود. بنابراین، با نوشتن KCL در گره مرکب متشکل از گره‌های

② و ③ به دست می‌آوریم:

$$2(e_2 - e_1) + 2e_2 + 3(e_2 - e_1) + e_2 = 0$$

که پس از ساده کردن به صورت $-5e_1 + 4e_2 + 4e_2 = 0$ در می‌آید. با توجه به اینکه KCL در گره ① تغییر نکرده است، پس سه معادله سه مجهولی برحسب ولتاژهای گره e_1 ، e_2 و e_3 به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$6e_1 - 2e_2 - 3e_3 = 40$$

$$-5e_1 + 4e_2 + 4e_3 = 0$$

$$e_2 - e_3 = 2$$

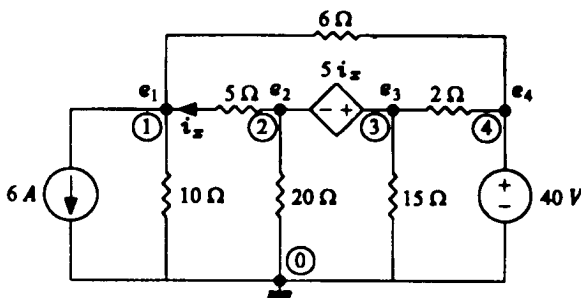
از حل این سه معادله ولتاژهای گره e_1 ، e_2 و e_3 به ترتیب $e_1 = 16V$ ، $e_2 = 9V$ و $e_3 = 11V$ به دست می‌آیند، که همان مقادیر به دست آمده در مثال ۱ است.

تبصره ۱ در اعمال روش تحلیل گره اگر منبع ولتاژی به دو گره زمین نشده، وصل شده باشد؛ راحت‌تر است که KCL را در گره مرکب متشکل از این دو گره بنویسیم تا نیازی به معرفی متغیر اضافی دیگری به عنوان جریان منبع ولتاژ نباشد.

تبصره ۲ در اعمال روش تحلیل گره تفاوت چندانی میان منابع وابسته و منابع ناپسته وجود ندارد. می‌توان مراحل گفته شده در روش تحلیل گره را عیناً در مورد آنها نیز اجرا کرد و هر جا که لازم باشد به جای متغیر کنترل کننده منبع وابسته، مقدار آن را برحسب ولتاژهای گره‌ها قرار داد و نهایتاً معادلات گره را به دست آورد.

مثال ۴ مدار داده شده در شکل (۴-۱*) را با روش تحلیل گره حل کنید و ولتاژ گره‌ها را به دست آورید. این مدار دارای چهار گره و یک گره مبنا است و چون منبع ولتاژ ۴۰ ولتی به گره ④ وصل شده است پس $e_4 = 40$. همچنین چون میان گره‌های ② و ③ منبع ولتاژ وابسته $5i_x$ وصل شده است پس داریم:

$$e_3 - e_2 = 5i_x = 5 \frac{e_2 - e_1}{5} = e_2 - e_1$$



شکل ۴-۱* مثال ۴.

که در این جا، به جای جریان کنترل کننده i_x مقدار آن را برحسب ولتاژ گره‌ها یعنی $\frac{e_2 - e_1}{5}$ قرار دادیم. با ساده کردن معادله اخیر به دست می‌آوریم $e_3 = 2e_2 - e_1$. یعنی ولتاژ e_3 را می‌توان برحسب ولتاژ گره‌های e_1 و e_2 نوشت و درحقیقت دو متغیر مجهول e_1 و e_2 داریم. با نوشتن

KCL در کره ① و کره مرکب متشکل از کره‌های ② و ③ به دست می‌آوریم:

$$\frac{e_1}{10} + \frac{1}{5}(e_1 - e_2) + \frac{1}{6}(e_1 - 40) = -6$$

$$\frac{1}{5}(e_2 - e_1) + \frac{1}{40}e_2 + \frac{1}{10}(2e_2 - e_1) + \frac{1}{4}(2e_2 - e_1 - 40) = 0$$

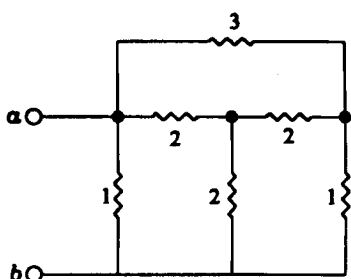
این معادلات پس از ساده کردن به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{7}{10}e_1 - \frac{1}{5}e_2 = \frac{2}{3}$$

$$-\frac{23}{40}e_1 + \frac{13}{80}e_2 = 20$$

از حل این دو معادله برحسب e_1 و e_2 به دست می‌آوریم: $e_1 = 10V$ و $e_2 = 20V$. با در نظر گرفتن $e_3 = 2e_2 - e_1$ داریم: $e_3 = 30V$.

تمرین ۱ منبع ولتاژ کنترل شده با جریان i_x را با منبع جریان وابسته ۳ آمپری با جهت از راست به چپ جایگزین کرده، بار دیگر مسأله را حل کنید. آیا می‌توانید با استفاده از قضیه جانشینی راه ساده‌تری برای حل این مسأله پیشنهاد کنید؟ (جواب: ۳ آمپر)



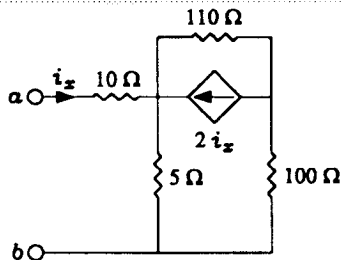
شکل ۵-۱* مثال ۵.

مثال ۵ مقاومت معادل دیده شده در سرهای a و b مدار شکل (۵-۱*) را تعیین کنید. رسانایی‌ها برحسب مهر داده شده‌اند.

می‌توان منبع جریان آزمایشی دلخواه I_T را در سرهای a و b وصل کرد و ولتاژ V_T میان این دوسر را محاسبه نمود. مقاومت معادل دیده شده در سرهای a و b از رابطه:

$$R_{in} = \frac{V_T}{I_T}$$

به دست خواهد آمد. از آنجایی که مقدار I_T دلخواه است، می‌توان برای ساده کردن کار از نتیجه محاسبات مثالهای قبلی استفاده کرد و مانند مثال ۱ مقدار I_T را برابر ۴۵ در نظر گرفت که در این صورت مقدار V_T همان e_1 است برابر ۱۶ ولت خواهد بود؛ پس $R_{in} = \frac{16}{45} \Omega$.



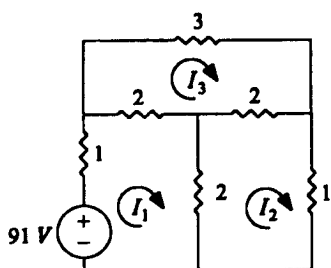
شکل ۶-۱*

تمرین ۲ مقاومت معادل دیده شده در سرهای a و b مدار شکل (۶-۱*) را به دست آورید. (جواب: ۲۰ اهم)

۲-۰ روش تحلیل مش

مش ساده‌ترین حلقه‌ای است که شاخه‌ای در درون آن نباشد. از این رو مش فقط در مدارهایی تعریف می‌شود که به آنها مدارهای مسطح گویند. یعنی مدارهایی که بتوان شکل آنها را روی یک صفحه کاغذ چنان رسم کرد که هیچ دو شاخه‌ای همدیگر را به جز در گره‌ها قطع نکنند. با این تعریف مش، روشن است که هر شاخه یک مدار یا در یک مش تنها قرار می‌گیرد (شاخه‌های بیرونی) و یا در دو مش مشترک است (شاخه‌های درونی). در روش تحلیل مش متغیرهای مورد نظر را جریانهای فرضی در نظر می‌گیرند که در مش‌ها در گردش هستند و از این رو اگر شاخه‌ای در دو مش مشترک باشد جریان هر دو مش از آن شاخه می‌گذرد. انتخاب جهتی برای نشان دادن جریان فرضی یک مش اختیاری است، ولی معمول بر آن است که جهت همه مش‌ها را در جهت عقربه‌های ساعت در نظر می‌گیرند. بنابراین اگر جهت همه مش‌ها را در جهت عقربه‌های ساعت در نظر بگیریم، جریان گذرنده از شاخه‌های مشترک میان دو مش برابر تفاضل جریان آن دو مش خواهد بود. در فصل ۱۰ نشان داده خواهد شد که تعداد مش‌های یک مدار، برابر تعداد شاخه‌ها منهای تعداد گره‌ها به علاوه یک، یعنی $l = b - n_t + 1$ است، که در آن b تعداد شاخه‌ها، n_t تعداد گره‌ها و l تعداد مش‌ها است. همان‌طوری که از قبل می‌دانیم l در واقع همان تعداد متغیرهای مستقل جریان شاخه، در یک مدار است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که جریانهای مش‌ها، متغیرهای مستقل از هم می‌باشند. اساس روش تحلیل مش، نوشتن معادلات KVL در تمام مش‌ها است که از حل این معادلات جریانهای مش‌ها به دست می‌آیند. با معلوم بودن جریان مش‌ها، می‌توان جریان شاخه‌ها و در نتیجه ولتاژ شاخه‌ها را به دست آورد. بنابراین مراحل مختلف روش تحلیل مش را می‌توان به شرح زیر توصیف نمود:

- ۱- ابتدا منابع جریان موازی با مقاومات را به منابع ولتاژ سری با آنها تبدیل کنید.
- ۲- مش‌ها را شماره گذاری کرده و جریانهای آنها را در جهت عقربه‌های ساعت به عنوان متغیرهای مدار انتخاب کنید.
- ۳- جریان شاخه‌ای که فقط در یک مش قرار دارد برابر جریان آن مش و جریان شاخه‌ای که در دو مش مشترک است برابر تفاضل جریانهای آن دو مش است.
- ۴- قانون KVL را در کلیه مش‌های مدار بنویسید و سعی کنید معادلات حاصل، منحصرأ برحسب جریان مش‌ها نوشته شوند؛ یعنی متغیرهای دیگر را برحسب جریانهای مش‌ها بیان کنید.
- ۵- منابع وابسته را مانند منابع ناپسته در نظر بگیرید و پس از اعمال KVL در مش‌ها سعی کنید کلیه متغیرها را برحسب جریانهای مش‌ها بیان کنید.
- ۶- در حالت کلی، اعمال مراحل فوق در هر مدار مقاومتی به یک دستگاه l معادله l مجهولی برحسب جریانهای مش‌ها منجر می‌شود که از حل این معادلات جریان مش‌ها به دست می‌آیند.
- ۷- جریان شاخه‌ها از روی جریان مش‌ها و ولتاژ شاخه‌ها از روی جریان شاخه‌ها به دست می‌آیند.



شکل ۲-۱ مثال ۱.

مثال ۱ مدار نشان داده شده در شکل (۲-۱) را با روش تحلیل مش تحلیل کنید و جریانهای مش را به دست آورید. مقادیر مقاومتها برحسب اهم داده شده‌اند.

ابتدا جریانهای مش را به صورت I_1 ، I_2 و I_3 در جهت عقربه‌های ساعت انتخاب کنید. در این مدار شش مقاومت وجود دارد. سه تا از این مقاومتها شاخه‌های بیرونی بوده و فقط در یک مش قرار دارند و سه تای دیگر مقاومتها شاخه‌های درونی بوده و

در دو مش مشترک هستند. اعمال KVL در این مش‌ها معادلات زیر را به دست می‌دهد:

$$I_1 + 2(I_1 - I_2) + 2(I_1 - I_3) = 91$$

$$2(I_2 - I_1) + 2(I_2 - I_3) + I_2 = 0$$

$$3I_3 + 2(I_3 - I_2) + 2(I_3 - I_1) = 0$$

پس از ساده کردن، سه معادله سه مجهولی زیر را به دست می‌آوریم:

$$5I_1 - 2I_2 - 2I_3 = 91$$

$$-2I_1 + 5I_2 - 2I_3 = 0$$

$$-2I_1 - 2I_2 + 7I_3 = 0$$

از حل این معادلات داریم: $I_1 = 31A$ ، $I_2 = 18A$ و $I_3 = 14A$. با معلوم بودن جریان مش‌ها، جریان شاخه‌ها و ولتاژ شاخه‌ها به راحتی به دست می‌آیند.

مثال ۲ مدار نشان داده شده در شکل (۲-۲) را با روش مش تحلیل کنید.

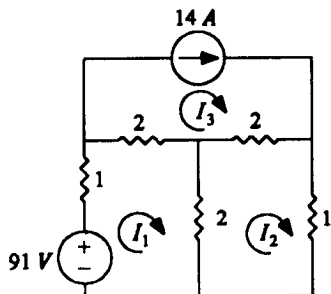
گرچه مدار دارای سه مش است، لیکن جریان مش ۳ مجهول نیست، و مقدار آن برابر $14A$ است. در

حقیقت دو مجهول I_1 و I_2 داریم که با نوشتن KVL در مش‌های ۱ و ۲ دو معادله زیر را به دست می‌آوریم:

$$I_1 + 2(I_1 - 14) + 2(I_1 - I_2) = 91$$

$$2(I_2 - I_1) + 2(I_2 - 14) + I_2 = 0$$

از حل این دو معادله مقادیر جریانهای مش‌ها به صورت $I_1 = 31A$ و $I_2 = 18A$ به دست می‌آیند.

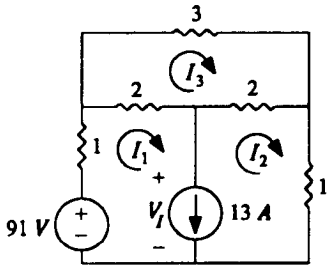


شکل ۲-۲ مثال ۲.

تبصره ۱ گرچه جریان مش ۳ مجهول نیست، لیکن اعمال KVL در این مش مستلزم به کار بردن متغیر مجهول V_3 نشان دهنده ولتاژ دوسر این منبع جریان است. بنابراین نوشتن KVL در مش ۳ که متغیر اضافی V_3 را معرفی می‌کند، کمک چندانی در حل این مدار نمی‌کند.

تبصره ۲ جریان گذرنده از منبع جریان همان جریان مش ۳ در مثال ۱، در نظر گرفته شده است تا یک بار دیگر کاربرد قضیه جانشینی مورد توجه قرار گیرد.

مثال ۳ مدار نشان داده شده در شکل (۳-۲*) را با روش مش تحلیل کنید.



شکل ۳-۲* مثال ۳.

توجه کنید شاخه‌ای که شامل منبع جریان ۱۳ آمپری است در دو مش مشترک است و بنابراین رابطه $I_1 - I_2 = 13$ برقرار است. ولتاژ دوسر منبع جریان را با V_I نشان دهید. اعمال KVL در مش‌های ۱ و ۲ معادلات زیر را به دست می‌دهد:

$$I_1 + 2(I_1 - I_2) + V_I = 91$$

$$2(I_2 - I_1) + I_2 - V_I = 0$$

متغیر V_I در معادله اول با علامت + و در معادله دوم با علامت - ظاهر می‌شود. اگر این دو معادله را با هم جمع کنیم به دست می‌آوریم:

$$I_1 + 2(I_1 - I_2) + 2(I_2 - I_1) + I_2 = 91 \Rightarrow 3I_1 + 3I_2 - 4I_2 = 91$$

این معادله نشان دهنده معادله KVL در حلقه مرکب متشکل از مش‌های ۱ و ۲ می‌باشد (مش حالت خاصی از حلقه است). بنابراین می‌توانستیم از اول معادله KVL را در این حلقه بنویسیم که هیچ متغیر اضافی در آن ظاهر نمی‌شد. مش ۳ هیچ تغییری نکرده و معادله KVL در آن، همان معادله نوشته شده در مثال ۱ است. از این رو سه معادله به دست آمده برحسب جریانهای مش این مدار به صورت زیر است:

$$3I_1 + 3I_2 - 4I_2 = 91$$

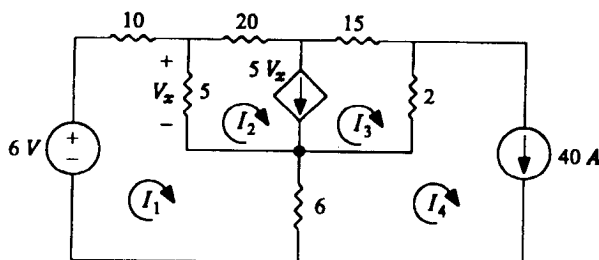
$$I_1 - I_2 = 13$$

$$-2I_1 - 2I_2 + V_I = 0$$

از حل این معادلات به دست می‌آوریم: $I_1 = 31A$ ، $I_2 = 18A$ و $I_3 = 14A$.

تبصره در اعمال روش تحلیل مش، اگر شاخه‌ای تنها از یک منبع جریان تشکیل شود و این شاخه فقط در یک مش قرار داشته باشد، جریان آن مش معلوم است و نیازی به نوشتن KVL در آن مش نمی‌باشد. لیکن اگر این منبع در دو مش مشترک باشد تفاضل جریان آن دو مش معلوم است و به جای نوشتن KVL در هر یک از آن دو مش، راحت‌تر است که KVL را در حلقه متشکل از آن دو مش بنویسیم.

مثال ۴ مدار نشان داده شده در شکل (۴-۲*) را با روش مش تحلیل کنید. مقادیر رسانایی‌ها برحسب مهو داده شده‌اند.



شکل * ۲-۴ مثال ۴.

این مدار چهار مش دارد که جریان مش چهارم آن معلوم است، یعنی $I_4 = 40$. همچنین تفاضل جریانهای مش دوم و سوم بر حسب V_x بیان می شود که خود V_x بر حسب تفاضل جریانهای I_1 و I_2 قابل بیان است، یعنی:

$$I_2 - I_1 = 5V_x = 5\left(\frac{1}{5}(I_1 - I_2)\right) = I_1 - I_2$$

بنابراین I_2 را می توان بر حسب I_1 و I_2 بیان کرد. یعنی: $I_2 = 2I_1 - I_2$. برای حل این مدار به دو معادله نیاز داریم که می توان با نوشتن KVL در مش ۱ و مش ۲ و مش مرکب متشکل از مش های ۲ و ۳ آنها را به دست آورد. یعنی:

$$-6 + \frac{1}{10}I_1 + \frac{1}{5}(I_1 - I_2) + \frac{1}{6}(I_1 - 40) = 0$$

$$\frac{1}{20}I_2 + \frac{1}{15}(2I_2 - I_1) + \frac{1}{4}(2I_2 - I_1 - 40) + \frac{1}{5}(I_2 - I_1) = 0$$

با ساده کردن این معادلات به دست می آوریم:

$$\frac{7}{15}I_1 - \frac{1}{5}I_2 = \frac{2}{3}$$

$$-\frac{23}{30}I_1 + \frac{83}{60}I_2 = 20$$

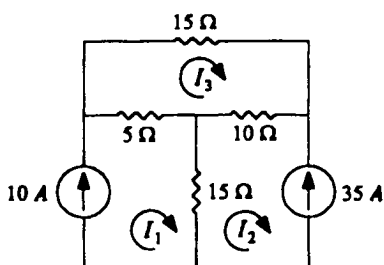
از حل این دو معادله به دست می آوریم: $I_1 = 10A$ و $I_2 = 20A$ و بنابراین $I_3 = 2I_2 - I_1 = 30A$ و

$$I_4 = 40A$$

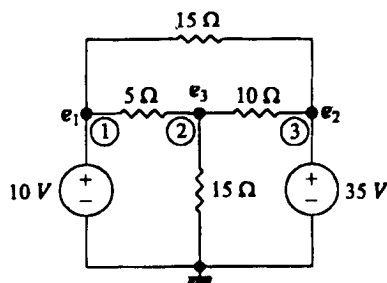
* ۳- انتخاب روش تحلیل مناسب

سوال مهمی که اغلب مطرح می شود این است که برای تحلیل یک مدار داده شده کدام یک از دو روش تحلیل گره یا روش تحلیل مش مناسب تر است. بدیهی است روش تحلیل مناسب بستگی به شکل مدار و منابع موجود در آن دارد. به طور کلی برای تحلیل یک مدار داده شده روشی مناسب است که به معادلاتی با تعداد متغیرهای کمتر منجر شود. بنابراین قبل از آنکه روش تحلیل را انتخاب کنید به دقت به شکل مدار داده شده توجه کنید و مشخص کنید که با انتخاب روشهای تحلیل گره و مش چند متغیر مجهول در نظر گرفته می شود. روشی را انتخاب کنید که به تعداد متغیرهای مجهول کمتر منجر شود.

مثال مدارهای داده شده در شکل‌های (۱-۳* الف و ب) را با روش مناسب تحلیل کنید.



(ب)



(الف)

شکل ۱-۳* مثال.

مدار شکل (الف) دارای سه گره و یک گره مبناست و ولتاژ دو گره آن معلوم هستند، یعنی $e_1 = 10V$ و $e_2 = 35V$. پس این مدار یک متغیر مجهول e_3 دارد که با نوشتن KCL در گره ③ مقدار آن به دست می‌آید. یعنی:

$$\frac{e_3 - 10}{5} + \frac{e_3}{15} + \frac{e_3 - 35}{10} = 0$$

از حل این معادله به دست می‌آوریم: $e_3 = 15V$.

اگر می‌خواستیم مدار شکل (الف) را با روش تحلیل مش حل کنیم، سه متغیر مجهول جریان مش باید در نظر می‌گرفتیم و در نتیجه سه معادله سه مجهولی به دست می‌آوردیم. بنابراین برای مدار شکل (الف) روش تحلیل گره مناسب‌تر است.

در مدار شکل (ب) سه مش داریم که جریان دوتا از آنها معلوم است، یعنی $I_1 = 10A$ و $I_2 = -35A$. پس این مدار یک متغیر مجهول I_3 دارد که با نوشتن KVL در مش ۳ مقدار آن به دست می‌آید. یعنی:

$$15I_3 + 10(I_3 + 35) + 5(I_3 - 10) = 0$$

که از آن به دست می‌آوریم: $I_3 = -10A$.

اگر می‌خواستیم مدار شکل (ب) را با روش تحلیل گره حل کنیم، سه متغیر مجهول ولتاژ گره باید در نظر می‌گرفتیم و در نتیجه سه معادله سه مجهولی به دست می‌آوردیم. بنابراین برای مدار شکل (ب) روش تحلیل مش مناسب‌تر است.

* ۴- تقسیم کلانده ولتاژ و تقسیم کلانده جریان

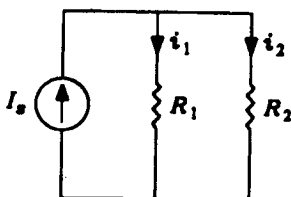
مدار ساده نشان داده شده در شکل (۱-۴*) را در نظر بگیرید که در آن ولتاژ E میان دو مقاومت R_1 و R_2

تقسیم می شود. این مدار را تقسیم کننده ولتاژ گویند. واضح است که اگر بخواهیم ولتاژ خروجی v_o را در دوسر مقاومت R_2 حساب کنیم، به راحتی از رابطه زیر به دست می آوریم:

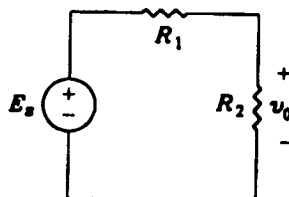
$$v_o = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_s$$

اکنون مدار نشان داده شده در شکل (۲-۴*) را در نظر بگیرید که در آن جریان I_s میان دو مقاومت R_1 و R_2 تقسیم می شود. این مدار را تقسیم کننده جریان گویند. واضح است که اگر بخواهیم جریان i_2 گذرنده از مقاومت R_2 را حساب کنیم، به راحتی از رابطه زیر به دست می آوریم:

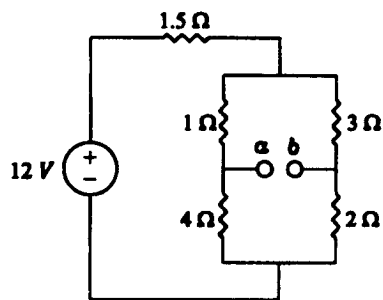
$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_s$$



شکل ۲-۴*



شکل ۱-۴*



شکل ۳-۴*

تمرین در مدار مقاومتی داده شده در شکل (۳-۴*)

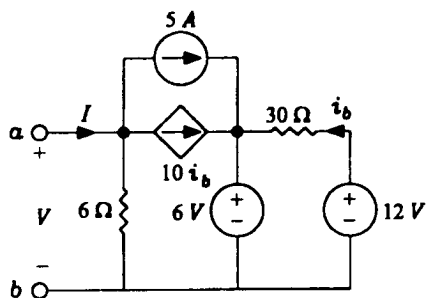
الف - با استفاده از ایده تقسیم کننده ولتاژ، ولتاژ دوسر a و b یعنی v_{ab} را تعیین کنید.

ب - اکنون شاخه ab را اتصال کوتاه کنید. با استفاده از ایده تقسیم کننده جریان، جریان گذرنده از شاخه اتصال کوتاه را تعیین کنید.

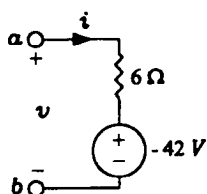
۵-۴* مشخص سازی یک مدار خطی در دوسر آن

گاهی اوقات ما فقط به رفتار یک مدار خطی در دوسر دلخواه آن علاقه مندیم. این مدار خطی ممکن است از ترکیب هر تعداد مقاومت خطی، منابع وابسته و منابع ناپسته تشکیل شده باشد، اما تنها رفتار این مدار در سرهای مشخص شده آن مورد توجه می باشد. در چنین مواردی این مدار را می توان به صورت اتصال سری یک منبع ولتاژ با یک مقاومت (مدار معادل تونن) و یا اتصال موازی یک منبع جریان با یک مقاومت (مدار معادل نرتن) نمایش داد. گرچه قضایا و مفاهیم مربوط به مدارهای معادل تونن و نرتن در فصل ۱۶ به تفصیل ارائه خواهد شد، لیکن نظر به اهمیت، سادگی و گستره کاربردهای این قضیه و اعمال راحت آنها در مدارهای مقاومتی، مناسب دیدیم که موضوع مدارهای معادل تونن و نرتن را در قالب مدارهای مقاومتی، هر چه

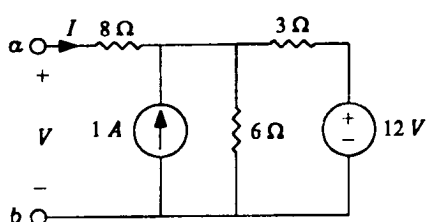
زودتر مطرح کنیم، تا ضمن آشنایی با این مفاهیم مهم، فرصت‌های بیشتری برای استفاده از آنها در ادامه مطالب درس به دست آوریم.



شکل ۱-۵* مثال ۱.

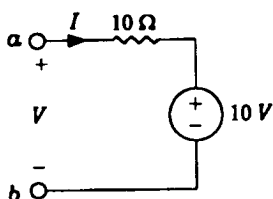


شکل ۲-۵* مدار معادل تونن شکل (۱-۵*).

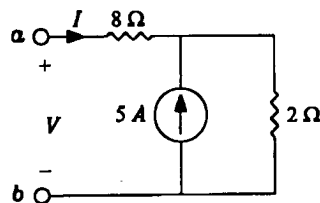


شکل ۳-۵* الف مثال ۲.

اهمی با یک مقاومت ۲ اهمی مدار شکل (۳-۵*ب) را به دست آورد. با تبدیل منبع جریان ۵ آمپری موازی با مقاومت ۲ اهمی به یک منبع ولتاژ ۱۰ ولتی سری با مقاومت ۲ اهمی و جایگزینی مقاومت‌های ۸ اهمی و ۲ اهمی سری با یک مقاومت ۱۰ اهمی، مدار معادل شکل (۳-۵*پ) را به دست می‌آوریم که مدار معادل تونن دیده شده در سرهای a و b است.



شکل ۳-۵* پ مدار معادل تونن شکل (۳-۵*الف).



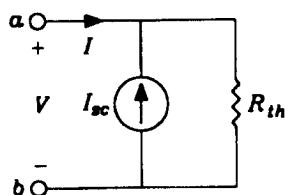
شکل ۳-۵* ب مثال ۲.

مثال ۱ مدار نشان داده شده در شکل (۱-۵*) را در نظر بگیرید. می‌خواهیم این مدار را برحسب متغیرهای ولتاژ و جریان در دوسر آن یعنی V و I توصیف کنیم. به سهولت دیده می‌شود که $i_b = \frac{12-6}{30} = \frac{1}{5}$ و با اعمال KVL در مش سمت چپ به دست می‌آوریم: $V = 6(I - 5 - 10i_b)$. با جایگزینی $i_b = \frac{1}{5}$ به دست می‌آوریم: $V = 6I - 42$. یعنی از لحاظ رفتار در سرهای a و b ، این مدار، معادل یک مقاومت ۶ اهمی است که با یک منبع ولتاژ -42 ولتی به طور سری وصل شده است. این مدار در شکل (۲-۵*) نشان داده شده است و آن را مدار معادل تونن دیده شده در سرهای a و b گویند.

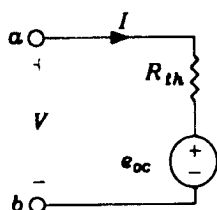
مثال ۲ مدار نشان داده شده در شکل (۳-۵*الف) را در نظر بگیرید. می‌توان با تبدیل منبع ولتاژ ۱۲ ولتی سری با مقاومت ۳ اهمی به یک منبع جریان ۴ آمپری موازی با مقاومت ۳ اهمی، و سپس جایگزینی منابع جریان موازی ۴ آمپری و ۱ آمپری با یک منبع جریان ۵ آمپری و مقاومت‌های موازی ۳ اهمی و ۶ اهمی

با تعمیم نتایج به دست آمده از مثال های ۱ و ۲ می توان بیان کرد که اگر از دوسر دلخواه a و b هر مدار مقاومتی، مطابق شکل (۴-۵* الف) به آن مدار نگاه کنیم، رابطه میان ولتاژ V و جریان I در سرهای a و b را می توان به صورت یک رابطه خطی به شکل $V = \alpha I + \beta$ بیان کرد. تونن ثابت کرده است که α همان مقاومت دیده شده در سرهای a و b و β همان ولتاژ مدار باز دیده شده در این دوسر است که از این به بعد آنها را به ترتیب با R_{th} و e_{oc} مطابق شکل (۴-۵* ب) نشان می دهیم.

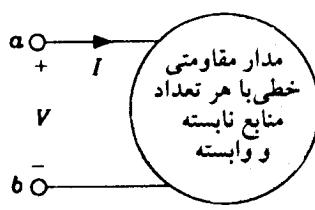
بدیهی است که می توان با انجام یک تحلیل مداری، ولتاژ e_{oc} دوسر دلخواه هر مدار را به راحتی به دست آورد. با صفر کردن منابع نایسته، R_{th} ، مقاومت دیده شده در هر دو سر مدار را نیز می توان به سادگی تعیین کرد و بنابراین مدار معادل تونن دیده شده در هر دوسر مدار را با روشهای تحلیل مداری مطابق شکل (۴-۵* ب) تعیین نمود.



شکل ۴-۵* ب



شکل ۴-۵* ب

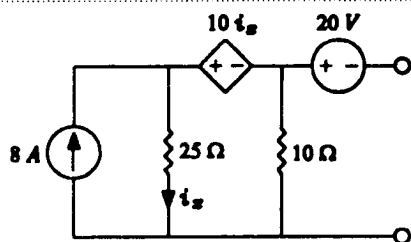


شکل ۴-۵* الف

تبصره ۱ همان طور که قبلاً گفته شد، برای محاسبه مقاومت دیده شده در هر دوسر دلخواه یک مدار مقاومتی با هر تعداد منابع نایسته و وابسته، ابتدا باید منابع نایسته موجود در مدار را صفر نمود (یعنی منابع ولتاژ نایسته را اتصال کوتاه و منابع جریان نایسته را مدار باز کرد). سپس یک منبع ولتاژ آزمایشی V_T را در دوسر مدار قرار داد و با انجام یک تحلیل مداری، جریان I خارج شونده از منبع ولتاژ را به دست آورد. مقاومت دیده شده در سرهای مدار، به سادگی از رابطه $R_{in} = V_T / I$ تعیین می شود. همچنین می توان به جای منبع ولتاژ آزمایشی V_T یک منبع جریان آزمایشی I_T در سرهای مدار وصل نمود و با انجام یک تحلیل مداری، ولتاژ V در سر منبع جریان را تعیین نمود و سپس مقاومت دیده شده در سرهای مدار را مجدداً از رابطه $R_{in} = V / I_T$ به دست آورد.

تبصره ۲ مدار معادل تونن شکل (۴-۵* ب) را می توان به صورت مدار معادل نرتن شکل (۴-۵* پ) نیز نشان داد که در آن: $i_{sc} = \frac{e_{oc}}{R_{th}}$. نرتن ثابت کرد که جریان i_{sc} را می توان از اتصال کوتاه کردن سرهای a و b در شکل (۴-۵* الف) و تعیین جریان گذرنده از این شاخه اتصال کوتاه در جهت a به b ، تعیین نمود.

تبصره ۳ برای تعیین مدارهای معادل تونن و نرتن دیده شده از دوسر دلخواه هر مدار خطی، کافی است که دو تا از سه مقدار e_{oc} ، i_{sc} و R_{th} را تعیین کنیم. از آنجایی که محاسبه جداگانه هریک از این مقادیر امکان پذیر است، معمولاً در تعیین مدارهای معادل تونن و نرتن از این سه مقدار، آن دوتایی را که تعیین آنها ساده تر باشد، محاسبه می کنند.



شکل ۵-۵ الف مثال ۳.

مثال ۳ در مدار شکل (۵-۵ الف) هر یک از کمیت‌های e_{oc} ، R_{th} و i_{sc} را جداگانه محاسبه کرده و درستی رابطه $e_{oc} = R_{th} \cdot i_{sc}$ را بررسی کنید.

محاسبه e_{oc} : با نوشتن KVL در مش وسط در شکل (۵-۵ الف) به دست می‌آوریم:

$$10i_x + 10(8 - i_x) - 25i_x = 0 \Rightarrow i_x = 3/2$$

$$e_{oc} = -20 + 10(8 - 3/2) = 28 \text{ ولت}$$

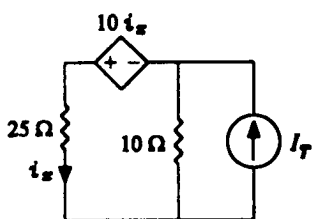
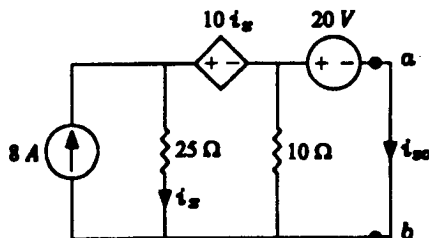
محاسبه i_{sc} : ابتدا شاخه ab را اتصال کوتاه می‌کنیم. به سادگی دیده می‌شود که جریان گذرنده از مقاومت ۱۰ اهمی برابر $i_x - i_{sc} - 8$ است. با نوشتن KVL در مش وسط در شکل (۵-۵ ب) داریم:

$$10i_x + 10(8 - i_x - i_{sc}) - 25i_x = 0 \Rightarrow$$

$$2i_{sc} + 5i_x = 16 \quad (1-5*)$$

با توجه به مش سمت راست بدیهی است که:

$$20 = 10(8 - i_x - i_{sc}) \Rightarrow i_x + i_{sc} = 6 \quad (2-5*)$$

شکل ۵-۵ ب محاسبه R_{th} .شکل ۵-۵ ب محاسبه جریان i_{sc} .

از حل معادلات (۱-۵*) و (۲-۵*) نتیجه می‌شود که: $i_x = \frac{4}{3}$ ، $i_{sc} = \frac{14}{3}$

محاسبه R_{th} : برای محاسبه R_{th} کلیه منابع نابسته را صفر کرده و منبع جریان I_T را مطابق شکل (۵-۵ ب) به مدار وصل می‌کنیم و ولتاژ V دوسر آن را حساب می‌کنیم. با اعمال KVL در مش سمت چپ در شکل (۵-۵ پ) داریم:

$$10i_x + 10(I_T - i_x) - 25i_x = 0 \Rightarrow i_x = \frac{2}{5}I_T$$

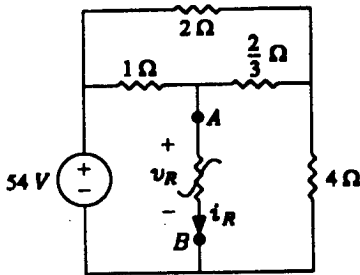
جریان گذرنده از مقاومت ۱۰ اهمی برابر $I_T - i_x$ است. پس:

$$V = 10(I_T - i_x) = 10(I_T - \frac{2}{5}I_T) = 6I_T$$

و بنابراین:

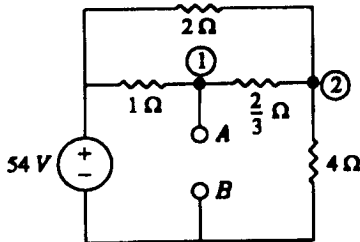
$$R_{th} = \frac{V}{I_T} = 6 \Omega$$

بدیهی است که رابطه $e_{oc} = R_{th} \cdot i_{sc}$ برقرار است.



شکل ۶-۵ الف مثال ۴.

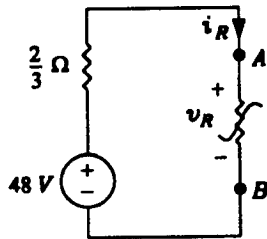
مثال ۴ در مدار شکل (۶-۵ الف) مقاومت غیرخطی R با رابطه $v_R = 6i_R^2 - \frac{2}{3}i_R$ توصیف می‌شود. جریان گذرنده از این مقاومت را با استفاده از مدار معادل تونن دیده شده توسط مقاومت غیرخطی R تعیین کنید.



شکل ۶-۵ ب

ابتدا مقاومت غیرخطی R را باز کرده و مدار معادل تونن دیده شده از دوسر A و B شکل (۶-۵ ب) را تعیین می‌کنیم. با انجام تحلیل‌های ساده به راحتی به دست می‌آوریم:

$$e_{oc} = 48 V, \quad R_{th} = \frac{2}{3} \Omega$$



شکل ۶-۵ پ

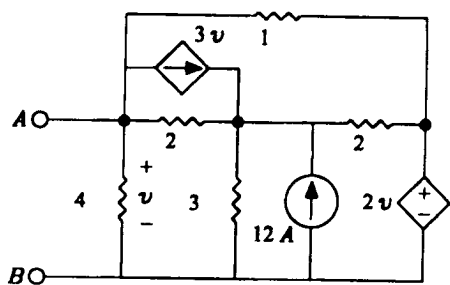
بنابراین با جایگزینی مدار داده شده در شکل (۶-۵ الف) با مدار شکل (۶-۵ ب) که در آن مدار معادل تونن دیده شده از دوسر مقاومت غیرخطی جایگزین بقیه مدار شده است، مدار ساده شکل (۶-۵ پ) را به دست می‌آوریم. با اعمال KVL در حلقه موجود داریم:

$$48 = \frac{2}{3}i_R + v_R = \frac{2}{3}i_R + 6i_R^2 - \frac{2}{3}i_R \Rightarrow$$

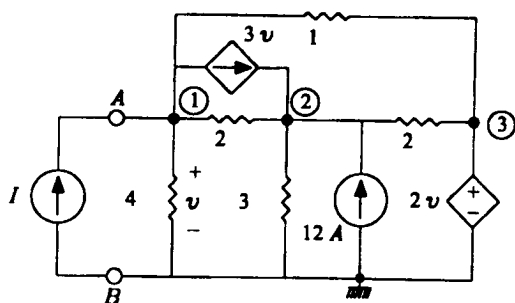
$$i_R^2 = 8A \quad \Rightarrow \quad i_R = 2A$$

۶-۵ محاسبه همزمان R_{th} و e_{oc} در مدار معادل تونن

علاوه بر آن که می‌توان R_{th} و e_{oc} را جداگانه برای هر مدار داده شده، محاسبه کرد، می‌توان هر دوی آنها را به طور همزمان نیز تعیین نمود. برای این منظور بدون آنکه منابع نایسته موجود در مدار داده شده را صفر کنیم، منبع جریان I را در دوسر مدار وصل کرده و سعی می‌کنیم ولتاژ V دوسر آن را محاسبه کنیم. اگر این ولتاژ را بتوان نهایتاً به صورت $V = \alpha I + \beta$ درآورد، در این صورت β همان ولتاژ مدار باز و α مقاومت معادل تونن دیده شده در دوسر مدار است. مثال ۵ این روش محاسبه را تشریح می‌کند.



شکل ۱-۶* الف مثال ۵.



شکل ۱-۶* ب مثال ۵.

مثال مدار نشان داده شده در شکل (۱-۶*) الف) را در نظر بگیرید. می‌خواهیم مدار معادل تونن دیده شده در سرهای A و B را از طریق محاسبه همزمان R_{th} و e_{oc} تعیین کنیم. رسانایی‌های این مدار برحسب مهو داده شده‌اند.

ابتدا منبع جریان I را در سرهای A و B وصل کرده و مدار را با روش تحلیل گره حل می‌کنیم، مدار دارای سه گره است؛ لیکن به گره (۳) منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ $2v$ وصل شده و بنابراین $v_3 = 2v_1$ و می‌توان فقط بانوشتن KCL در گره‌های ① و ② مدار را تحلیل کرد. با اعمال KCL در گره‌های ① و ② به دست می‌آوریم:

$$4v_1 + 2(v_1 - v_3) + 3v_1 + (v_1 - 2v_1) = I$$

$$2(v_3 - v_1) + 3v_3 - 3v_1 - 12 + 2(v_3 - 2v_1) = 0$$

از حل این دو معادله برحسب متغیر مجهول v_1 به دست می‌آوریم:

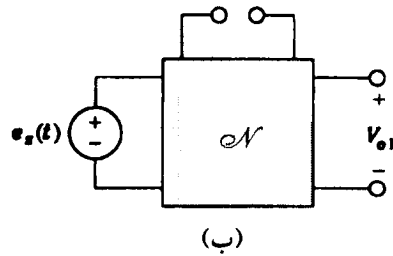
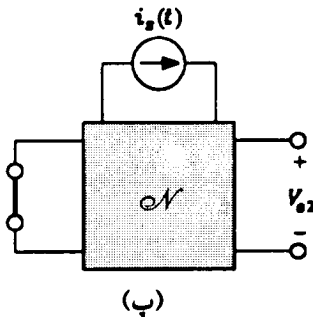
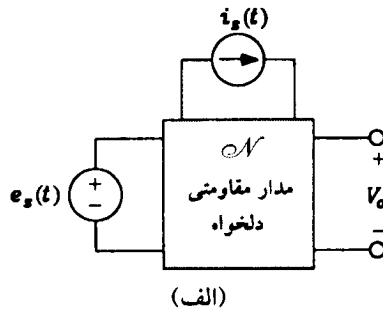
$$v_1 = \frac{V}{38} I + \frac{24}{38}$$

$$\text{بنابراین: } R_{th} = \frac{V}{38} \text{ و } e_{oc} = \frac{24}{38}$$

* ۷- جمع آثار در مدارهای مقاومتی خطی

قضیه جمع آثار یکی از مهمترین قضایای مدارهای خطی است که در فصل ۱۶ با تفصیل بیشتر مطرح و اثبات خواهد شد. لیکن چون استفاده از این قضیه ما را در تحلیل و درک مطالب مربوط به مدارهای مختلف بسیار کمک می‌کند، مناسب دیدیم که در این فصل آن را به طور مختصر مرور کنیم تا دانشجویان بتوانند هرچه زودتر با این قضیه اساسی آشنا شده و از آن در درک و حل مسائل مداری دیگر استفاده کنند.

مدار مقاومتی خطی دلخواه $A-I$ را که در آن برای سادگی فقط دو منبع نایسته $e_s(t)$ و $i_s(t)$ فرض شده‌اند را مطابق شکل (۱-۷*) الف) در نظر بگیرید. ولتاژ خروجی v_o این مدار که از اعمال همزمان دو منبع نایسته $e_s(t)$ و $i_s(t)$ حاصل می‌شود یقیناً متأثر از وجود هر دو منبع خواهد بود. قضیه جمع آثار به سادگی بیان می‌کند که پاسخ حاصل از اعمال همزمان دو یا چند منبع نایسته، برابر مجموع پاسخ‌های حاصل از اعمال



شکل (۷-۲) جمع آثار در مدارهای مقاومتی خطی.

هر یک از این منابع به تنهایی است؛ به شرط آنکه دیگر منابع نایسته موجود در مدار برابر صفر قرار داده شوند. توجه کنید که منابع وابسته عیناً در مدار باقی می‌مانند. همان‌طوری که می‌دانیم برای صفر کردن یک منبع ولتاژ نایسته، آن را اتصال کوتاه و برای صفر کردن یک منبع جریان نایسته، آن را مدار باز می‌کنیم. در مدار شکل (۷-۲الف) برای آنکه v_o را حساب کنیم باید مدارهای داده شده در شکل‌های (۷-۲ب) و (۷-۲پ) را تحلیل کرده و ولتاژ خروجی v_{o1} و v_{o2} را در هر حالت محاسبه کنیم و سپس مقادیر به دست آمده را با هم جمع کنیم تا ولتاژ خروجی v_o مورد نظر حاصل شود؛ یعنی: $v_o = v_{o1} + v_{o2}$.

مثال در مدار شکل (۷-۲الف) ولتاژ خروجی v_o را با استفاده از جمع آثار تعیین کنید.

ابتدا منبع جریان ۵ آمپری را صفر کرده (مدار باز می‌کنیم) و مدار شکل (۷-۲ب) را تحلیل می‌کنیم.

چون جریان $0.4v_x$ در خلاف جهت ولتاژ v_x از مقاومت ۱۰ اهمی می‌گذرد؛ پس:

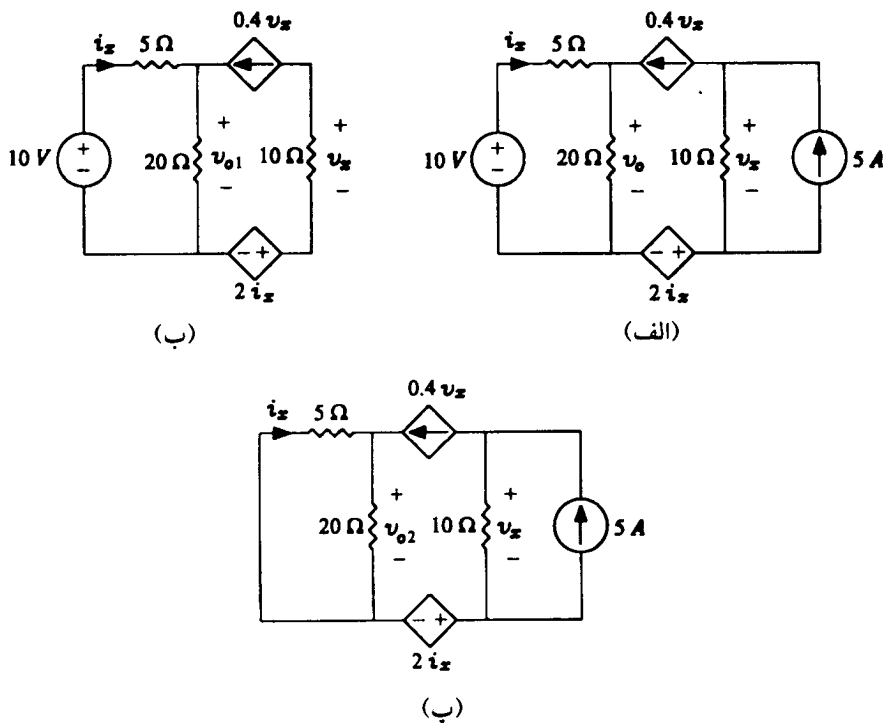
$$10 \times 0.4v_x = -v_x \Rightarrow v_x = 0$$

بنابراین: $v_{o1} = \frac{20}{30+5} \times 10 = 8V$ به دست می‌آید.

اکنون منبع ولتاژ ۱۰ ولتی را صفر کرده (اتصال کوتاه می‌کنیم) و مدار شکل (۷-۲پ) را تحلیل می‌کنیم.

جریان گذرنده از مقاومت ۱۰ اهمی برابر $0.4v_x - 5$ است؛ بنابراین:

$$10(5 - 0.4v_x) = v_x \Rightarrow v_x = 10 \text{ ولت}$$



شکل *۷-۲ مثال.

جریان v_x ۰٫۴ در مقاومت‌های ۲۰ اهمی و ۵ اهمی به ترتیب به نسبت ۱ و ۴ تقسیم می‌شود؛ پس:

$$v_{o2} = 20 \times \frac{1}{5} \times 0.4 v_x = 16 \text{ ولت}$$

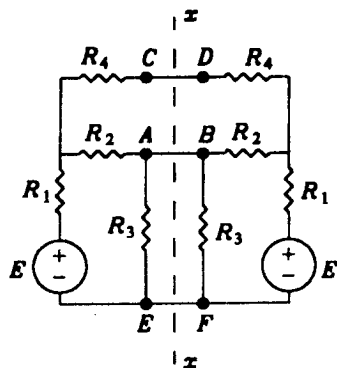
بنابراین با استفاده از جمع آثار ولتاژ خروجی v_o به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v_o = v_{o1} + v_{o2} = 8 + 16 = 24 \text{ ولت}$$

* ۸- استفاده از تقارن در حل مدارهای مقاومتی

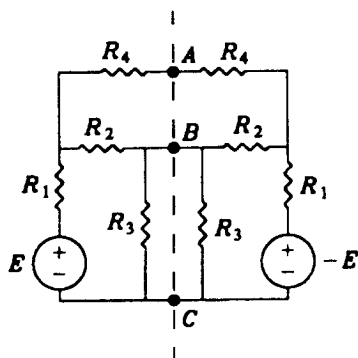
بعضی مدارها ممکن است ساختار متقارن خاصی داشته باشند که تعیین ولتاژ یا جریان تعدادی از شاخه‌ها یا تعیین ولتاژ برخی از گره‌ها را به مراتب راحت‌تر می‌کند. شناخت این تقارن و استفاده مناسب از آن، تحلیل مدارهای متقارن را بسیار ساده می‌کند.

مثال ۱ مدار متقارن نشان داده شده در شکل (*۸-۱) را در نظر بگیرید. این مدار نسبت به محور xx کاملاً متقارن است. با استفاده از تقارن، هر جریانی که در شاخه AB در اثر منبع ولتاژ سمت راست حاصل می‌شود، جریان دیگری با همان مقدار، لیکن در جهت برعکس در اثر منبع ولتاژ سمت چپ حاصل می‌شود. بنابراین با استفاده از تقارن نتیجه می‌شود که جریان گذرنده از شاخه AB صفر است. همین مطلب را می‌توان در مورد

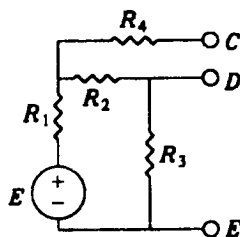


شکل ۱-۸*

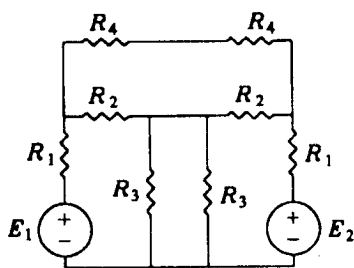
شاخه‌های CD و EF نیز بیان کرد. بنابراین می‌توان این شاخه‌ها را حذف کرد و مدار را به دو قسمت متقارن تقسیم نمود که قسمت سمت چپ آن در شکل (۲-۸*) نشان داده شده است. بنابراین از مقاومت R_4 جریانی عبور نمی‌کند و جریان گذرنده از مقاومت‌های R_1 ، R_2 و R_3 برابر و مساوی $\frac{E}{R_1 + R_2 + R_3}$ خواهد بود. اکنون فرض کنید که جهت یکی از منابع را تعویض کنیم مدار را به صورت شکل (۳-۸*) درآوریم. بدیهی است، اگر اثر منبع ولتاژ E روی ولتاژ گره نقطه A واقع بر محور تقارن، برابر V باشد، اثر منبع ولتاژ $-E$ روی ولتاژ این گره برابر $-V$ بوده و بنابه



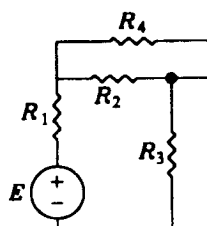
شکل ۳-۸*



شکل ۲-۸*



شکل ۵-۸*



شکل ۴-۸*

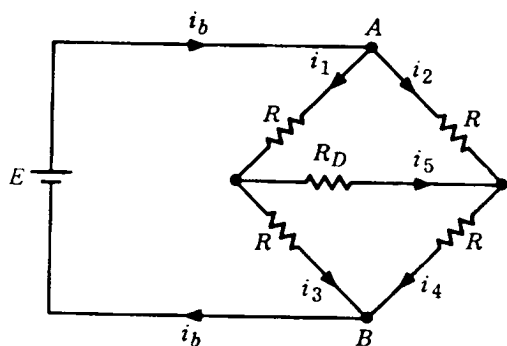
قضیه جمع آثار ولتاژ گره A برابر صفر خواهد بود. همین مطلب را می‌توان در مورد گره‌های B و C واقع بر محور تقارن نیز بیان کرد. بنابراین نقاط A ، B و C را می‌توان اتصال کوتاه کرد و مدار را به دو قسمت متقارن تقسیم نمود که قسمت چپ آن در شکل (۴-۸*) نشان داده شده است.

به این ترتیب مقاومت R_4 اتصال کوتاه شده، جریان گذرنده از آن صفر می‌شود. مقاومت‌های R_2 و R_3 با هم موازی و حاصل با مقاومت R_1 سری می‌شود. پس جریان گذرنده از مقاومت R_1 چنین می‌شود:

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2 \parallel R_3}$$

که در آن $R_2 \parallel R_3$ مقاومت اتصال موازی R_2 و R_3 بوده و برابر $\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$ است. می توان با استفاده از تقسیم کننده جریان، جریان شاخه های R_2 و R_3 را نیز به راحتی به دست آورد.

اکنون بار دیگر مدار شکل (۸-۱) را در نظر بگیرید. این بار منابع ولتاژ موجود در دو سمت مدار مطابق شکل (۸-۵) کاملاً متفاوت هستند. با کمی تفکر می توان به جای E_1 مقدار $\frac{E_1 + E_2}{2} + \frac{E_1 - E_2}{2}$ و به جای E_2 مقدار $\frac{E_1 + E_2}{2} - \frac{E_1 - E_2}{2}$ قرار داد و با استفاده از جمع آثار، حل مسأله را به ترکیب دو حالت گفته شده قبل برگرداند و با استفاده از تقارن، جریان شاخه ها را به راحتی محاسبه نمود.

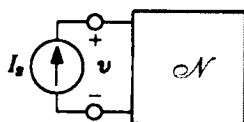


شکل ۸-۶ مثال ۲: یک مدار پل متقارن.

مثال ۲ مدار پل شکل (۸-۶) را در نظر بگیرید و توجه کنید که به شکل یک اتصال سری-موازی نیست. فرض کنید که چهار مقاومت یکسان هستند. واضح است که به علت تقارن، جریان i_b باتری باید به طور مساوی در گره A و همچنین در گره B تقسیم شود. یعنی $i_1 = i_2 = i_b/2$ و $i_3 = i_4 = i_b/2$. در نتیجه i_5 باید صفر باشد.

تمرین دوازده مقاومت خطی هر یک با مقاومت R بر روی یالهای یک مکعب چیده شده اند. در هر رأس مکعب، مقاومت ها به هم لحیم شده اند. دو گره ای که در دو رأس مقابل قطر مکعب قرار دارند، ① و ② نامیده می شوند. مقاومت معادل بین ① و ② چقدر است؟ (راهنمایی: پرسپکتیو مکعب را رسم کرده و با استفاده از بحث های تقارن، چگونگی تقسیم جریان در هر گره را تعیین کنید.)

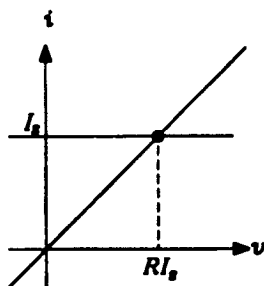
۹-۰ تعیین نقاط کار مدارهای غیرخطی



شکل ۹-۱

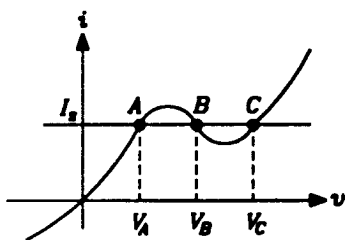
یک قطبی مقاومتی N نشان داده شده در شکل (۹-۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید که منبع جریان I_s را به دوسر آن وصل کنیم. می خواهیم ببینیم آیا می توان ولتاژ دوسر v را همواره و به طور یکتا تعیین کرد. برای روشن شدن موضوع، سه حالت زیر را در نظر بگیرید:

حالت ۱ از یک مقاومت خطی R تشکیل می شود. مشخصه v این مقاومت در شکل (۹-۲) داده شده است. واضح است محل تلاقی این مشخصه با خط $i = I_s$ ولتاژ دوسر یک قطبی N را تعیین می کند و نقطه I_s, RI_s را نقطه کار یک قطبی N گویند.

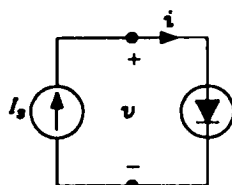


شکل ۹-۲

حالت ۲ فرض کنید $\mathcal{N}$ از یک دیود تونلی با مشخصه داده شده در صفحه vi مطابق شکل (۹-۳ الف) تشکیل شود. ملاحظه می شود محل تلاقی خط $i = I_s$ با این مشخصه می تواند در نقاط A ، B یا C در شکل (۹-۳ ب) قرار گیرد و مدار می تواند سه نقطه کار Q_1 ، Q_2 و Q_3 با مختصات (V_A, I_s) ، (V_B, I_s) و (V_C, I_s) داشته باشد. بنابراین مدارهای غیرخطی ممکن است دارای چند جواب و یا چند نقطه کار باشند.

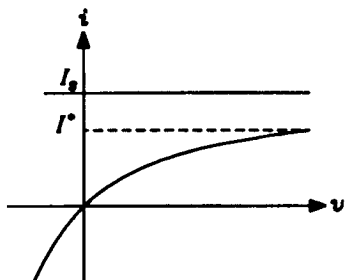


شکل ۹-۳ ب

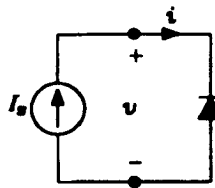


شکل ۹-۳ الف

حالت ۳ فرض کنید $\mathcal{N}$ از یک دیود پیوندی pn با مشخصه داده شده در صفحه vi مطابق شکل (۹-۴) باشد.



شکل ۹-۴ ب



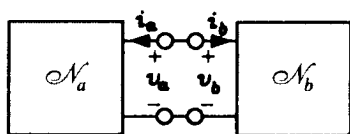
شکل ۹-۴ الف

الف) تشکیل شود. در این مدار دیود پیوندی به طور معکوس وصل شده است و چون جریان وصل شده I_s از جریان اشباع I^* بیشتر است پس طبق شکل (۹-۴ ب) خط I_s منحنی مشخصه دیود را قطع نمی کند و به عبارت دیگر چنین مداری، نقطه کاری ندارد یعنی مدار غیرخطی فوق دارای جواب نمی باشد.

از بررسی سه حالت فوق ملاحظه می‌کنیم که یک مدار غیرخطی ممکن است دارای یک جواب (جواب یکتا)، چند جواب و یا هیچ جواب باشد و این یکی از تفاوت‌های اساسی رفتار مدارهای غیرخطی با مدارهای خطی است.

* ۱۰-۱ تحلیل DC

منظور از تحلیل DC یک مدار تعیین نقاط کار آن مدار برای ورودی dc است که مفهوم مهمی در



شکل ۱۰-۱

الکترونیک است. مفهوم اصلی تحلیل dc با مدار ساده نشان داده شده در شکل (* ۱۰-۱) تشریح می‌شود. فرض کنید دو مدار یک قطبی غیرخطی با مشخصه‌های:

$$f_a(v_a, i_a) = 0, \quad f_b(v_b, i_b) = 0$$

توصیف شوند و ما این دو یک قطبی را به صورت اتصال موازی به هم وصل کنیم. می‌خواهیم متغیرهای دوسر یک قطبی‌ها را بعد از اتصال تعیین کنیم. با استفاده از معادلات کیرشف در نقاط اتصال داریم:

$$i_a + i_b = 0$$

$$v_a = v_b$$

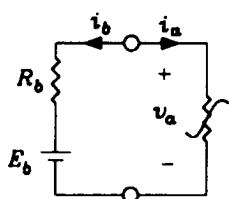
اگر متغیرهای دوسر یک قطبی‌های به هم پیوسته را مثلاً به صورت v و i در نظر بگیریم؛ داریم:

$$v = v_a = v_b, \quad i = i_a = -i_b$$

با قرار دادن این روابط در توصیف یک قطبی‌ها به دست می‌آوریم:

$$f_1(v, i) = 0, \quad f_2(v, -i) = 0$$

این دو رابطه دو معادله جبری غیرخطی برحسب v و i هستند که می‌توان آنها را با روشهای عددی، ترسیمی یا خطی تکه‌ای حل کرد و مقادیر v و i یعنی نقاط کار یک قطبی‌های به هم پیوسته را تعیین کرد.



شکل ۱۰-۲

مثال فرض کنید یک قطبی مقاومتی N_a کنترل شده با ولتاژ به صورت $f_a(v_a, i_a) = i_a - \alpha v_a^2 = 0$ و یک قطبی مقاومتی N_b اتصال سری یک منبع ولتاژ dc و یک مقاومت خطی R_b مانند شکل (* ۱۰-۲) باشد. در این صورت داریم:

$$f_b(v_b, i_b) = v_b - R_b i_b - E_b = 0$$

با در نظر گرفتن $v = v_a = v_b$ و $i = i_a = -i_b$ دو معادله دو مجهولی زیر را به دست می‌آوریم:

$$i = \mathcal{F}v^2$$

$$v + R_b i - E_b = 0$$

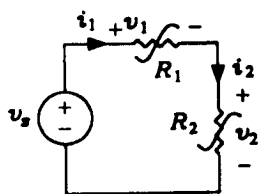
که با حذف i به دست می آوریم:

$$\mathcal{F}R_b v^2 + v - E_b = 0$$

در حالت خاص $E_b = 2V$ و $R_b = \frac{1}{4}\Omega$ معادله به صورت $v^2 + v - 2 = 0$ درمی آید که دارای جوابهای $v = 1, -2$ می باشد که به ترتیب مقادیر ۱۶، ۴ را به دست می دهد. بنابراین یک قطبی های به هم وصل شده موازی دارای دو نقطه کار $Q_1 = \left| \frac{1}{4} \right|$ و $Q_2 = \left| \frac{-2}{16} \right|$ است.

در عمل کمتر مسائل غیرخطی پیش می آیند که به طور تحلیلی قابل حل باشند. در این گونه موارد از روشهای ترسیمی استفاده می شود. می توان مشخصه یک قطبی $f_a(v, i) = f_a(v_a, i_a)$ را در صفحه iv رسم کرد و مشخصه یک قطبی $f_b(v_b, i_b)$ را با توجه به محدودیت اتصال به صورت $f_b(v, -i)$ در همان صفحه رسم نمود. نقاط تلاقی این دو مشخصه، نقاط کار مورد نظر را به دست خواهند داد.

۱۱- * مشخصه انتقال



شکل ۱۱-۱۱ *

مدار نشان داده شده در شکل (۱۱-۱۱*) را که در آن دو مقاومت غیرخطی کنترل شده با جریان با مشخصه های $v_1 = f_1(i_1)$ و $v_2 = f_2(i_2)$ به طور سری با منبع ولتاژ v_s وصل شده اند، در نظر بگیرید. اگر منبع ولتاژ را به صورت ورودی و ولتاژ v_2 را به صورت خروجی در نظر بگیریم؛ توصیف v_2 برحسب تابعی از v_s را مشخصه انتقال این مدار گویند که گاهی اوقات به صورت تحلیلی محاسبه و گاهی اوقات به صورت ترسیمی نمایش داده می شود. در مدار شکل (۱۱-۱۱*) داریم:

$$v_s = v_1 + v_2 = f_1(i_1) + f_2(i_2) = f_1(i) + f_2(i) = f(i)$$

$$v_2 = f_2(i_2) = f_2(i)$$

معادلات $v_s = f(i)$ و $v_2 = f_2(i)$ معادلات پارامتری مشخصه انتقال مطلوب است. چنانچه بتوان پارامتر i را بین این دو معادله حذف نمود مشخصه انتقال به صورت تحلیلی به دست می آید. در صورتی که حذف پارامتر i امکان پذیر نباشد، با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای i و محاسبه v_s و v_2 به ازای آنها، می توان مشخصه انتقال را به صورت یک منحنی در صفحه $v_2 v_s$ به صورت ترسیمی به دست آورد.

مثال

فرض کنید $v_1 = f_1(i_1) = i_1 + i_1^3$ و $v_2 = f_2(i_2) = i_2 + 2i_2^2$ می خواهیم مشخصه انتقال v_2 نسبت به v_s را به دست آوریم:

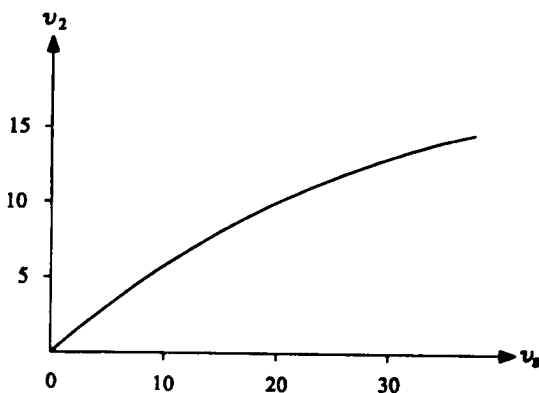
$$v_s = f_1(i_1) + f_2(i_2) = f(i) = i^2 + 2i^2 + 2i$$

$$v_2 = 2i^2 + i$$

چون حذف i بین این دو معادله به راحتی امکان پذیر نیست، مشخصه انتقال را به صورت ترسیمی به دست می آوریم. برای این منظور چند مقدار برای i در نظر گرفته و مقادیر متناظر v_s و v_p را به دست می آوریم. این مقادیر در جدول زیر نشان داده شده اند:

i	۰	۰٫۵	۱	۱٫۵	۲	۲٫۵	۳
v_s	۰	۱٫۶۲۵	۵	۱۰٫۸۷۵	۲۰	۳۳٫۱۲۵	۱۰۵
v_p	۰	۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱

مشخصه انتقال v_p بر حسب v_s به طور ترسیمی در شکل (۲-۱۱*) نشان داده شده است.



شکل ۲-۱۱* مشخصه انتقال v_p بر حسب v_s .

۱۲- آشنایی با نرم افزار اسپایس در حل مدارهای الکتریکی

واژه Spice ترکیبی از حروف اول کلمات Simulation Program with Integrated Circuit Emphasis است که نشان دهنده نرم افزاری برای تحلیل و طراحی مدارهای مجتمع الکترونیکی می باشد. این نرم افزار مهندسان برق را قادر می سازد تا مدارهای مورد نظر خود را بر روی کامپیوتر شبیه سازی کرده، عملکردهای مختلف مدار را قبل از ساخت فیزیکی آن بررسی کنند. از آنجایی که تحلیل هر مدار الکترونیکی، مستلزم محاسبه نقطه کار و تحلیل dc آن مدار است، از این رو نرم افزار اسپایس امکان راحتی برای حل مدارهای الکتریکی فراهم می آورد. هدف ما در این بخش ارائه نکات مهم و مطالب اساسی این نرم افزار است تا دانشجویان بتوانند برای یادگیری بیشتر و بهتر مدارهای الکتریکی از امکانات این نرم افزار استفاده نمایند و تحلیل و طراحی مدارهای مختلف را با آن تجربه کنند.

نرم افزار اسپایس براساس شکل خاصی از روش تحلیل گره، یعنی تحلیل اصلاح شده گره نوشته شده است و جهت استفاده از آن لازم است ساختار مدار، نوع عناصر و مقادیر آنها را قبلاً در فایلی آماده کرده، سپس این فایل را وارد کامپیوتر نمود و با فراخوانی برنامه و اجرای آن، نتایج مورد نظر را به دست آورد. برای

درک و یادگیری خواص و تحلیل مدارهای الکتریکی هر دانشجوی مهندسی برق باید قادر باشد با به کار گرفتن روشهای تحلیل ارائه شده در این درس، هر مدار داده شده را تحلیل کرده و به خواص آن پی ببرد. با بزرگتر شدن ابعاد مدار و با افزایش تعداد عناصر به کار رفته در ساختار مدار، حجم محاسبات ریاضی لازم برای تحلیل دستی این مدارها آنچنان پیچیده می شود که اغلب از حوصله و توانایی هر فرد خارج می گردد. در چنین مواردی منطقی است که جهت کاستن از زحمت و وقت محاسبات به سوی کامپیوترهای دیجیتال روی بیاوریم.

برنامه های کامپیوتری کوچک و بزرگ متعددی در این زمینه وجود دارد که متداول ترین آنها نرم افزار Spice است که در بیشتر کامپیوترهای بزرگ در دسترس می باشد. صورت خاصی از این نرم افزار به نام PSpice برای کامپیوترهای شخصی طراحی شده و مورد استفاده آموزشی دانشجویان قرار می گیرد.

* ۱-۱۲- توضیحات کلی

روش کلی استفاده از Spice شامل سه مرحله است: در مرحله اول یک فایل منبع ایجاد می کنیم که شامل اطلاعات ساختاری مدار و نوع تحلیلی که باید صورت بگیرد و همچنین خروجی های مورد نظری که باید چاپ شوند، می باشد. در مرحله دوم فایل منبع را وارد کامپیوتر می کنیم که موجب اجرای برنامه شده و فایل خروجی را به وجود می آورد. مرحله سوم چاپ نتایج یا رسم منحنی ها از روی فایل خروجی است. خط اول هر فایل منبع، دستور عنوان است که هیچ کار محاسباتی انجام نمی دهد و به صورت عنوان به کار گرفته می شود. سطر آخر فایل منبع، دستور END است که علامت " " نیز جزء دستور است. قبل از آنکه نحوه ایجاد فایل منبع مورد بحث قرار گیرد، توضیحات کلی سودمندی در مورد فرمت Spice به شرح زیر ارائه می گردد:

- ۱- فرمت ورودی، یک فرمت با نوع دلخواه است. میدان ها توسط یک یا چند فاصله خالی یا کاما از هم جدا می شوند. فاصله های خالی اضافی، در نظر گرفته نمی شوند.
- ۲- محتوای یک سطر را می توان در صورت لزوم در سطر بعدی ادامه داد، که در این صورت یک علامت + در ستون اول سطر بعدی قرار داده می شود. اسپایس خواندن مطالب را از ستون دوم آغاز می کند.
- ۳- هر میدان نام، باید با یک حرف (از A تا Z) شروع شود و می توان حداکثر ۸ علامت حرفی یا عددی در میدان قرار داد.
- ۴- یک میدان عددی می تواند یک میدان صحیح مانند (8, -12, 4) یا یک میدان اعشاری مانند (1.414, -3.14, 2.5) باشد. یک میدان صحیح یا اعشاری می تواند با یک توان صحیح دنبال شود مانند (2.136E3, 7E-6).
- ۵- جهت سهولت نمایش اعداد بزرگ یا اعداد کوچک، ضرایب تغییر مقیاس به صورت نمادهای حرفی

مانند K, M, N به کار می‌روند که به صورت پسوندی به دنبال اعداد نوشته می‌شوند. مفهوم واقعی این پسوندها در جدول ۱ نشان داده شده است. مثلاً 2M یا 2G به ترتیب نشان دهنده 2×10^3 و 2×10^9 می‌باشند. اگر علاوه بر نمادهای تغییر مقیاس ذکر شده در جدول ۱، حروف دیگری نیز به دنبال کمیت‌های عددی قرار داده شوند، این حروف نادیده گرفته می‌شوند؛ مثلاً اعداد 2, 2V, 2A, 2OHM که نشان دهنده عدد 2 هستند. ضمن اینکه اعداد 2M, 2MA, 2MOHM همگی نشان دهنده عدد 2×10^{-3} هستند.

جدول ۱- ضرایب تغییر مقیاس به کار رفته در Spice

نام	نماد	صورت نمایی	مثال	مقدار
فمتو	F	1E - 15	12.2F	12.2×10^{-15}
پیکو	P	1E - 12	150 PF	150×10^{-12}
نانو	N	1E - 9	1.2 Ns	1.2×10^{-9}
میکرو	U	1E - 6	18 UF	18×10^{-6}
میلی	M	1E - 3	2.3 MSec	2.3×10^{-3}
کیلو	K	1E + 3	7 KOHM	7×10^3
میگا	MEG	1E + 6	1.6 MHZ	1.6×10^6
گیگا	G	1E + 9	2.3 GHZ	2.3×10^9
ترا	T	1E + 12	3.5 THZ	3.5×10^{12}

۶- علامت * در ستون اول به منزله توضیح است. دستورهایی که علامت اول آنها * باشد جنبه توضیحی داشته و توسط Spice هیچ کاری روی آنها انجام نمی‌گیرد. چنین توضیحاتی برای روشن شدن برنامه، نوشته می‌شوند و می‌توانند در هر جای برنامه قرار داده شوند.

* ۱۲-۲ استفاده از Spice در برنامه تحلیل مدار

۱- از آن جایی که اسپایس بر مبنای روش تحلیل اصلاح شده گره عمل می‌کند، بنابراین ابتدا تمام گره‌های مدار را شماره گذاری می‌کنیم. لازم نیست شماره‌ها متوالی باشند، ولی عادت بر این است که به گره مبنا شماره 0 داده می‌شود. وقتی تمام گره‌ها شماره گذاری شد، مدار با مشخص کردن هر عنصری که بین گره‌های آن وصل است، به صورت کامل توصیف می‌شود.

۲- ولتاژ هر گره دلخواه N به صورت V(N) نوشته می‌شود.

۳- محتوای هر شاخه با دستور مشخص سازی شاخه تعیین می‌شود که دارای سه میدان است. یکی برای نام عنصر، دیگری گره‌هایی که عنصر به آنها وصل است که ترتیب، در آنها مهم است. گره اول به عنوان گرهی با

علامت مثبت تلقی می شود. میدان سوم شامل مقدار عنصر است.

۴- حرف اول نام عنصر، نوع عنصر را برای برنامه مشخص می کند و باید یکی از حروف زیر باشد:

R مقاومت

V منبع ولتاژ

I منبع جریان

E منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ

F منبع جریان کنترل شده با جریان

G منبع جریان کنترل شده با ولتاژ

H منبع ولتاژ کنترل شده با جریان

نام هر عنصر می تواند حداکثر ۸ کاراکتر داشته باشد، که ممکن است حروف یا اعداد باشند، اما کاراکتر اول باید یکی از حروف بالا باشد.

۵- نام گره هایی که عنصر به آن وصل است، در میدان دوم داده می شود. مثلاً:

R56 N1 N2

مقاومتی را نشان می دهد که بین گره های N1 و N2 وصل است و فرض می شود ولتاژ N1 علامت مثبت دارد.

۶- مقدار عنصر در میدان سوم داده می شود و می تواند عدد صحیح یا اعشاری یا توان دار باشد. مثلاً:

R56 N1 N2 12.5

۷- در حالت کلی مشخص سازی داریم:

Rxxx	N1	N2	r	
Vxxx	N1	N2	DC	VS
Ixxx	N1	N2	DC	IS

در مورد منابع، گرهی که نام آن، اول برده شده است، گره با علامت مثبت در نظر گرفته می شود. (در مورد منابع نایسته ولتاژ و جریان، باید نوع منبع یعنی DC یا AC مشخص شود. اگر AC باشد، باید اندازه و زاویه فاز آن نیز داده شود.)

۸- در مورد منابع، می توان ترتیب گره های دوسر را برعکس کرد و مقدار عنصر را در یک منفی ضرب نمود.

Vxxx N2 N1 DC - VS

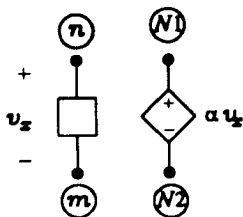
Ixxx N2 N1 DC - IS

۹- برنامه اسپایس علاوه بر ولتاژ تمام گره ها، جریان گذرنده از منابع ولتاژ نایسته را نیز تعیین و در اختیار می گذارد. بنابراین جریان گذرنده از یک منبع ولتاژ نایسته را می توان به عنوان جواب درخواست نمود و به صورت I(Vxxx) نوشت. در این صورت جریانی که از گره N1 به گره N2 در منبع ولتاژ Vxxx جاری

می‌شود، به دست خواهد آمد.

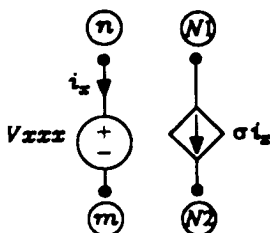
۱۰- فرمت دستور شاخه برای منابع کنترل شده با توجه به شکل‌های زیر چنین است:

منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ



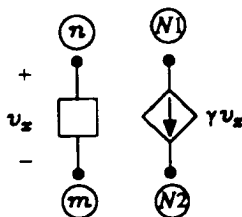
Exxx N1 N2 n m α

منبع جریان کنترل شده با جریان



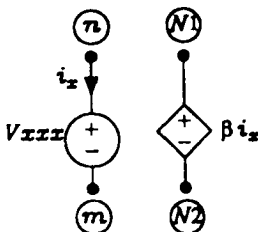
Fxxx N1 N2 Vxxx σ

منبع جریان کنترل شده با ولتاژ



Gxxx N1 N2 n m γ

منبع ولتاژ کنترل شده با جریان



Hxxx N1 N2 Vxxx β

توجه کنید وقتی که متغیر کنترل کننده، جریان شاخه باشد؛ جریان باید جریان گذرنده از یک منبع ولتاژ نابسته باشد و اگر چنین منبعی موجود نباشد، منبع ولتاژ ساختگی Vxxx را با مقدار صفر در نظر می‌گیریم. ۱۱- دستور اول هر برنامه Spice باید دستور تیترا یا عنوان باشد. این دستور می‌تواند هدف اجرای برنامه را نشان دهد. این دستور در خروجی عیناً چاپ خواهد شد.

۱۲- دستورهای توضیح می‌توانند در هر جای برنامه قرار داده شوند. هر دستوری که با * در ستون اول شروع می‌شود، دستور توضیح است. این دستورها توسط برنامه اجرا نمی‌شوند ولی در لیست برنامه چاپ می‌شوند. اگر بخواهیم دستوری را به طور موقت از برنامه حذف کنیم یک علامت * جلوی آن قرار می‌دهیم.

۱۳- دستور کنترل جواب یا دستور مشخص سازی خروجی: یکی از این دستورها چنین است:

.DC SNAME VSTART VSTOP VINCR

در اینجا SNAME نام منبع ولتاژ یا منبع جریان وابسته ای است که مقدار آن از VSTART شروع شده و هر بار به مقدار VINCR به آن اضافه می شود (اگر چنین بخواهیم) تا به VSTOP برسد. اگر حلقه تکراری مورد نظر نباشد، قرار دهید: $VSTART = VSTOP$ و $VINCR = 1$. مثلاً:

.DC V12 3 3 1

یعنی مدار فقط یک بار با قرار دادن منبع V12 برابر ۳ ولت، حل خواهد شد. توجه کنید که این دستور فقط برای منابع ولتاژ یا جریان وابسته است.

در یک تحلیل اگر لازم باشد دو منبع، هریک از مقدار اولیه ای شروع و به مقدار نهایی ختم شوند و هر یک نموی داشته باشند و به ازای هر مقدار منبع اول، تمام مقادیر منبع دوم مورد محاسبه قرار گیرند، از دستور کنترل DC استفاده می شود. در این صورت دستور کنترل DC شامل ۹ میدان خواهد بود. میدان اول برای مشخص کردن DC و نوع تحلیل، چهار میدان بعد برای مشخص کردن منبع اول و چهار میدان بعد برای مشخص کردن منبع دوم. اغلب از این توانایی برای رسم مشخصه های خروجی قطعات نیمه هادی استفاده می شود.

.DC SR1 START1 STOP1 INCR1 SR2 START2 STOP2 INCR2

به ازای هر مقدار متغیر دوم، متغیر اول تمام مقادیر خود را از START1 تا STOP1 پیش می برد.

۱۴- اگر دستور DC نوشته نشود، ولتاژ تمام گره ها چاپ خواهد شد.

۱۵- اگر به جای دستور DC دستور OP نوشته شود، ولتاژ تمام گره ها $V(N_i)$ نسبت به گره مبنا همراه با جریان گذرنده از منابع ولتاژ آنها چاپ خواهد شد. OP نشان دهنده *Operating Point* یا نقطه کار است.

۱۶- در مدارهای بزرگ تنها به مقدار چند متغیر جواب علاقه مندیم؛ از این رو بهتر است دستور DC قرار داده شود و فقط مقادیری که مورد نظر است، درخواست شود.

۱۷- دستور مشخص سازی خروجی یا دستور چاپ چنین است:

.PRINT DC OV1 OV2 ...

که در آن OV1، OV2، ... متغیرهای مطلوبی هستند که باید مقدار آنها چاپ شوند. ولتاژ گره ها به صورت $V(N1)$ ، $V(N2)$ ، ... و ولتاژ شاخه ها به صورت $V(N1, N2)$ در نظر گرفته می شوند. جریان منابع ولتاژ به صورت $I(Vxxx)$ نوشته می شود که در آن Vxxx نام منبع ولتاژ وابسته است.

۱۸- برای تعیین جریان یک شاخه، منبع ولتاژی با مقدار صفر در آن قرار می دهیم و چنین تعریف می کنیم:

Vxxx N1 N2

نیازی به تعیین مقدار صفر برای این منبع نیست. اگر مقدار منبع داده نشود، خود برنامه مقدار آن را صفر در

نظر می‌گیرد (Default). بنابراین جریان این منبع یعنی $I(V_{xxx})$ همان جریان شاخه مطلوب خواهد بود که در دسترس قرار می‌گیرد.

۱۹- اگر مقدار منبعی در ورودی تغییر داده شود (به کمک دستور DC)، می‌توان خروجی متناظر را با استفاده از دستور PLOT رسم کرد.

PLOT DC OV1 OV2 ...

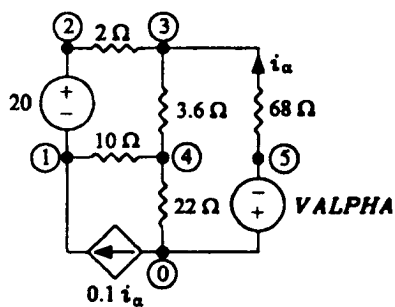
که در این حالت مقادیر OV1، OV2، ... بر حسب تغییر مقادیر ورودی رسم خواهند شد.

۲۰- دستور آخر هر برنامه اسپایس END است که به صورت:

END

نوشته می‌شود.

۲۱- به جز سطر تیترا، تعریف زیرمدارها، دستور OP و دستور END، ترتیب بقیه دستورها کاملاً دلخواه است.



شکل ۱-۱۲*

مثال ۱ مدار نشان داده شده در شکل (۱-۱۲*) را با

استفاده از اسپایس تحلیل کنید.

ابتدا گره‌ها را شماره گذاری می‌کنیم. برای مشخص کردن

جریان i_α که منبع جریان وابسته را کنترل می‌کند از یک

منبع ولتاژ با نام VALPHA با مقدار صفر استفاده

می‌کنیم. این منبع ولتاژ در شاخه‌ای که جریان i_α ، جریان

دارد اضافه شده است. دستورهایی زیر، ساختار مدار و

مقادیر هر عنصر را کاملاً مشخص می‌کنند.

Example of simple DC problem.

F1	0	1	VALPHA	0.1
VALPHA	0	5	DC	0
V1	2	1	DC	20
R1	1	4	10	
R2	4	0	22	
R3	2	3	2	
R4	3	4	3.6	
R5	3	5	68	

END

خروجی برنامه به صورت زیر خواهد بود:

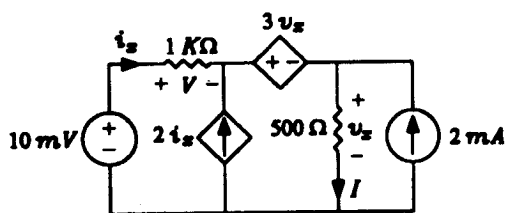
NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	-14.1230	(2)	5.8770	(3)	3.2967	(4)	-1.1732
(5)	0.0000						

VOLTAGE SOURCE CURRENTS

NAME	CURRENT
VALPHA	-4.848E-02
V1	-1.290E+00

TOTAL POWER DISSIPATION 2.58E+01 WATTS

توجه کنید که توان تلف شده توان خالصی است که توسط منابع ولتاژ وابسته ایجاد می شود. اگر یک منبع وابسته یا یک منبع جریان، توانی ایجاد کند، مقدار آن منظور نمی شود. توانی که منبع ۲۰ ولتی ایجاد می کند، ۲۵/۸ وات است. توانی که در مقاومت ها تلف می شود، ۲۵/۸۷ وات است. اختلاف این دو، یعنی ۰/۰۷ وات، توانی است که توسط منبع جریان کنترل شده با جریان تولید می شود.

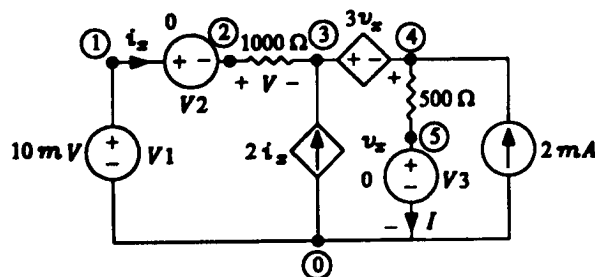


شکل ۲-۱۲* الف

مثال ۲ اکنون فرض کنید که می خواهیم مدار نشان داده شده در شکل (۲-۱۲* الف) را با اسپایس تحلیل کنیم که در آن I جریان گذرنده از مقاومت ۵۰۰ اهمی و V ولتاژ دوسر مقاومت ۱kΩ، متغیرهای خروجی مطلوب می باشند.

متغیر کنترل کننده برای منبع جریان کنترل شده

با جریان، یک منبع ولتاژ صفر ولتی است که به طور سری در شاخه ای که جریان کنترل کننده وجود دارد، قرار داده می شود. به علامت مثبت منبع ولتاژ صفر ولتی نسبت به جهت جریان i_x توجه کنید. این منبع را با V2 نشان می دهیم. منبع ولتاژ صفر ولتی V3 برای در دسترس قرار دادن جریان مورد نظر I به کار رفته است. پس از شماره گذاری شاخه ها، مدار شکل (۲-۱۲* ب) به دست می آید.



شکل ۲-۱۲* ب

دستورهای زیر ساختار مدار و مقدار هر عنصر را معرفی می نمایند. چون جهت i_x ، جهت گذرنده از منبع نیست، بنابراین ناچار یک منبع دیگر تعریف کردیم.

A TYPICAL EXAMPLE

```

V1    1    0    DC    10M
V2    1    2
R1    2    3    1K
F1    0    3    V2    2
E1    3    4    4    5    3
R2    4    5    500
V3    5    0
I1    0    4    DC    2E-3
.DC   V1  10M  10M  1
*THE CURRENT I IS I(V3)
*THE VOLTAGE V IS V(2, 3)
.PRINT DC    I(V3)    V(2,3)
.END

```

با توجه به دستور DC. قرار داده شده در این فایل، فقط مقدار متغیرهای مورد نظر چاپ می‌شود. بنابراین پس از اجرای این برنامه با اسپایس، جواب‌های زیر به دست می‌آیند:

$$I(V3) = 2.900 \text{ E} - 04$$

$$V(2,3) = -5.700 \text{ E} - 01$$

مثال ۳ مدار شکل (۳-۱۲* الف) را با استفاده از اسپایس حل کنید و i_x را به دست آورید.

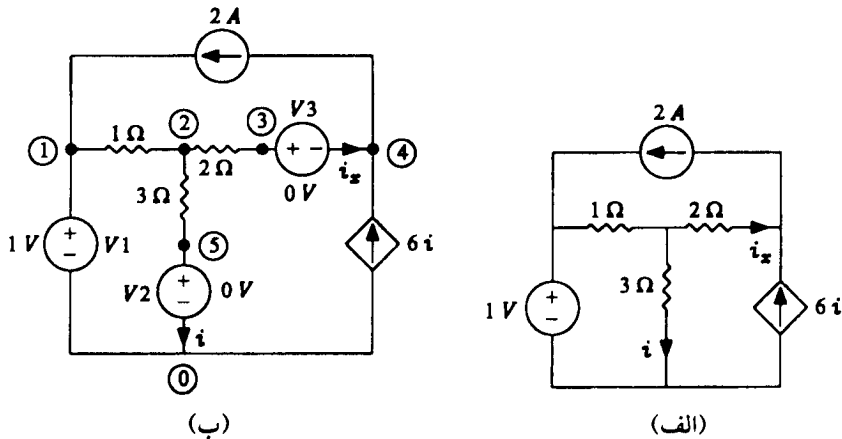
با توجه به لزوم در اختیار داشتن جریان دو شاخه، دو منبع ولتاژ صفر ولتی متناظر آنها به مدار اضافه شده است. گره‌ها را به طور دلخواه شماره گذاری کرده ایم. مدار آماده تحلیل با اسپایس در شکل (۳-۱۲* ب) داده شده است. فایلی که این مدار را توصیف می‌کند، چنین است:

EXAMPLE 3

```

V1    1    0    DC    1
R1    1    2    1
R2    2    5    3
R3    2    3    2
I1    4    1    DC    2
V2    5    0
V3    3    4
F1    0    4    V2    6
.DC   V1  1    1    1
.PRINT DC    I(V3)
.END

```



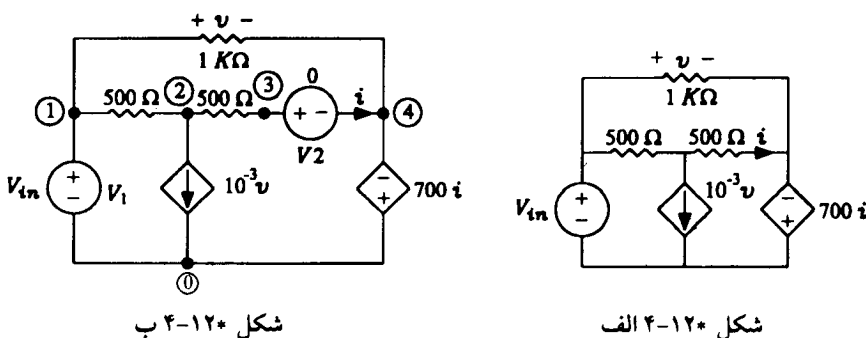
شکل ۳-۱۲* مثال ۳

جریان گذرنده از منبع ولتاژ صفر ولتی V_2 متغیر کنترل کننده جریان کنترل شده است. جریان گذرنده از منبع ولتاژ صفر ولتی V_3 جریان مورد نظر i_x است. V_1 از مقدار اولیه ۱ ولت به مقدار نهایی ۱ ولت با نمو ۱ ولت برده می شود. می توانستیم این دستور را با دستور OP. که ولتاژ تمام گره ها و جریان تمام منابع ولتاژ را چاپ می کند، جایگزین کنیم. اما این دستور، بیشتر از آنچه که مورد نیاز است، خروجی می دهد. نتیجه به دست آمده از اسپایس چنین است:

$$i_x = I(V3) = -1.000$$

اگر مقدار منبع خاصی در یک مدار تغییر کند، می توان اثر تغییرات خروجی را به راحتی با اسپایس محاسبه کرد. برای انجام این کار مقدار منبع را در دامنه مشخص شده، با استفاده از دستور DC. تغییر می دهیم. مثال بعدی این کار را نشان می دهد.

مثال ۴ در مدار شکل (*۱۲-۴ الف) ولتاژ خروجی v را وقتی که منبع ولتاژ ورودی v_{in} از ۱۰- ولت تا ۳۰+ ولت تغییر می کند، به دست آورید.



شکل ۴-۱۲* ب

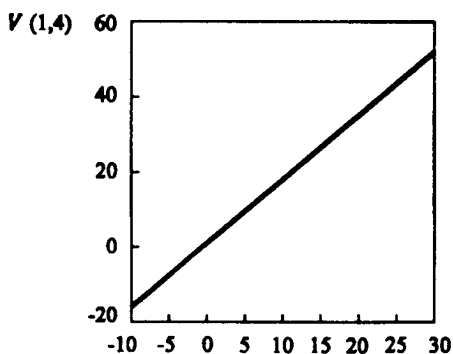
شکل ۴-۱۲* الف

برای مشخص کردن جریان کنترل کننده i از منبع ولتاژ صفر ولتی استفاده شده است. مدار مورد

تحلیل با اسپایس در شکل (*۱۲-۴) داده شده است. فایلی که این مدار را توصیف می‌کند، چنین است:

EXAMPLE 4

```
V1 1 0 DC 1
R1 1 2 500
R2 2 3 500
R3 1 4 1K
V2 3 4
G1 2 0 1 4 1M
H1 0 4 V2 700
.DC V1 -10 30 1
.PRINT DC V(1, 4)
.PLOT DC V(1, 4)
.END
```



شکل (*۱۲-۴)

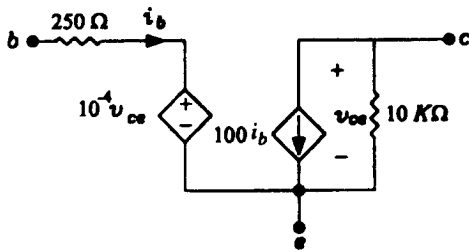
با استفاده از پروب PROBE موجود در اسپایس منحنی v به صورت نشان داده شده در شکل (*۱۲-۴) رسم می‌شود. البته به دست آوردن این منحنی با دست خسته کننده است؛ لیکن اسپایس این کار را به سرعت انجام می‌دهد. دستور PRINT، تمام مقادیر ولتاژ خروجی را چاپ خواهد کرد.

تعیین مقاومت ورودی یک مدار به کمک اسپایس

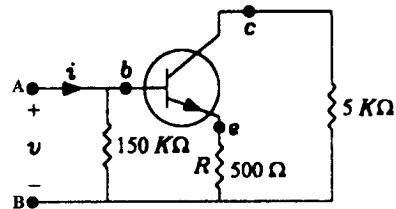
به طوری که می‌دانیم برای تعیین مقاومت ورودی یک مدار، یک منبع جریان آزمایشی I_T را در دوسر آن قرار داده، ولتاژ V_T دوسر منبع جریان را محاسبه می‌کنیم. نسبت $\frac{V_T}{I_T}$ مقاومت دیده شده در سرهای مدار را به دست می‌دهد. اگر مقدار I_T را برابر ۱ در نظر بگیریم، مقدار V_T همان مقاومت ورودی خواهد بود. مثال ۵ این مطلب را نشان می‌دهد.

مثال ۵ مدار نشان داده شده در شکل (*۱۲-۵ الف) یک تقویت کننده ترانزیستوری بای پولار را نشان می‌دهد. مقاومت ورودی در سرهای A و B را حساب کنید.

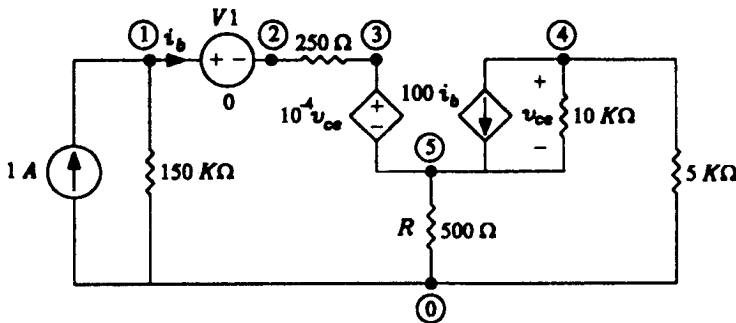
ابتدا ترانزیستور بای پولار را با مدل خطی سیگنال کوچک آن مطابق شکل (*۱۲-۵ ب) جایگزین می‌کنیم. مدار معادل ترانزیستور از دو منبع کنترل شده و دو مقاومت تشکیل می‌شود. جریان کنترل کننده منبع جریان کنترل شده، برابر i_b است. با جایگزینی مدار معادل ترانزیستور بای پولار در شکل (*۱۲-۵ الف) و شماره گذاری گره‌ها و معرفی منبع ولتاژ صفر ولتی $V1$ برای تعیین جریان i_b ، مدار شکل (*۱۲-۵ پ) را به دست می‌آوریم. فایلی که این مدار را توصیف می‌کند، چنین است:



(ب)



(الف)



(پ)

شکل *۱۲-۵ مثال ۵.

EXAMPLE 5

```

I1      0      1      DC      1
R1      1      0      150K
V1      1      2
R2      2      3      250
R3      4      5      10K
R4      4      0      5K
R5      5      0      500
E1      3      5      4      5      1E-4
F1      4      5      V1      100
.DC     I1      1      1      1
.PRINT  DC      V(1)
.END

```

خروجی حاصل از اجرای این برنامه، ولتاژ گره ① خواهد بود که همان مقاومت ورودی در سرهای مدار شکل (*۱۲-۵ الف) است که چنین است:

$$R_{eq} = V(1) = 27020 \Omega$$

تبصره ۱۵ می توان از اسپایس برای انجام کارهای طراحی به صورت محاسبات تکراری استفاده کرد؛ مثلاً

فرض کنید می‌خواهیم در مدار شکل (۱۲-۵ الف)، مقدار R را چنان تعیین کنیم که به ازای آن مقاومت ورودی $R_{eq} = 5k\Omega$ باشد. با مراجعه به برنامه بالا و کاهش R در هر تکرار، دنباله نتایج زیر را به دست می‌آوریم:

مرحله	R	R_{eq}
1	500	2.702 E4
2	100	6.631 E3
3	50	3.505 E3
4	75	5.087 E3
5	74	5.025 E3
6	73	4.962 E3
7	73.5	4.994 E3

با انجام این تکرار به طور نسبتاً سریعی به مقدار $R = 73.5$ می‌رسیم، که مقدار $R_{eq} \cong 5k\Omega$ را به دست می‌دهد.

تبصره ۲ چون ولتاژ مدار باز میان هر دو گره دلخواه از هر مداری را می‌توان با استفاده از اسپایس تعیین کرد، و هم‌اکنون یاد گرفتیم که مقاومت دیده شده از هر دو سر هر مدار را نیز می‌توان با استفاده از اسپایس به دست آورد؛ بنابراین تعیین مدار معادل تونن دیده شده در هر دو سر دلخواه یک مدار به راحتی با استفاده از اسپایس انجام پذیر است. ضمن اینکه این کار را دستور دیگری به نام دستور TF، که هم‌اکنون شرح داده خواهد شد، تعیین می‌کند.

دستور کنترل TF.

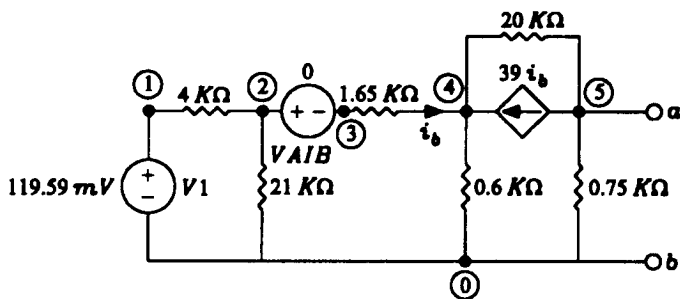
منظور از TF تابع تبدیل یا Transfer Function است. این دستور نسبت متغیر خروجی به متغیر ورودی را به دست می‌دهد که به نام بهره تابع تبدیل گفته می‌شود. این دستور همچنین مقاومت ورودی نسبت به سرهای منبع ورودی، و مقاومت خروجی نسبت به سرهای عنصر خروجی را نیز به دست می‌دهد. شکل کلی آن چنین است:

$$TF = \frac{\text{OUTVAR}}{\text{INSRC}}$$

متغیر خروجی منبع ورودی

با در اختیار داشتن ولتاژ خروجی و مقاومت در سرهای خروجی می‌توان از این دستور کنترل برای تعیین مدار معادل تونن نسبت به سرهای مشخص شده استفاده کرد.

مثال ۶ مدار معادل تونن دیده شده در سرهای a و b مدار نشان داده شده در شکل (۱۲-۶) را با استفاده از دستور کنترل TF، تعیین کنید.



شکل *۱۲-۶ مثال ۶.

با معرفی منبع ولتاژ صفر ولتی VAIB و شماره گذاری گره ها، فایلی که این مدار را توصیف می کند

چنین است:

Example 6 finding THEVENIN equivalent with spice.

```
V1      1      0      DC      119.59 E - 3
R1      1      2      4k
R2      2      0      21k
R3      3      4      1.65k
R4      4      0      0.6k
R5      4      5      20k
R6      5      0      0.75k
F1      5      4      VAIB      39
VAIB    2      3      DC      0
.TF     V(5, 0)      V1
.END
```

خروجی اسپایس به صورت زیر خواهد بود.

```

NODE    VOLTAGE    NODE    VOLTAGE    NODE    VOLTAGE
(1)      0.1196    (2)      0.0882    (3)      0.0882
(4)      0.0822    (5)     -0.1000

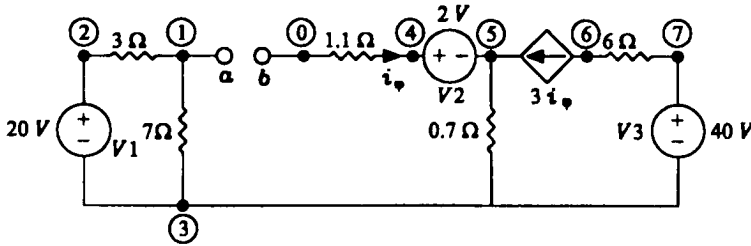
**** SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS
V(5, 0)/V1 = -8.359 E - 01
INPUT RESISTANCE AT V1 = 1.523E+04
OUTPUT RESISTANCE AT V(5, 0) = 7.446 E+02
```

یعنی مدار معادل تونن به صورت $e_{oc} = -99.96$ و $R_{th} = 744.6 \Omega$ به دست می آید.

مثال ۷ با استفاده از اسپایس مدار معادل تونن را نسبت به سرهای a و b در مدار شکل (*۱۲-۷) به دست آورید.

توجه کنید i_b جریان گذرنده از منبع ولتاژ ثابت است و بنابراین لازم نیست منبع ولتاژی با مقدار صفر معرفی شود. همچنین توجه کنید که فقط یک شاخه به گره b وصل است. اسپایس لازم دارد که حداقل

دو شاخه به هر گرهی وصل شوند. برای رفع این مشکل دو کار می‌توان انجام داد. یکی اینکه مقاومتی با مقدار زیاد میان گره b و هر گره دیگر وصل شود؛ مثلاً با مقدار 10^6 ، دوم اینکه خازنی میان گره b و هر گره دیگر وصل شود. خازن در تحلیل dc مانند مدار باز عمل می‌کند. در این مثال، مقاومت $10^6 \Omega$ را میان گره b و گره ③ وصل می‌کنیم.



شکل *۱۲-۷ مثال ۷.

توجه کنید که ما گره b را به عنوان گره مبنا انتخاب کرده‌ایم. بنابراین ولتاژ تونن قسمتی از خروجی مدار است. با استفاده از منبع ولتاژ ۲ ولتی $V2$ ، برای اندازه‌گیری جریان i_v و شماره‌گذاری گره‌ها فایلی که مدار را توصیف می‌کند، چنین است:

EXAMPLE 7 finding THEVENIN equivalent

R1	1	2	3	
R2	1	3	7	
V1	2	3	DC	20
R3	0	4	1.1	
R4	0	3	1E6	
V2	4	5	DC	2
R5	5	3	0.7	
F1	6	5	V2	3
R6	6	7	6	
V3	7	3	DC	40
.TF	V(1, 0)		V1	
.END				

خروجی اسپایس به صورت زیر خواهد بود:

NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE	NODE	VOLTAGE
(1)	12.0000	(2)	18.0000	(3)	- 2.0000
(4)	2.200 E - 06	(5)	- 2.0000	(6)	38.0000
(7)	38.0000				

**** SMALL-SIGNAL CHARACTERISTICS

$V(1, 0)/V1 = 7.000 \text{ E} - 01$

INPUT RESISTANCE AT V1 = $1.000 \text{ E} + 01$

OUTPUT RESISTANCE AT V(1, 0) = $6.0000 \text{ E} + 00$

از این رو ولتاژ تونن، برابر ۱۴ ولت و مقاومت معادل تونن، ۶ اهم است.

دستور کنترل SENS.

حساسیت یک مفهوم مهم فیزیکی و مهندسی است که در بررسی و مقایسه مدارها و سیستم ها می تواند نقش مهمی ایفا کند. در بسیاری از موارد روشهای مختلف طراحی به چند مدار متفاوت با مشخصه های خروجی یکسان منجر می شوند و یکی از مفاهیمی که در انتخاب یک طرح از میان چند طرح موجود مورد استفاده قرار می گیرد، مفهوم حساسیت است. منظور از حساسیت خروجی یک مدار نسبت به یک پارامتر، تعیین تغییرات خروجی به ازای تغییر جزئی آن پارامتر است.

دستور کنترل SENS. برای به دست آوردن حساسیت های سیگنال کوچک dc هر متغیر خروجی مشخص نسبت به هر پارامتر مدار، به کار می رود. صورت کلی دستور تعیین حساسیت به کمک دستور کنترل SENS. چنین است:

SENS vname

که در آن vname نام متغیر مداری است (یا لیستی از نامهای متغیر مدار است) که نسبت به آن تحلیل حساسیت انجام می گیرد.

مثال ۸ مدار نشان داده شده در شکل (*۱۲-۸) یک تقسیم کننده ولتاژ است و می خواهیم حساسیت ولتاژ خروجی را نسبت به هر یک از پارامترهای مدار که همان مقاومت های R_1 ، R_2 و منبع ولتاژ ورودی V_s هستند، تعیین کنیم.

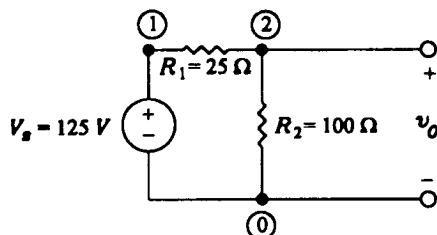
پس از شماره گذاری گره ها فایلی که مدار را توصیف می کند، چنین است:

EXAMPLE OF SENSITIVITY ANALYSIS

V1	1	0	DC	125
R1	1	2		25
R2	2	0		100

.SENS V(2, 0)

.END



شکل *۱۲-۸ مثال ۸.

اسپایس مقادیر تحلیل dc و تحلیل حساسیت را باهم چاپ می‌کند.

DC SENSITIVITIES OF OUTPUT V(2, 0)

Element name	Element value	Element sensitivity (volts / unit)	Normalized sensitivity (volts / percent)
R1	2.500 E 01	- 8.000 E - 01	- 2.000 E - 01
R2	1.000 E 02	2.000 E - 01	2.000 E - 01
V1	1.250 E 02	8.000 E - 01	1.000 E 00

ستون سوم نشان می‌دهد که اگر متغیر خاصی یک واحد تغییر کند، متغیر خروجی چقدر تغییر خواهد کرد. ستون چهارم نشان می‌دهد که اگر متغیر خاصی یک درصد تغییر کند، متغیر خروجی چند درصد تغییر خواهد کرد.

از تحلیل ساده dc مدار به دست می‌آوریم: $v_o = V(2) = 100$. این وقتی است که R1، R2 و V1 مقادیر نامی خود را بگیرند. از تحلیل داده‌های حساسیت، نتایج زیر حاصل می‌شود:

- ۱- اگر R1 یک اهم اضافه شود، v_o به مقدار 0.8 ولت کاهش می‌یابد؛ یعنی $v_o = 99.2$.
- ۲- اگر R1 یک درصد اضافه شود، v_o به مقدار 0.2 کاهش می‌یابد؛ یعنی $v_o = 99.8$.
- ۳- اگر R2 به مقدار یک اهم اضافه شود، v_o به مقدار 0.2 اضافه می‌شود؛ یعنی $v_o = 100.2$.
- ۴- اگر R2 به مقدار یک درصد اضافه شود، v_o به مقدار 0.2 اضافه می‌شود؛ یعنی $v_o = 100.2$.
- ۵- اگر V1 به مقدار یک ولت اضافه شود، v_o به مقدار 0.8 ولت اضافه می‌شود؛ یعنی $v_o = 100.8$.
- ۶- اگر V1 به مقدار یک درصد اضافه شود، v_o به مقدار 1 ولت اضافه می‌شود؛ یعنی $v_o = 101$.

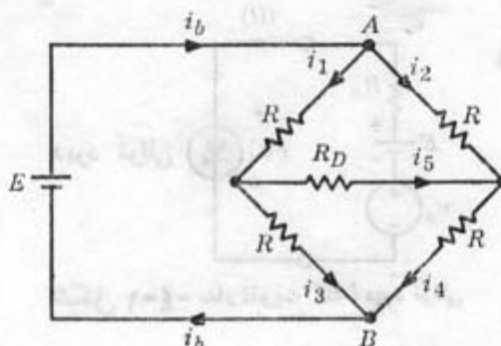
تبصره چون مدار خطی داریم قضیه جمع آثار قابل اعمال است. بنابراین می‌توان اثرات همزمان آنها را باهم پیدا کرد. مثلاً اگر R1 به مقدار یک اهم افزایش و R2 به مقدار یک درصد کاهش و V1 به مقدار 0.5 ولت افزایش یابد، اثرات آنها روی v_o چنین خواهد بود:

$$v_o = 100 - 0.8 + 0.2 + 0.4 = 99.4$$

۴- تجزیه و تحلیل سیگنال کوچک

چنانکه در بخش ۳ گفته شد، تجزیه و تحلیل مدارهای با مقاومت‌های غیرخطی دشوار است. مشخصه معادل اتصال سری- موازی مقاومت‌های غیرخطی را به دست آوردیم و برای نشان دادن چگونگی محاسبه تقسیم جریان در دو مقاومت غیرخطی موازی به معرفی یک مثال ساده پرداختیم. تجزیه و تحلیل کلی مدارهای ساخته شده از مقاومت‌های غیرخطی از حدود برنامه این کتاب خارج است. اگرچه در فصل ۱۸ بعضی حقایق اساسی مربوط به این مدارها پی‌ریزی خواهد شد.

یک فن ویژه و بسیار مهم در مهندسی، تجزیه و تحلیل سیگنال کوچک یک سیستم غیرخطی است. با یک مدار مقاومتی شامل یک دیود تونلی به تشریح ایده اساسی خواهیم پرداخت. در فصل ۱۷ هنگام بحث



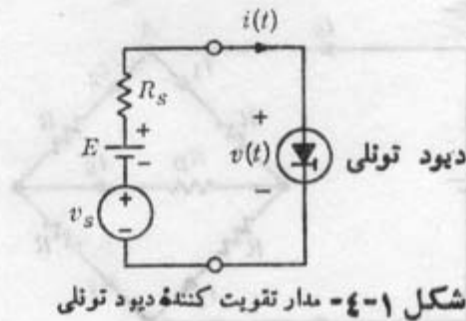
شکل ۴-۳- مثال ۴: یک مدار پل متقارن.

۴- تجزیه تحلیل سیگنالهای کوچک

چنانکه در بخش پیش گفته شد، تجزیه و تحلیل مدارهای با مقاوت غیر خطی دشوار است. مشخصه معادل اتصال سری - موازی مقاومتهای غیر خطی را بدست آوردیم و برای نشان دادن چگونگی محاسبه توزیع جریان دو مقاوت غیر خطی موازی به معرفی یک مثال ساده پرداختیم. تجزیه و تحلیل کلی مدارهای ساخته شده از مقاومتهای غیر خطی از حدود برنامه این کتاب خارج است. اگرچه در فصل هجدهم بعضی حقایق اساسی مربوط باین مدارها توسعه داده خواهد شد.

یک فن ویژه و بسیار مهم در مهندسی، تجزیه و تحلیل سیگنالهای کوچک یک سیستم غیر خطی است. با یک مدار مقاومتی شامل یک دیود تونلی به تشریح ایده اساسی خواهیم پرداخت. در فصل هفدهم هنگام بحث در مورد دو قطبیهای غیر خطی، این مفهوم بیشتر مورد بحث قرار خواهد گرفت.

مثال مدار شکل (۴-۱) را در نظر بگیرید که در آن یک دیود تونلی (یک مقاوت غیر خطی کنترل شده ولتاژ) بیک مقاوت خطی با مقاوت R_2 و یک ورودی متشکل از یک منبع ولتاژ ثابت E و یک منبع ولتاژ تغییرپذیر پذیر با زمان $v_s(t)$ وصل شده است. در بحث کنونی فرض می شود که برای تمام مقادیر t ، $|v_s(t)| \ll E$ ، که بدینمعنی است که ولتاژ تغییرپذیر پذیر با زمان در تمام لحظات (از نظر قدر مطلق) به مراتب کوچکتر از منبع dc است. در کاربردهای عملی منبع تغییرپذیر پذیر با زمان متناظر با سیگنال

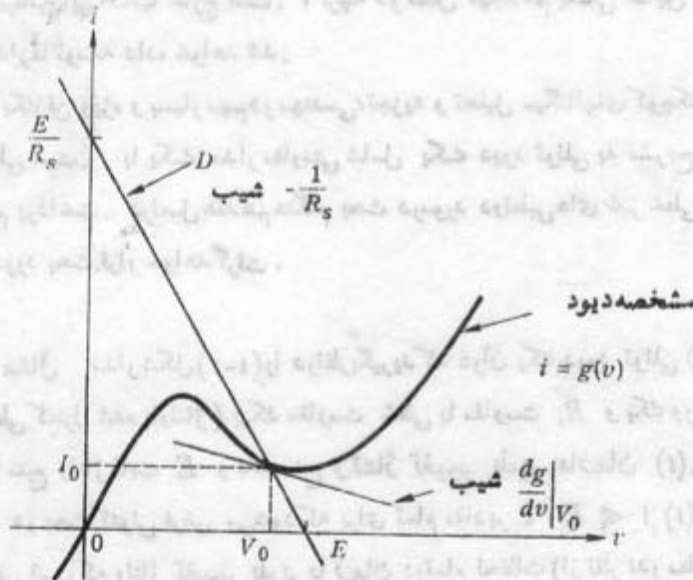


است و منبع dc بایاس نامیده می‌شود. مسأله تعیین ولتاژ $v(t)$ و جریان $i(t)$ برای دیود تونلی نشان داده شده در شکل (۱-۴) می‌باشد.

اکنون با استفاده از قوانین کیرشف و معادلات شاخه همهٔ عناصر در مدار، معادلات لازم را بدست می‌آوریم. ابتدا، KCL بیان می‌کند که از هر عنصر مدار شکل (۱-۴) جریان یکسان $i(t)$ می‌گذرد. سپس با بکار بردن KVL برای حلقه داریم:

$$(۱-۴) \quad E + v_s(t) = R_s i(t) + v(t)$$

گیریم که مشخصهٔ دیود تونلی با معادلهٔ زیر توصیف شود:



شکل ۲-۴ - مشخصهٔ دیود تونلی و مشخصهٔ بقیه مدار

$$i = g(v) \quad (1-2)$$

این مشخصه در صفحه vi در شکل (1-2) رسم شده است با ترکیب (1-1) و (1-2) داریم:

$$E + v_s(t) = R_s g[v(t)] + v(t) \quad \text{برای تمام مقادیر } t \quad (1-2)$$

این معادله ایست که در آن $v(t)$ تنها مجهول است و چون برای تمام مقادیر t برقرار است، پس معادله (1-3) بایستی برای هر مقدار t حل شود و تابع مجهول $v(0)$ نقطه به نقطه پیدا شود.

قبل از اقدام به حل (1-3) از این حقیقت که ورودی مجموع دو جمله یعنی منبع dc با ولتاژ E و منبع تغییرپذیر با زمان $v_s(t)$ است استفاده میکنیم. با در نظر گرفتن فقط منبع dc در مرحله اول مسئله را میتوان آسانتر حل کرد. پس از پیدا کردن جواب dc مسأله، منبع تغییرپذیر با زمان را در نظر میگیریم و تمامی مسأله را با روش سیگنال کوچک تجزیه تحلیل میکنیم.

«قدم اول» برای تمام مقادیر t ، $v_s(t) = 0$ است. منبع ولتاژ ناپسته v_s در شکل (1-1) یک مدار اتصال کوتاه میشود. KVL میدهد:

$$E - R_s i = v \quad (1-4)$$

دیود تونلی با مشخصه‌اش مطابق شکل (1-2) توصیف میشود. دو معادله (1-2) و (1-4) دارای دو مجهول v و i میباشد. مسأله را به روش ترسیمی حل میکنیم. در شکل (1-2) خط مستقیمی که با D نامگذاری شده، مکان کلیه نقاط (v, i) است که در معادله (1-4) صدق میکند. بطریق مشابه، مشخصه دیود تونلی مکان کلیه نقاط (v, i) است که در معادله (1-2) صدق میکند. بنابراین هر نقطه (v, i) که هم روی خط D و هم روی مشخصه دیود تونلی قرار دارد، دارای مختصات (v, i) است که در معادلات (1-2) و (1-4) صدق میکند. بنابراین هر نقطه تقاطع خط D و مشخصه دیود تونلی، یک جواب دستگاه توصیف شده با معادلات (1-2) و (1-4) را میدهد. در موقعیت کنونی، چنانکه در شکل (1-2) نشان داده شده است فقط یک جواب (V_o, I_o) وجود دارد. بنابراین (V_o, I_o) در معادلات (1-2) و (1-4) صادق است یعنی:

نظریه^۱ اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$(۵-۴) \quad E - R_s I_o = V_o$$

$$(۵-۴) \quad I_o = g(V_o)$$

(V_o, I_o) «نقطه کار»^(۱) نامیده میشود. اکنون به حل کامل مسأله می‌پردازیم.
«قدم دوم» ولتاژ v_s متحد یا صفر نیست. معادلاتیکه این وضع را توصیف میکنند عبارتند از:

$$(۶-۴) \quad E + v_s(t) - R_s i(t) = v(t) \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

$$(۶-۴) \quad i(t) = g[v(t)] \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

برای هر مقدار t ، مکان تمام نقاط $(v(t), i(t))$ که در معادله (۶-۴) صدق میکند خط مستقیمی موازی خط D در صفحه vi شکل (۲-۴) است. اگر $v_s(t) > 0$ باشد این خط بالای D و اگر $v_s(t) < 0$ باشد پائین D است. مکان کلیه نقاط $(v(t), i(t))$ که در معادله (۶-۴) صدق میکنند مشخصه دیود تونلی است که برحسب زمان ثابت باقی میماند. بنابراین هر نقطه $(v(t), i(t))$ که هم روی خط مستقیم و هم روی مشخصه قرار دارد در (۶-۴) الف) و (۶-۴) ب) صدق میکند. بطور خلاصه، نقطه تقاطع جواب را مشخص میکند. بنابراین، معادلات (۶-۴) را میتوان همواره بروش ترسیمی حل کرد.

ما فرض کرده‌ایم که برای تمام مقادیر t ، $|v_s(t)| \ll E$. روش تجزیه و تحلیل سیگنال کوچک که یک روش حل تقریبی است، تا زمانی معتبر است که $|v_s(t)|$ کوچک باشد. قدم اول نوشتن جواب $(v(t), i(t))$ بصورت مجموع دو جمله است. بنابراین:

$$(۷-۴) \quad v(t) = V_o + v_1(t)$$

$$(۷-۴) \quad i(t) = I_o + i_1(t)$$

توجه داشته باشید که (V_o, I_o) نقطه کار است یعنی جواب بازا $v_s(t) = 0$. چون $v_s(t)$ کوچک فرض شده است جواب $(v(t), i(t))$ در نزدیکی (V_o, I_o) قرار دارد

بنابراین $v_1(t)$ و $i_1(t)$ را میتوان بصورت یک انحراف^(۱) در جواب dc، (V_o, I_o) در نظر گرفت. این انحراف از منبع سیگنال کوچک $v_s(t)$ ناشی میشود. حال $v_1(t)$ و $i_1(t)$ را برای تمام مقادیر t تعیین میکنیم. ابتدا مشخصه دیود تونلی $i = g(v)$ را در نظر بگیریم. با استفاده از معادله (۷-۴) و (ب) داریم:

$$(۸-۴) \quad I_o + i_1(t) = g[V_o + v_1(t)]$$

چون بنابه فرض $v_1(t)$ کوچک است میتوان طرف راست معادله (۸-۴) را با سری تیلور^(۲) بسط داد و فقط دو جمله اول را بصورت یک تقریب در نظر گرفت. بنابراین:

$$(۹-۴) \quad I_o + i_1(t) \approx g(V_o) + \left. \frac{dg}{dv} \right|_{V_o} v_1(t)$$

با جایگزینی (۵-۴) ب (۹-۴)، یک معادله ساده برای $i_1(t)$ و $v_1(t)$ بدست میآوریم بنابراین:

$$(۱۰-۴) \quad i_1(t) \approx \left. \frac{dg}{dv} \right|_{V_o} v_1(t)$$

جمله $\left. \frac{dg}{dv} \right|_{V_o}$ شیب منحنی مشخصه دیود تونلی در نقطه کار (V_o, I_o) میباشد، همانطور که در شکل (۲-۴) نشان داده شده است. گیریم که چنین نشان دهیم:

$$(۱۱-۴) \quad \left. \frac{dg}{dv} \right|_{V_o} \triangleq G = \frac{1}{R}$$

و G «را رسانائی سیگنال کوچک دیود تونلی در نقطه کار (V_o, I_o) بنامیم». توجه داشته باشید که G «منفی» است. بنابراین در مورد منبع میگنال کوچک v_s دیود تونلی یک مقاومت خطی اکتیو^(۳) است چون تا آنجا که v_s مورد نظر است مشخصه مقاومتی دیود تونلی دارای یک «مبداء» در (V_o, I_o) است و مشخصه در حوالی (V_o, I_o) مشخصه یک مقاومت خطی با مقاومت منفی است. بنابراین:

$$(۱۲-۴) \quad i_1(t) = Gv_1(t) \quad \text{یا} \quad v_1(t) = Ri_1(t)$$

۱- Perturbation

۲- Taylor

۳- Active

۱۲۴

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

به منظور محاسبه $v_1(t)$ و $i_1(t)$ ، ابتدا باید به معادلهٔ اصلی KVL یعنی معادله (۴-۶) الف، بازگردیم و آنرا با معادلات (۴-۷) الف و (۴-۷) ب ترکیب کنیم در این صورت بدست می‌آوریم.

$$(۴-۱۳) \quad E + v_s(t) - R_s[I_0 + i_1(t)] = V_0 + v_1(t)$$

با استفاده از اطلاعات حاصل از (۴-۵) الف که V_0 و I_0 را بهم مربوط می‌سازد معادله زیر که $v_1(t)$ و $i_1(t)$ را بهم ربط می‌دهد بدست می‌آید:

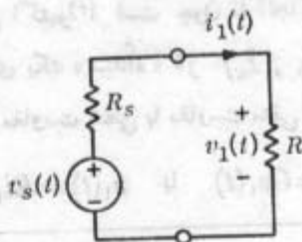
$$(۴-۱۴) \quad v_s(t) - R_s i_1(t) = v_1(t)$$

معادلات (۴-۱۲) و (۴-۱۴) یک دستگاه دو معادله «خطی» جبری با دو مجهول $v_1(t)$ و $i_1(t)$ تشکیل می‌دهند و بسادگی حل می‌گردند. چون G در (۴-۱۲) یک مقدار ثابت است، معادله شاخهٔ یک مقاومت خطی تغییر ناپذیر با زمان (اکتیو) را توصیف می‌کند. معادله (۴-۱۴) بسادگی معادله KVL را برای مدار نشان داده شده در شکل (۴-۳) نشان می‌دهد. این مدار «مدار معادل سیگنال کوچک» [در اطراف نقطه کار (V_0, I_0)] مدار دیود تونلی شکل (۴-۱) نامیده می‌شود. از (۴-۱۲) و (۴-۱۴) بسادگی جواب را محاسبه می‌کنیم.

$$(۴-۱۵) \quad i_1(t) = \frac{v_s(t)}{R_s + R}$$

و:

$$(۴-۱۶) \quad v_1(t) = R i_1(t) = \frac{R v_s(t)}{R_s + R}$$



شکل ۴-۳ - مدار معادل سیگنال کوچک

در موقعیت کنونی $R = \frac{1}{G}$ و G منفی است. از اینرو با انتخاب مناسب R_s ، میتوان $v_1(t)$ را بسیار بزرگتر از $v_s(t)$ ساخت. در آنصورت ولتاژ متغیر $v_1(t)$ در دوسر دیود بسیار بزرگتر از ولتاژ وارد شده $v_s(t)$ است. چون جریانهای تغییر پذیر با زمان در منبع ولتاژ v_s و مقاومت R یکسانند، قدرت سیگنالی که به مقاومت داده شده تقویت گردیده است. در واقع مدار شکل (۴-۱) یک تقویت کننده دیود تونلی ساده است. منبع dc و مقاومت R_s که «مدار با یاس» را تشکیل میدهند نقطه کار (V_o, I_o) را طبق معادلات (۴-۵ الف) و (۴-۵ ب) تعیین میکنند. شیب مشخصه دیود تونلی در نقطه کار یعنی رسانائی معادل سیگنال کوچک G و مقدار R_s ضریب تقویت تقویت کننده یعنی $\frac{R}{R+R_s}$ را تعیین میکنند.

البته تجزیه و تحلیل فوق، چون از کلیه عناصر پارازیتی (مانند خازن پارازیت) دیود تونلی صرف نظر گردید بسیار ساده شده است. در هر حال، باین ترتیب چگونگی کاربرد قوانین اساسی در حل بعضی مسائل جالب تشریح میگردد.

۵ مدارهای با خازنها یا سلفها

اتصالهای سری و موازی تنها خازنها و یا تنها سلفها را میتوان بروشی مشابه اتصال مقاومتها بررسی کرد. برای سادگی، این واقعیت را برای حالت خطی تغییر ناپذیر با زمان بررسی خواهیم کرد.

۵-۱ اتصال سری خازنها

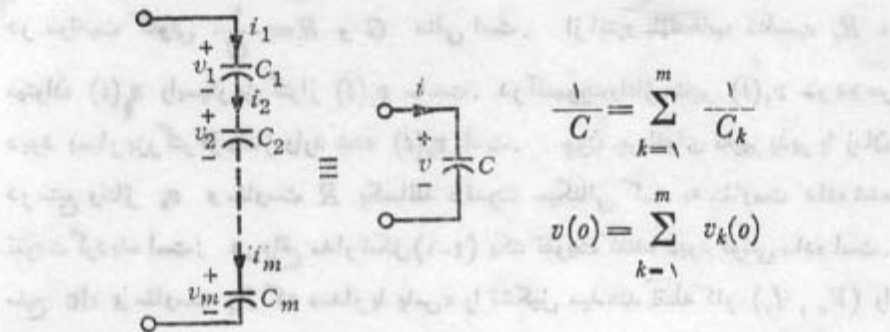
اتصال سری خازنها را مطابق شکل (۵-۱) در نظر بگیرید. مشخص سازی شاخه ای خازنهای خطی تغییر ناپذیر با زمان عبارتست از:

$$(۵-۱) \quad v_k(t) = v_k(0) + \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k(t') dt'$$

با بکار بردن KCL در همه گرهها بدست میآوریم:

$$(۵-۲) \quad i_k(t) = i(t) \quad k=1, 2, \dots, m$$

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها



شکل ۵-۱- اتصال سری خازنهای خطی

با استفاده از KVL داریم :

$$(۵-۳) \quad v(t) = \sum_{k=1}^m v_k(t)$$

در لحظه $t=0$:

$$(۵-۴) \quad v(0) = \sum_{k=1}^m v_k(0)$$

با ترکیب معادلات (۵-۴) تا (۵-۳) بدست می‌آوریم :

$$(۵-۵) \quad v(t) = v(0) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{C_k} \int_0^t i(t') dt'$$

بنابراین خازن معادل بصورت زیر داده میشود :

$$(۵-۶) \quad \frac{1}{C} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{C_k}$$

بنابراین بیان میکنیم که «اتصال سری m خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان هر یک با ظرفیت C_k و ولتاژ اولیه $v_k(0)$ ، معادل با یک خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان با ظرفیت C است که در معادله (۵-۶) داده شده و ولتاژ اولیه آن چنین است» :

$$(۵-۷) \quad v(o) = \sum_{k=1}^m v_k(o)$$

اگر بجای ظرفیت، الاستانس^(۱) یعنی $S_k = \frac{1}{C_k}$ را بکار ببریم، در اینصورت معادله (۵-۶) چنین میشود:

$$(۵-۸) \quad S = \sum_{k=1}^m S_k$$

این بدینمعنی است که الاستانس خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان که معادل اتصال سری m خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان با الاستانسهای S_k ، m ، $...$ ، 2 ، 1 است برابر مجموع m الاستانس میباشد. بنابراین الاستانس برای خازن، نقش مقاومت را برای یک مقاومت بازی میکند.

تمرین = انرژی کل ذخیره شده در خازنها را برای اتصال سری حساب کنید و آنرا با انرژی ذخیره شده در خازن معادل مقایسه کنید:

۵-۲ اتصال موازی خازنها

در مورد اتصال موازی m خازن باید فرض کنیم که همه خازنها دارای ولتاژ اولیه یکسان میباشند. زیرا در غیر اینصورت KVL در لحظه $t=0$ نقض میشود. بسادگی میتوان نشان داد که در مورد اتصال موازی m خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان با ولتاژ اولیه یکسان $v_k(o)$ ، خازن معادل برابر است با:

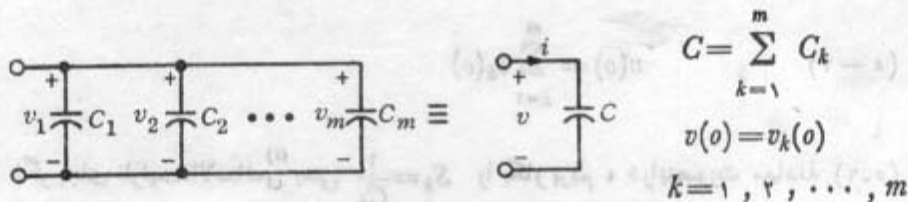
$$(۵-۹) \quad C = \sum_{k=1}^m C_k$$

و:

$$(۵-۱۰) \quad v(o) = v_k(o)$$

این مطلب در شکل (۵-۲) نشان داده شده است.

مثال = فرض کنید اتصال موازی دو خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان را با ولتاژهای



شکل ۵-۲- اتصال موازی خازنهای خطی

متفاوت در نظر میگیریم. در شکل (۵-۳) خازن ۱ دارای ظرفیت C_1 و ولتاژ V_1 و خازن ۲ دارای ظرفیت C_2 و ولتاژ V_2 است. در لحظه $t=0$ کلید بسته میشود بطوریکه دو خازن بطور موازی بهم وصل میشوند. بلافاصله پس از بستن کلید، در مورد ولتاژ دوسر اتصال موازی چه میتوان گفت؟ ابتدا از (۵-۹) میدانیم که اتصال موازی دارای یک ظرفیت معادل میباشد.

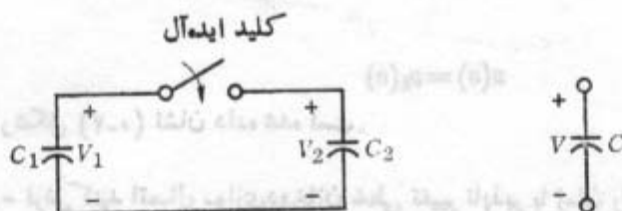
$$G = C_1 + C_2 \quad (5-11)$$

در لحظه $t=0-$ (بلافاصله پیش از بسته شدن کلید) بار ذخیره شده در دو خازن عبارتست از:

$$Q(0-) = Q_1(0-) + Q_2(0-) \\ = C_1 V_1 + C_2 V_2 \quad (5-12)$$

چون اصل بقاء بار الکتریکی یک اصل اساسی فیزیکی است. پس در لحظه $t=0+$ (بلافاصله پس از بسته شدن کلید) داریم:

$$Q(0+) = Q(0-) \quad (5-13)$$



شکل ۵-۳- اتصال موازی دو خازن با ولتاژهای متفاوت

از روابط (۵-۱۱) تا (۵-۱۳) میتوان ولتاژ جدید دو سر اتصال موازی خازنها را پیدا کرد. گیریم ولتاژ جدید V باشد، پس:

$$CV = C_1 V_1 + C_2 V_2$$

یا:

$$(۵-۱۴) \quad V = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2}$$

از نظر فیزیکی این پدیده را میتوان چنین تشریح کرد: فرض کنید که V_1 بزرگتر از V_2 و C_1 برابر C_2 باشد، بنابراین در لحظه $t=0$ بار $Q_1(0-)$ بزرگتر از $Q_2(0-)$ است. در $t=0$ ، لحظه ای که کلید بسته میشود، آن مقدار بار از خازن اول به خازن دوم میرود این مطلب بیان میدارد که در $t=0$ یک ضربه جریان از خازن ۱ به خازن ۲ جاری میشود. در نتیجه در $t=0+$ ولتاژ دوسر دو خازن یکسان شده به مقدار متوسط V که اصل بقاء بار ایجاب میکند میرسد.

این پدیده مشابه برخورد دوزره باجرمهای متفاوت m_1 و m_2 و به ترتیب باسرعتهای v_1 و v_2 میباشد. پیش از برخورد، مقدار حرکت^(۱) $m_1 v_1 + m_2 v_2$ است و پس از برخورد، مقدار حرکت $(m_1 + m_2)v$ است. بنابه اصل بقای مقدار حرکت، سرعت v پس از برخورد بشکل زیر داده میشود.

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

این معادله نظیر معادله (۵-۱۴) است.

تقریب انرژی کل ذخیره شده در خازنها را پیش از بسته شدن کلید و پس از بسته شدن کلید حساب کنید. اگر مقادیر دو انرژی یکی نیستند تفاوت انرژی کجا رفته است؟ این سؤال پس از مطالعه فصل ۴ روشن خواهد شد.

۵-۳ اتصال سری سلفها

اتصال سری m سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان در شکل (۵-۴) نشان داده شده

۱۳۰

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

است. گیریم سلف‌ها بصورت زیر مشخص شده باشند :

$$(۵-۱۵) \quad v_k = L_k \frac{d}{dt} i_k \quad k=1, 2, \dots, m$$

و گیریم جریان اولیه $i_k(0)$ باشد. با استفاده از KCL در تمام گره‌ها داریم :

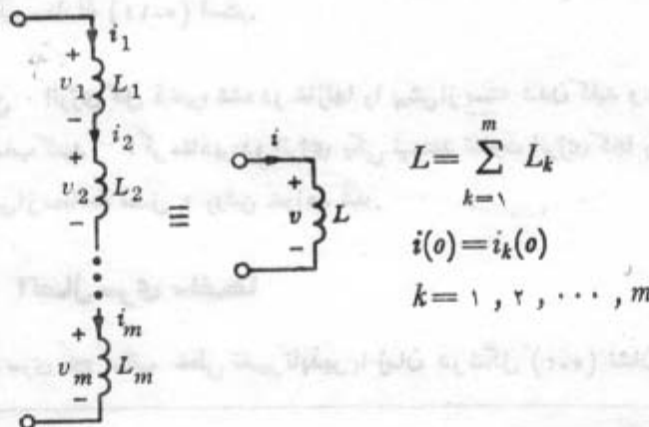
$$(۵-۱۶) \quad i = i_k \quad k=1, 2, \dots, m$$

بنابراین در $t=0$ ، $i(0) = i_k(0)$ ، $k=1, 2, \dots, m$ ، یعنی KCL لازم می‌داد که در اتصال سری m سلف، همه مقادیر اولیه جریانه‌ها در داخل سلف‌ها یکسان باشند. با استفاده از KVL بدست می‌آوریم :

$$(۵-۱۷) \quad v = \sum_{k=1}^m v_k$$

با ترکیب معادلات (۵-۱۵) تا (۵-۱۷) داریم :

$$(۵-۱۸) \quad v = \sum_{k=1}^m L_k \frac{di}{dt}$$



شکل ۵-۴- اتصال سری سلف‌های خطی

بنابراین اندوکتانس سلف معادل بصورت زیر داده میشود:

$$(۵-۱۹) \quad L = \sum_{k=1}^m L_k$$

پس نتیجه میگیریم که «اتصال سری m سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان، هر یک با اندوکتانس L_k و جریان اولیه $i(0)$ ، معادل یک سلف تنها با اندوکتانس $L = \sum_{k=1}^m L_k$ ، با همان جریان اولیه $i(0)$ است».

۵-۴ اتصال موازی سلفها

بروش مشابهی میتوان اتصال موازی سلفهای خطی تغییر ناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۵-۵) را پیدا کرد. نتیجه بسادگی با معادلات زیر بیان میشود.

$$(۵-۲۰) \quad \frac{1}{L} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{L_k}$$

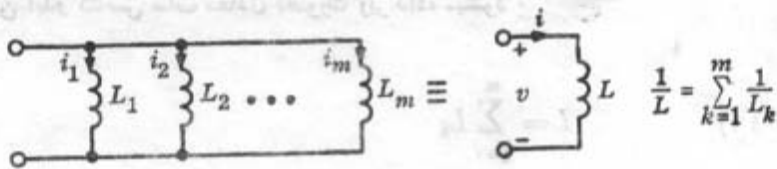
و:

$$(۵-۲۱) \quad i(0) = \sum_{k=1}^m i_k(0)$$

تبصره ۱- اگر اندوکتانس معکوس $\Gamma_k \triangleq \frac{1}{L_k}$ ، $k=1, 2, \dots, m$ ، را تعریف کنیم رابطه (۵-۲۰) بیان میکند که اندوکتانس معکوس معادل Γ ، m سلف موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان، هر یک با اندوکتانس معکوس Γ_k ، برابر مجموع m اندوکتانس معکوس میباشد بنابراین:

$$(۵-۲۲) \quad \Gamma = \sum_{k=1}^m \Gamma_k$$

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها



شکل ۵-۵- اتصال موازی سلف‌ها

بنابراین اندوکتانس معکوس، همان نقش رسانائی برای یک مقاومت را، برای یک سلف بازی میکند.

تبصره ۴- در مورد اتصال سلف‌ها، متناظر اصل بقا بار، اصل بقا شار^(۱) میباشد برای سلف‌های خطی تغییر ناپذیر با زمان، شار کلی در m سلف عبارتست از:

$$\Phi = \sum_{k=1}^m L_k I_k \quad (۵-۲۳)$$

که در آن L_k و I_k به ترتیب اندوکتانس و جریان لحظه‌ای سلف k ام میباشند.

خلاصه

- در اتصال سری عناصر، جریان در داخل همهٔ عناصر یکسان است. ولتاژ دوسر اتصال سری برابر با مجموع ولتاژهای دوسر هریک از عناصر است.
- در اتصال موازی عناصر، ولتاژ دوسر همهٔ عناصر یکسان است. جریان داخل اتصال موازی برابر با مجموع جریانهای داخل هریک از عناصر است.
- جدول (۳-۱) فرمولهای اتصالات سری و موازی را برای مقاومتها، خازنها و سلف‌های خطی خلاصه میکند.

جدول ۳-۱- اتصال سری و موازی عناصر خطی

نوع عنصر	اتصال سری m عنصر	اتصال موازی m عنصر
مقاومتها		
$R =$ مقاومت	$R = \sum_{k=1}^m R_k$	$G = \sum_{k=1}^m G_k$
$G =$ رسانائی		
خازنها		
$C =$ ظرفیت	$C = \sum_{k=1}^m C_k$	$S = \sum_{k=1}^m S_k$
$S =$ ظرفیت معکوس		
سلف ها		
$L =$ اندوکتانس	$L = \sum_{k=1}^m L_k$	$\Gamma = \sum_{k=1}^m \Gamma_k$
$\Gamma =$ اندوکتانس معکوس		

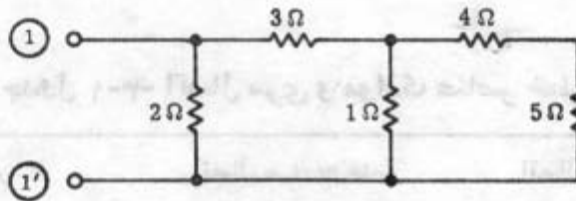
مسائل

۱- اتصال سری - موازی مقاومتهای خطی مدار نردبانی نشان داده شده

در شکل (مسئله ۳-۱) شامل مقاومتهای خطی مشخص شده در شکل میباشد. مقاومت یک قطبی دیده شده در سرهای ① و ①' چقدر است؟

۲- تجزیه و تحلیل مدارهای خطی مقاومتی یک منبع ولتاژ ثابت ۱۰

ولت به یک قطبی شکل (مسئله ۳-۱) اعمال میشود کلیه جریانهای شاخه را تعیین کنید.



شکل (مسئله ۳-۱)

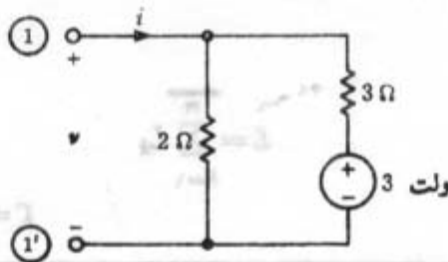
۳- مشخص سازی و مدارهای معادل یک قطبی‌های مقاومتی برای مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۳-۲):

الف - مشخصهٔ یک قطبی $i-v$ ، یعنی معادله‌ای که یک قطبی را بر حسب ولتاژ قطب و جریان قطب توصیف میکند تعیین کنید.

ب - مشخصه را در صفحهٔ $i-v$ رسم کنید.

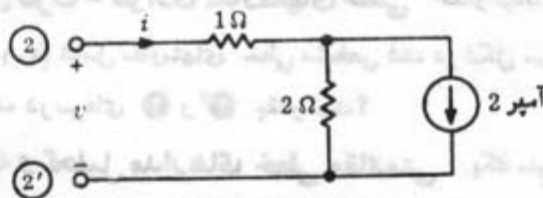
پ - مدار معادل تونن را رسم کنید.

ت - مدار معادل نرتن را رسم کنید.



شکل (مسئله ۳-۳)

۴- یک قطبی مقاومتی برای مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۳-۴) قسمت‌های (الف)، (ب)، (پ) و (ت) مسئله ۳ را تکرار کنید.

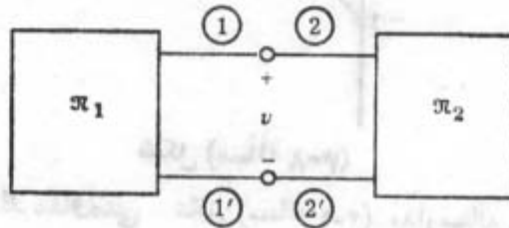


شکل (مسئله ۳-۴)

۱۳۵

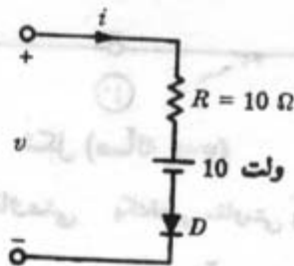
مدارهای ساده

۵- حل مدار مقاومتی اگر دو یک قطبی درشکلهای (مسئله ۳-۳) و (مسئله ۳-۴) پشت به پشت، همانطور که در شکل (۳-۵) نشان داده شده، بهم وصل شوند ولتاژ v حاصل چقدر است؟ اگر سر $1'$ به سر 1 و سر $2'$ به سر 2 وصل گردد، ولتاژ v چقدر است؟



شکل (مسئله ۳-۵)

۶- مدار مقاومت منبع، دیود مشخصه i مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۳-۶) را که در آن D یک دیود ایده‌آل است، بطور ترسیمی و تحلیلی توصیف کنید.

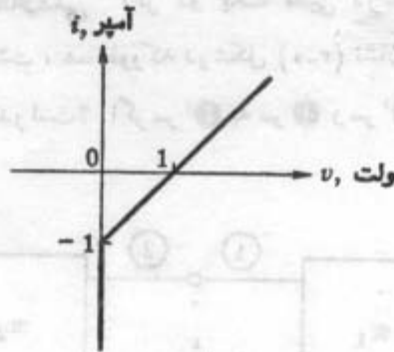


شکل (مسئله ۳-۶)

۷- مدار دیودی فرض کنید که اتصال دیود D در شکل (مسئله ۳-۶) معکوس شود. مشخصه مدار جدید را بطور تحلیلی و ترسیمی توصیف کنید.

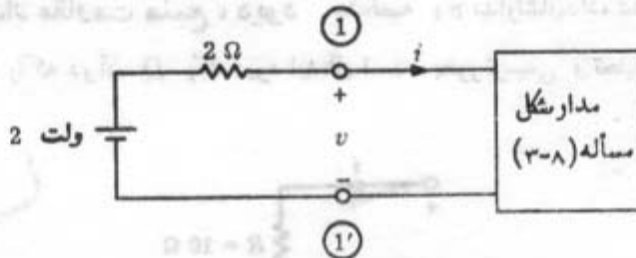
۸- ترکیب مدارهای مقاومتی مداری را که از اتصال موازی یک مقاومت، یک دیود ایده‌آل و یک منبع جریان تشکیل شده و باید دارای مشخصه i نشان داده شده در شکل (مسئله ۳-۸) باشد پیدا کنید.

نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها



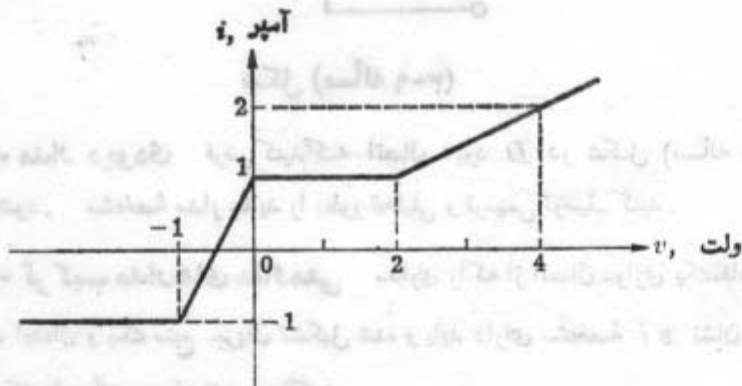
شکل (مسأله ۳-۸)

۹- حل مدار مقاومتی شکل (مسأله ۳-۹) مدار مسأله ۸ را نشان میدهد که به اتصال سری یک منبع ولتاژ ثابت ۲ ولتی و یک مقاومت ۲ اهمی وصل شده است. جریان درون منبع ولتاژ و توان تحویل داده شده به مدار را تعیین کنید.



شکل (مسأله ۳-۹)

۱۰- ترکیب مدار مقاومتی یک قطبی مقاومتی با مقاومت‌های خطی، دیویدهای



شکل (مسأله ۳-۱۰)

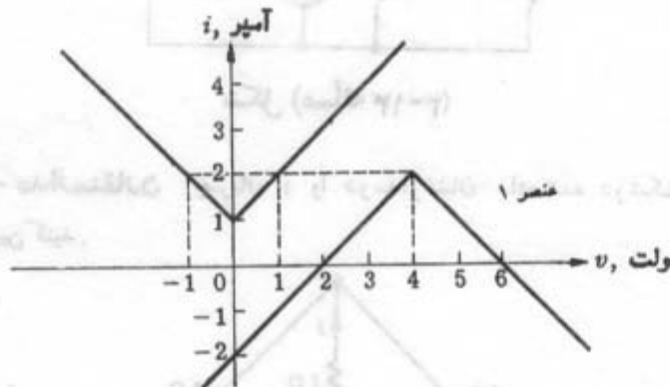
۱۳۷

مدارهای ساده

ایده‌آل و منابع نا بسته طوری طرح کنید که دارای مشخصه v_i نشان داده شده در شکل (مسئله ۳-۱۰) باشد.

۱۱- اتصال سری و موازی مقاومتهای غیر خطی فرض کنید که دو عنصر مقاومتی که مشخصه v_i آنها در شکل (مسئله ۳-۱۱) نشان داده شده است شده باشند.

- الف - مشخصه v_i اتصال سری این دو عنصر را پیدا کنید.
ب - مشخصه v_i اتصال موازی این دو عنصر را پیدا کنید.



شکل (مسئله ۳-۱۱)

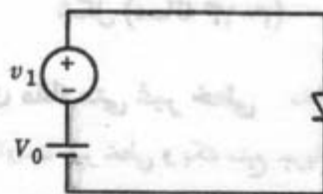
۱۲- مدارهای معادل سیگنال کوچک در مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۳-۱۲)، دیود ژرمانیوم دارای یک مشخصه v_i بصورت زیر است:

$$i = I_s (e^{qv/kT} - 1) \quad I_s = 0.05 \text{ mA} \quad \text{و} \quad kT/q \approx 0.026 \text{ ولت}$$

منبع سیگنال v_1 یک سینوسوئید است

$$v_1 = 10^{-3} \sin 2\pi 60 t \text{ ولت}$$

مدارهای معادل سیگنال کوچک را بترتیب برای ولتاژهای بایاس $V_0 = 0.1, 0, -0.1$ ولت تعیین کنید.

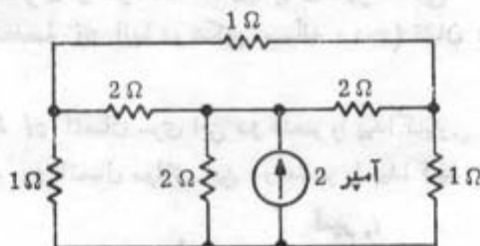


شکل (مسئله ۳-۱۲)

۱۳۸

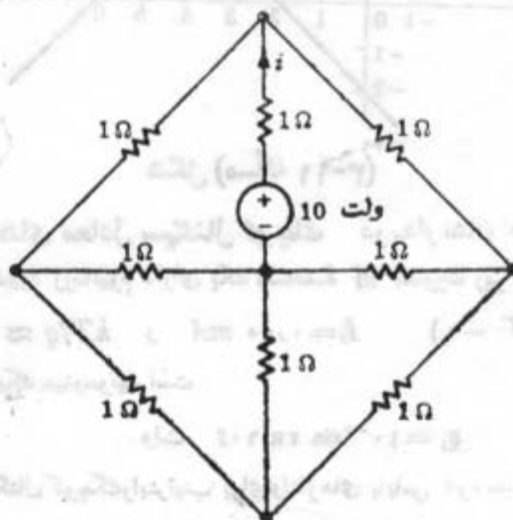
نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

۱۳- مدار متقارن برای مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۳-۳) جریانه‌ها را در همهٔ مقاومت‌ها تعیین کنید. (راهنمایی: آیا می‌توانید حل این مدار را با استفاده از تقارن پیدا کنید؟)



شکل (مسئله ۱۳-۳)

۱۴- مدار متقارن جریان i را در مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۴-۳) تعیین کنید.



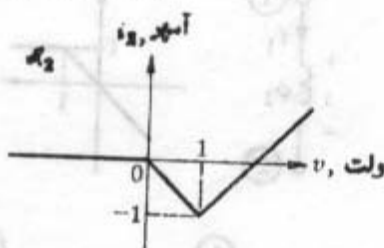
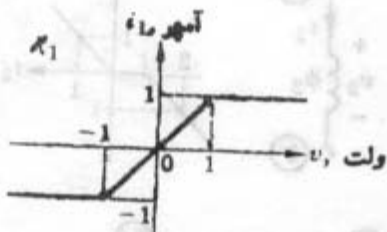
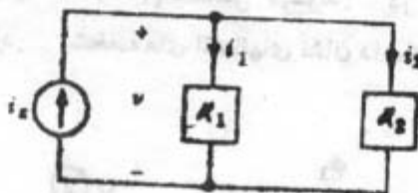
شکل (مسئله ۱۴-۳)

۱۵- حل مدارهای مقاومتی غیر خطی مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۵-۳) شامل دو مقاومت غیر خطی و یک منبع جریان است مشخصهٔ دو مقاومت در شکل نشان داده شده‌اند. ولتاژ v را برای جریانه‌های زیر تعیین کنید.

الف - آمپر $i_s = 1$

ب - آمپر $i_s = 10$

پ - آمپر $i_s = 2 \cos t$



شکل (مسأله ۱۵-۳)

۱۶- حل مدار مقاومتی غیر خطی در مدار نشان داده شده در شکل

(مسأله ۱۵-۳) منبع جریان i_s را با اتصال سری یک منبع ولتاژ v_s و یک مقاومت خطی با مقاومت ۲ اهم جانشین کنید. ولتاژ v را برای مقادیر زیر تعیین کنید.

الف - ولت $v_s = 1$

ب - ولت $v_s = 10$

پ - ولت $v_s = 2 \cos t$

۱۷- قطع و وصل در خازنها سه خازن مجزای خطی تغییر ناپذیر با زمان

به ظرفیت‌های ۳ و ۲ و ۱ فاراد و ولتاژهای اولیه به ترتیب ۳ و ۲ و ۱ ولت داده شده‌اند. سه خازن با کلید زنی لحظه‌ای، همزمان بطور موازی وصل میشوند. ولتاژ حاصل دوسر اتصال موازی چقدر است؟ انرژی الکتریکی ذخیره شده در خازنها را قبل از اتصال و بعد از اتصال حساب کنید.

۱۸- قطع و وصل در سلف‌ها دو سلف خطی با اندوکتانس‌های ۲ و ۱ هانری

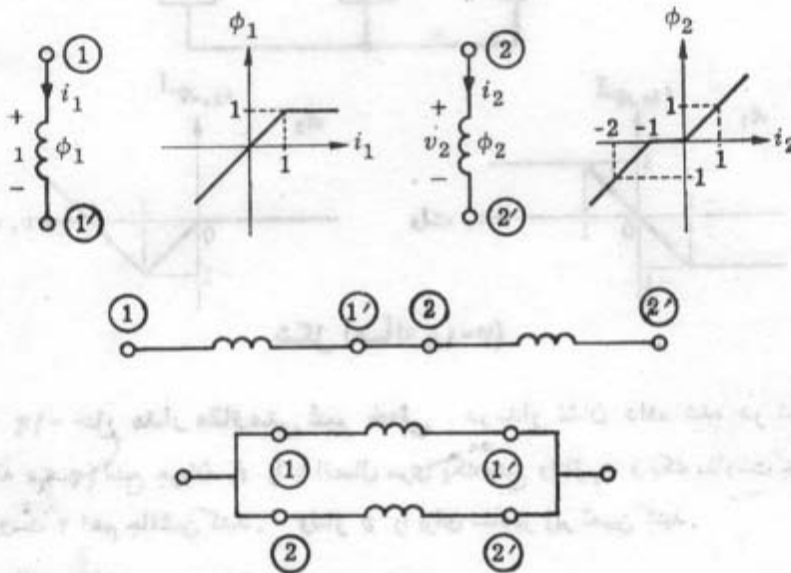
و جریانهای به ترتیب ۱ و ۲ آمپر بصورت یک اتصال سری درآورده میشوند. جریان حاصل

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

چقدر است ؟ انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سلف‌ها را قبل از اتصال و بعد از اتصال حساب کنید.

۱۹- اتصال سلفهای غیر خطی مشخصه‌های دو سلف غیرخطی با منحنی‌های

Φi متناظرشان طبق شکل (مسئله ۱۹-۳) مشخص میشوند. در $t=0$ هیچ جریانی در درون سلفها وجود ندارد. مشخصه‌های اتصالهای نشان داده شده در شکل را رسم کنید.



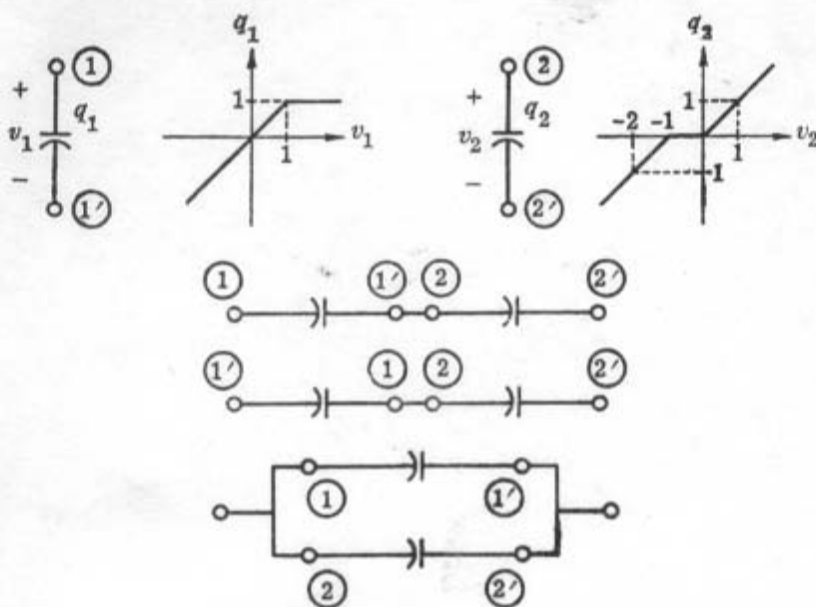
شکل (مسئله ۱۹-۳)

۲۰- اتصال خازنهای غیر خطی مشخصه‌های دو خازن غیر خطی با منحنی

qv متناظرشان همانطور که در شکل (مسئله ۲۰-۳) نشان داده شده مشخص میشوند. در $t=0$ بار روی هر یک از خازنها صفر است. مشخصه‌های اتصالهای نشان داده شده در شکل را بکشید. انرژی ذخیره شده در هر اتصال را وقتی که ولتاژ دوسر اتصال ۱-، ۲ و ۱ ولت است تعیین کنید.

۱۴۱

مدارهای ساده



شکل (مسأله ۳-۲۰)



تقویت کننده‌های عملیاتی

مدارهای مجتمع با تراشه‌های نیمه‌هادی انقلابی در طراحی مدارهای دیجیتال به وجود آورده و کامپیوترهای شخصی را به ما عرضه کرده‌اند. گرچه به طور عام در این باره کمتر صحبت می‌شود، اما مدارهای مجتمع با فراهم آوردن بلوک‌های ساختمانی کوچک مشتمل بر تعداد زیادی مقاومتها و ترانزیستورها، انقلابی نیز در طراحی مدارهای خطی ایجاد کرده‌اند.

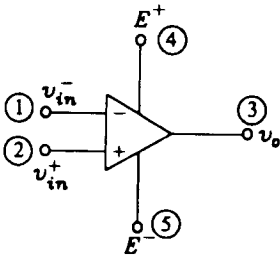
شاید پرکاربردترین این ابزارها، تقویت کننده‌های عملیاتی یا آپ‌آمپ‌ها هستند. تقویت کننده‌های عملیاتی با مقاومت ورودی بالا و مقاومت خروجی پایین و بهره و ولتاژ بزرگ مشخص می‌شوند. تقویت کننده‌های عملیاتی در سیستم‌های تقویت کننده صوتی به کار برده می‌شوند. همچنین آنها در بسیاری از کاربردهای ابزار دقیق مانند سنجه‌های چندکاره دیجیتال (مولتی‌مترها) ظاهر می‌شوند که در آن ولتاژهای کوچک را تقویت می‌کنند.

جزئیات تحلیل ولتاژها و جریانهای درونی تقویت کننده عملیاتی به ندرت مورد نیاز است و معمولاً فقط لازم است که مشخصه‌های سرهای آن در نظر گرفته شوند. با معرفی کردن یک عنصر مداری به نام تقویت کننده عملیاتی ایده‌آل، اغلب تحلیل را ساده‌تر می‌کنیم.

۱- مدل‌های آپ‌آمپ

تقویت کننده‌های عملیاتی گرچه روزگاری از بهم پیوستن ترانزیستورها، خازنها و مقاومتها جدا از هم (گسسته) ساخته می‌شدند، اما امروزه به وسیله مدارهای مجتمع بر روی یک قطعه سیلیکون مربعی چند میلیمتری ساخته می‌شوند، که قیمت آن کمتر از یک دلار است. تقویت کننده عملیاتی که به اختصار آن را آپ‌آمپ (op-amp) می‌گویند در انواع مختلف بسته‌بندی‌ها در بازار وجود دارد. نوع متداول آن، بسته‌بندی با ۸ سر یا بیشتر است که بعضی از این سرها ممکن است به هیچ محلی در درون آن متصل نباشند. در درس مدارهای الکتریکی مشخصه‌های بیرونی آپ‌آمپ و رفتار آن در سرها مورد توجه قرار می‌گیرد. ساختمان درونی آپ‌آمپ در درس الکترونیک مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

یک آپ‌آمپ در ساده‌ترین حالت دارای ۵ سر است که در شکل (۱-۱) نشان داده شده‌اند. از طریق سرهای ④ و ⑤ منابع تغذیه لازم برای کارکرد مناسب آپ‌آمپ اعمال می‌شود؛ یعنی منابع

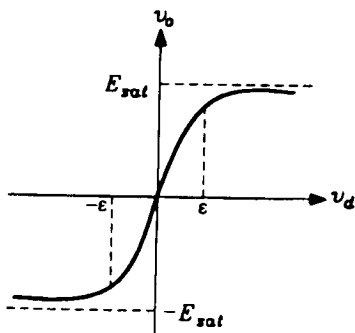


E^+ و E^- که مقدار متداول آنها در حدود $+15$ ولت و -15 ولت است، $(E^+ = 15$ و $E^- = -15)$ ، سر ① را معکوس کننده علامت گویند و آن را با v_{in}^- نشان می‌دهند و هر سیگنالی که به این سر وصل شود، علامت آن معکوس می‌شود.

سر ② را سر غیر معکوس کننده علامت گویند و آن

شکل ۱-۱ نماد یک آپ‌امپ با منابع تغذیه و سرهای ورودی و خروجی.

را با v_{in}^+ نشان می‌دهند. سر ③، سر خروجی آپ‌امپ است و ولتاژ خروجی v_o تابعی از تفاضل v_{in}^+ و v_{in}^- است که آن را با سیگنال $v_d = v_{in}^+ - v_{in}^-$ نشان می‌دهند. ارتباط تابعی v_o با v_d یک ارتباط تابعی غیرخطی است و مقدار v_o برای مقادیر بزرگتر v_d که در حدود چند دهم میلی ولت می‌باشد به حد اشباع می‌رسد. ارتباط ولتاژ خروجی v_o برحسب ولتاژ ورودی v_d در شکل (۲-۱) نشان داده شده است.

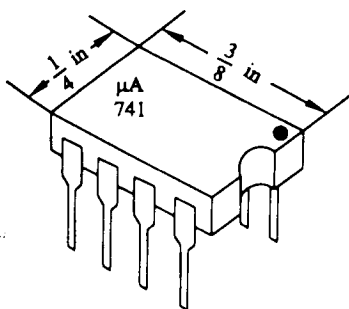


منابع تغذیه E^+ و E^- صرفاً برای بایاس کردن ترانزیستورهای درون آپ‌امپ به کار می‌روند و هنگامی که

شکل ۲-۱ ولتاژ خروجی مدار باز v_o برحسب تابعی از ولتاژ ورودی v_d .

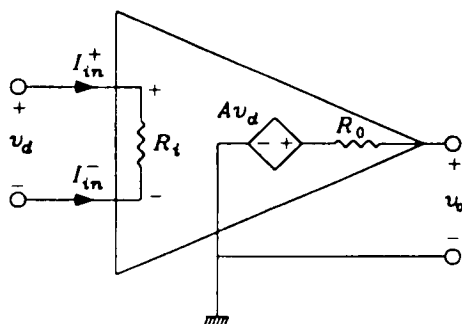
آپ‌امپ به طور مناسب بایاس شود و کار مورد نظر خود را انجام دهد، منابع تغذیه اثر خاصی روی نحوه کار کردن و سیگنال خروجی نخواهند داشت. از این رو در مدارهای کاربردی معمولاً منابع تغذیه در شکل نشان داده نمی‌شوند.

همان طوری که در شکل (۲-۱) نشان داده شده است، برای مقادیر کوچک v_d یعنی $-\epsilon < v_d < \epsilon$ ، ارتباط تابعی خروجی و ورودی یک ارتباط خطی است؛ یعنی $v_o = A v_d$ ، که در آن A (شیب مشخصه) در حدود 10^5 یا بیشتر است. بنابراین برای آن که v_o به حد اشباع نرسد، لازم است ϵ در



حدود یک دهم میلی ولت یا کمتر باشد که به این ناحیه، ناحیه عملکرد خطی آپ‌امپ گویند. در خارج این ناحیه آپ‌امپ رفتار غیرخطی دارد و برای مقادیر v_d بزرگتر از ϵ ، خروجی آپ‌امپ به حد اشباع می‌رسد که مقدار این ولتاژ اشباع برابر ولتاژ منابع تغذیه آن است.

شمای ظاهری یک آپ‌امپ $741 \mu A$ در شکل (۱-۳) نشان داده شده است. برخی سرهای خروجی آن برای تنظیم عملکرد مدار داخلی آپ‌امپ به کار می‌رود که این سرها را با *offset null* نشان می‌دهند. بعضی دیگر از سرها به هیچ جایی در درون آپ‌امپ وصل نشده‌اند و آنها را با NC نمایش می‌دهند. از این سرها می‌توان به عنوان گره‌های اتصال برای وصل کردن دو عنصر استفاده کرد. در ناحیه خطی مشخصه‌های سرهای ورودی آپ‌امپ را با یک مقاومت ورودی R_{in} و مشخصه



سر خروجی را با یک منبع ولتاژ وابسته $v_o = Av_d$ که به طور متوالی با یک مقاومت خروجی R_o قرار دارد، مطابق شکل (۱-۴) مدل‌سازی می‌کنیم. ولتاژ خروجی آپ‌امپ معمولاً نسبت به گره زمین سنجیده می‌شود. A بهره ولتاژ مدار باز و I_{in}^+ و I_{in}^- جریانه‌های ورودی در سرهای آپ‌امپ هستند.

شکل ۱-۴ مدل آپ‌امپ که مقاومت ورودی R_t و مقاومت خروجی R_o و

بهره ولتاژ A و جریانه‌های ورودی I_{in}^+ و I_{in}^- را نشان می‌دهد.

در بیشتر تحلیل‌های مداری، مدل به مراتب ساده‌تری را از آپ‌امپ در نظر می‌گیریم. بهره ولتاژ مدار باز A معمولاً بسیار بزرگ است و توسط سازنده هم چندان کنترل نمی‌شود (در بعضی آپ‌امپ‌ها A از 10^5 بزرگتر است). بنابراین برای ساده کردن مدل، آن را به طور تقریبی برابر بی‌نهایت می‌گیریم؛ یعنی:

$$A = \infty$$

بهره بسیار بالای آپ‌امپ، پس‌خور منفی خروجی را لازم دارد. جزئی از ولتاژ خروجی v_o به ورودی آپ‌امپ پس‌خور می‌شود و از ولتاژ ورودی کم می‌کند تا ولتاژ v_d را تشکیل دهد. بهره بی‌نهایت A موجب می‌شود که ولتاژ خروجی v_o در حد مورد نظر قرار گیرد و از این رو:

$$v_d = \frac{v_o}{A} = 0$$

مقدار مقاومت ورودی برای یک آپ‌امپ در حدود $2 \text{ M}\Omega$ است (در بعضی آپ‌امپ‌ها به بزرگتر از 10^{12} اهم نیز می‌رسد). از این رو می‌توان فرض کرد که جریان ورودی آپ‌امپ یعنی I_{in} برابر صفر است؛ یعنی:

$$I_{in} = \frac{v_d}{R_{in}} = 0$$

فرض جریان ورودی صفر، معادل فرض مقاومت ورودی بی‌نهایت است، پس:

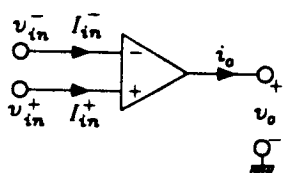
$$R_{in} = \infty$$

مقاومت خروجی کوچک R_o که در حدود ۱۰۰ اهم یا کمتر می‌باشد، اساساً به منظور محدود کردن جریان خروجی برای عملکرد خطی آن است. بنابراین فرض می‌کنیم که:

$$R_o = 0$$

برحسب مدل شکل (۱-۴) این تقریبها یک منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ را با بهره بی‌نهایت و ولتاژ کنترل v_d به ما می‌دهد. این مدل را یک عنصر جدید مدار به نام آپ‌آمپ ایده‌آل نامگذاری می‌کنیم.

۱-۱ تعریف آپ‌آمپ ایده‌آل



آپ‌آمپ ایده‌آل یک عنصر مداری است که در آن $v_d = v_{in}^+ - v_{in}^- = 0$ و جریانهای ورودی $I_{in}^+ = I_{in}^- = 0$ ، لیکن پس‌خور منفی موجب می‌شود که مقدار ولتاژ خروجی در حد مورد نظر قرار گیرد. نماد یک آپ‌آمپ ایده‌آل در شکل (۱-۵) نشان داده شده است.

شکل ۱-۵ نماد یک آپ‌آمپ ایده‌آل.

تبصره ۱ وقتی KCL را به نماد یک آپ‌آمپ ایده‌آل اعمال می‌کنیم، باید دقت و توجه کافی داشته باشیم؛ زیرا که جریان زمین i_d معمولاً در شکل نشان داده نمی‌شود. از این‌رو وقتی KCL را در یک سطح دربرگیرنده سرهای آپ‌آمپ اعمال می‌کنیم، ظاهراً با تناقضی روبرو می‌شویم؛ زیرا جریانهای ورودی I_{in}^+ و I_{in}^- در حدود صفر هستند در حالی که جریان خروجی I_o در حدود صفر نمی‌باشد. بنابراین لازم است جریان زمین نیز در شکل نشان داده شود تا اعمال KCL با تناقضی همراه نباشد.

تبصره ۲ عملکرد ناحیه خطی یک آپ‌آمپ توسط ولتاژهای تغذیه و جریان خروجی آپ‌آمپ محدود می‌شود. برای تحلیل در درون ناحیه خطی، ما از مدل ایده‌آل آپ‌آمپ استفاده می‌کنیم که یک منبع ولتاژ وابسته با بهره بی‌نهایت است و توسط ولتاژ $v_d = v_{in}^+ - v_{in}^-$ کنترل می‌شود. برای کاربردهای وسیع مداری در نظر گرفتن ناحیه خطی کفایت می‌کند. بررسی خواص غیرخطی آپ‌آمپ به یک درس پیشرفته دیگر مانند الکترونیک واگذار می‌شود.

تبصره ۳ ولتاژ خروجی v_o و جریان خروجی I_o یک آپ‌آمپ باید در سه شرط زیر صدق کنند تا آپ‌آمپ در ناحیه خطی عمل کند:

$$|v_o| < E_{sat}$$

$$|I_o| < I_{sat}$$

$$\left| \frac{dv_o(t)}{dt} \right| < SR$$

ولتاژ اشباع E_{sat} و جریان اشباع I_{sat} و حد نرخ تغییرات (Slew Rate)، پارامترهای یک آپ‌آمپ هستند. مثلاً در مورد آپ‌آمپ ۷۴۱ μA که با ولتاژهای $+15$ و -15 تغذیه می‌شود، داریم: $E_{sat} = 14V$ ،

خروجی دلخواه بزرگ یا جریان خروجی دلخواه بزرگ را تولید کند و یا نرخ تغییرات ولتاژ خروجی نمی‌تواند به طور دلخواه بسیار وسیع باشد.

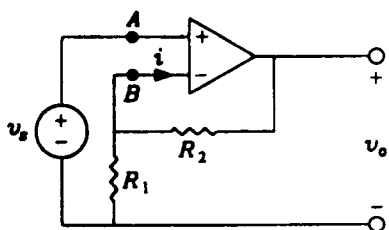
تبصره ۴ چون در مدل آپ‌امپ ایده‌آل $v_d = v_{in}^+ - v_{in}^- = 0$ در نظر گرفته می‌شود، از این رو گویند سرهای ورودی آپ‌امپ اتصال کوتاه مجازی شده است. یعنی گرچه هیچ اتصالی میان سرهای v_{in}^- و v_{in}^+ وجود ندارد، ولی ولتاژ آنها مثل هم است و می‌توان چنین تصور کرد که این سرها با یک شاخه اتصال کوتاه شده‌اند.

۲- مدارهای آپ‌امپ

در این بخش مدل آپ‌امپ ایده‌آل را برای تحلیل بعضی مدارهای ساده ولی مهم که به عنوان قطعات ساختمانی اصلی در مدارهای بسیار پیچیده مورد استفاده قرار می‌گیرند، به کار می‌بریم.

مثال ۱ تقویت کننده غیر معکوس کننده علامت

تقویت کننده غیر معکوس کننده علامت، مداری است که در آن ولتاژ ورودی v_s در یک عدد مثبت ضرب می‌شود. این مدار از یک تقویت کننده عملیاتی به همراه پس‌خور مطابق شکل (۲-۱) استفاده می‌کند. ما مدل آپ‌امپ ایده‌آل را برای تعیین بهره ولتاژ مدار بسته $\frac{v_o}{v_s}$ بکار می‌بریم. نقاط A و B که دو



سر ورودی آپ‌امپ هستند هم پتانسیل می‌باشند، پس $v_B = v_s$ و چون جریان i ورودی آپ‌امپ صفر است، پس مقاومت‌های R_1 و R_2 عملاً با هم سری هستند و می‌توان از ایده تقسیم کننده ولتاژ، ولتاژ دوسر مقاومت R_1 را به صورت زیر نوشت:

شکل ۲-۱ تقویت کننده ولتاژ غیر معکوس کننده علامت.

$$v_{R_1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o$$

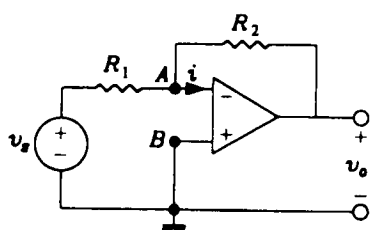
با توجه به اینکه $v_{R_1} = v_B = v_s$ بهره ولتاژ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_o}{v_s} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

این بهره ولتاژ را بهره ولتاژ مدار بسته می‌گویند. چون نسبت $\frac{R_1 + R_2}{R_1}$ برای مقادیر مثبت R_1 و R_2 همواره بزرگتر از یک است، پس این مدار مانند یک تقویت کننده‌ای عمل می‌کند که ولتاژ ورودی v_s را در یک عدد مثبت بزرگتر از یک ضرب می‌کند. تا وقتی که ولتاژ خروجی آپ‌امپ اشباع نشود، این مدار مانند یک تقویت کننده رفتار می‌کند.

مثال ۲ تقویت کننده معکوس کننده علامت

اکنون مداری را مورد تحلیل قرار می‌دهیم که سیگنال ورودی را در یک عدد منفی ضرب می‌کند. این مدار معکوس کننده علامت، یک قطعه ساختمانی اصلی دیگری است که در مدارهای بسیار پیچیده مورد استفاده قرار می‌گیرد. این مدار در شکل (۲-۲) نشان داده شده است که در آن سر (-) در بالای



شکل است. توجه کنید که ما پس‌خور را همیشه به سر معکوس کننده علامت یعنی (-) اعمال می‌کنیم. نقاط A و B هم پتانسیل هستند و چون گره B زمین شده است، پس $v_A = v_B = 0$. چون جریان i ورودی به آپ‌امپ برابر صفر است، پس با اعمال KCL در گره A به دست می‌آوریم:

شکل ۲-۲ تقویت کننده ولتاژ معکوس کننده علامت.

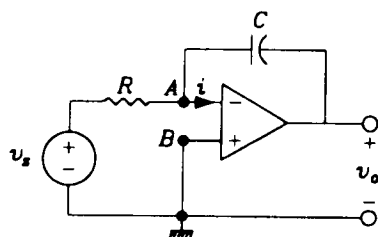
$$\frac{v_s - v_A}{R_1} + \frac{v_o - v_A}{R_2} = 0$$

با قرار دادن $v_A = 0$ به دست می‌آوریم:

$$v_o = -\frac{R_2}{R_1} v_s$$

توجه کنید که علامت ولتاژ خروجی v_o مخالف علامت ولتاژ ورودی v_s است. به همین دلیل است که به این مدار، تقویت کننده معکوس کننده علامت می‌گویند. در واقع این مدار وقتی تقویت کننده است که $R_2 > R_1$ باشد. همچنین لازم است که ولتاژ خروجی آپ‌امپ اشباع نشود تا مدار مانند یک تقویت کننده عمل کند.

مثال ۳ مدار انتگرال‌گیر



شکل ۳-۲ یک مدار انتگرال‌گیر.

مدارهای با تقویت کننده عملیاتی، نه تنها عملیات جبری مانند ضرب کردن در یک ثابت مثبت یا منفی را انجام می‌دهند (مثالهای ۱ و ۲)، بلکه انتگرال‌گیری را نیز انجام می‌دهند. شکل (۳-۲)، مداری را نشان می‌دهد که ولتاژ خروجی آن انتگرال ولتاژ ورودی آن است. این مدار انتگرال‌گیر به عنوان یکی از قطعات بسیاری از ابزارهای الکترونیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

نقاط A و B هم پتانسیل اند و چون نقطه B زمین شده است، پس $v_A = v_B = 0$. چون جریان i ورودی به آپ‌امپ صفر است، با اعمال KCL در گره A به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_s - v_A}{R} + C \frac{d}{dt} (v_o - v_A) = 0$$

با قرار دادن $v_A = 0$ ، به دست می‌آید:

$$C \frac{dv_o}{dt} = -\frac{1}{R} v_s$$

و با انتگرال‌گیری از این معادله داریم:

$$v_o = -\frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t v_s dt$$

ملاحظه می‌شود که در این مدار ولتاژ خروجی v_o مساوی $\left(-\frac{1}{RC}\right)$ برابر انتگرال ولتاژ ورودی v_s است.

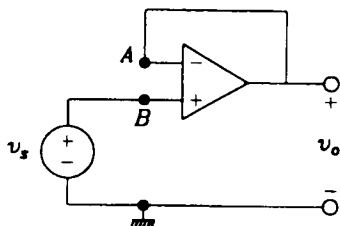
تبصره اگر جای خازن C و مقاومت R را با هم عوض می‌کردیم، با تحلیل مشابه مثال ۳ به دست می‌آوریم:

$$v_o = -RC \frac{dv_s}{dt}$$

یعنی مدار مانند یک مشتق‌گیر عمل می‌کند. در عمل چون مشتق‌گیر الکترونیکی نسبت به نویز بسیار حساس است، از این رو از چنین کاربردی حتی المقدور خودداری می‌شود.

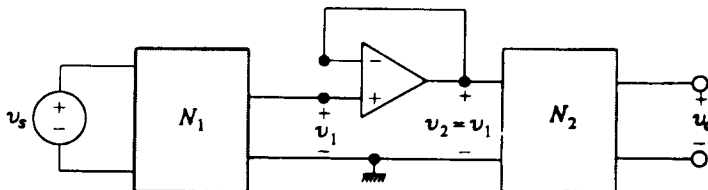
مثال ۴ تعقیب‌کننده ولتاژ

ساده‌ترین مدار تقویت‌کننده عملیاتی، مدار تعقیب‌کننده ولتاژ نشان داده شده در شکل (۲-۴) است. بدیهی است که ولتاژ خروجی این مدار برابر همان ولتاژ ورودی v_s است.



شکل ۲-۴ مدار تعقیب‌کننده ولتاژ.

مزیت اصلی مدار تعقیب‌کننده ولتاژ آن است که هر بار دلخواهی در سرهای خروجی وصل کنیم، ولتاژ v_o را نمی‌تواند تغییر دهد. شکل موج ولتاژ v_o فقط شکل موج ولتاژ ورودی را تعقیب می‌کند. این مدار را گاهی تقویت‌کننده ایزوله‌کننده نیز گویند و برای جلوگیری از اثر بار شدگی یک مدار به وسیله مدار دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرد. این مطلب در شکل (۲-۵) نشان داده شده است که در آن ولتاژ خروجی مدار N_1 وقتی که با یک مدار دلخواه N_2 بار شود، هیچ گونه تغییری نمی‌کند و گویند مدار تعقیب‌کننده

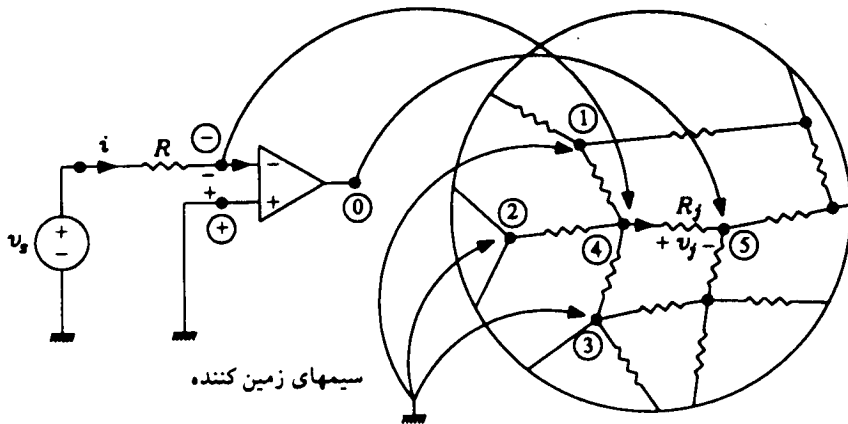


شکل ۲-۵ ایزوله کردن دو مدار N_1 و N_2 توسط مدار تعقیب‌کننده ولتاژ.

ولتاژ، دو مدار N_1 و N_2 را از هم ایزوله کرده است که موجب می‌شود N_1 و N_2 جداگانه تحلیل یا طراحی شوند.

مثال ۵ اندازه‌گیری مقاومت بدون بریدن سیمها

فرض کنید مدار مقاومتی خطی قرار گرفته در درون دایره شکل (۲-۶)، قسمتی از یک مدار را نشان دهد که می‌خواهیم مقدار هر یک از مقاومتها را بدون بریدن سیمهای آن اندازه‌گیری کنیم. این مسأله وقتی پیش می‌آید که مداری به خاطر یک مقاومت معیوب از کار می‌افتد و ما می‌خواهیم مقاومت معیوب را با مقایسه مقدار آن با مقدار نامی شناسایی کنیم.



شکل ۲-۶ یک آشکارساز خطای آب‌امبی.

برای نشان دادن این که چگونه این مدار کار می‌کند، فرض کنید بخواهیم مقدار مقاومت R_j را بدون بریدن سیمهای دوسر آن اندازه‌گیری کنیم. یکی از سرهای مقاومت R_j را به سر معکوس کننده آپ‌امپ وصل کنید (در شکل (۲-۶) به سر (-) آپ‌امپ وصل شده است). سپس سر دوم این مقاومت را به سر خروجی آپ‌امپ وصل کنید (گره (۵) در شکل (۲-۶) به سر خروجی آپ‌امپ وصل شده است). با توجه به هم پتانسیل بودن سرهای ورودی آپ‌امپ، پتانسیل گره (۴) برابر صفر است و برای آنکه جریان وارد شونده به این گره تماماً از مقاومت R_j عبور کند، لازم است به جز گره (۵)، تمام گره‌های دیگر وصل شده به گره (۴) دارای پتانسیل صفر باشند. از این رو با سیمهای زمین کننده، گره‌های انتهایی کلیه مقاومت‌های وصل شده به گره (۴) را، به استثنای گره (۵)، به گره زمین وصل می‌کنیم. به این ترتیب مقاومت R_j در مسیر پس‌خور آپ‌امپ قرار می‌گیرد و تمام جریان i که از مقاومت R می‌گذرد، از مقاومت R_j عبور می‌کند و داریم $i = \frac{v_s}{R}$ و $v_j = R_j i = \frac{R_j}{R} v_s$. چون ولتاژ v_j بدون بریدن سیمها قابل اندازه‌گیری است، پس $R_j = R \frac{v_j}{v_s}$ و به این ترتیب مقدار مقاومت R_j را بدون بریدن سیمهای آن تعیین کردیم.

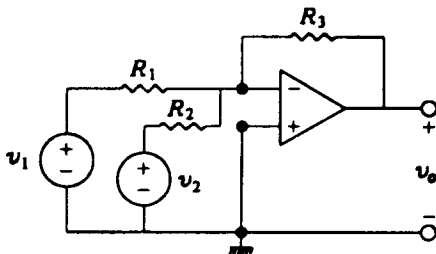
۳- تحلیل گره در مدارهای با آپامپ ایده‌آل

می‌توان تحلیل گره را به راحتی در مدارهای شامل آپامپ ایده‌آل به کار گرفت. در اعمال این تحلیل به نکات زیر باید توجه کرد:

- ۱- جریان وارد شونده به هر سر ورودی آپامپ ایده‌آل برابر صفر است.
- ۲- اختلاف پتانسیل میان سرهای ورودی آپامپ ایده‌آل برابر صفر است.
- ۳- جریان خروجی آپامپ برابر صفر نمی‌باشد. این جریان در معادله KCL نوشته شده در گره خروجی به کار می‌رود. اعمال KCL در گره خروجی، یک مجهول اضافی به نام جریان خروجی را به معادلات گره اضافه می‌کند. بنابراین اگر هدف، تعیین جریان خروجی آپامپ نباشد، لزومی ندارد که KCL را در گره خروجی آپامپ بنویسیم.

مثال ۷ مقدار ولتاژ خروجی v_o را در مدار

شکل (۱-۳) تعیین کنید.



شکل ۱-۳ (مثال ۷)

چون سرهای آپامپ هم پتانسیل است و سر (+) آن زمین شده است، پس ولتاژ سر (-) آن نیز صفر است. با اعمال KCL در گره سر منفی آپامپ و با صفر گرفتن جریان ورودی آپامپ داریم:

$$\frac{v_1 - 0}{R_1} + \frac{v_2 - 0}{R_2} + \frac{v_o - 0}{R_3} = 0.$$

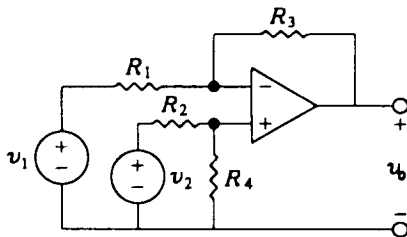
و یا:

$$v_o = -\frac{R_3}{R_1} v_1 - \frac{R_3}{R_2} v_2$$

به عبارت دیگر، این مدار ترکیب خطی دو ولتاژ v_1 و v_2 را با ضرایب دلخواه $\frac{R_3}{R_1}$ و $\frac{R_3}{R_2}$ ، که از طریق انتخاب مناسب مقادیر مقاومتها به دست می‌آیند، به وجود می‌آورد.

مثال ۸ مقدار ولتاژ خروجی v_o را در مدار شکل

شکل (۲-۳) تعیین کنید.



شکل ۲-۳ (مثال ۸)

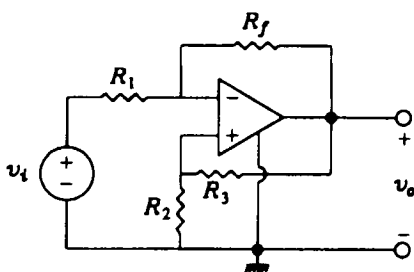
سرهای آپامپ هم پتانسیل بوده و پتانسیل آنها را v فرض می‌کنیم. چون جریان ورودی آپامپ صفر است با نوشتن معادله گره سر (+) به دست می‌آوریم:

ولتاژ v_o به دست آمده از اسپایس دو شکل (۴-۱-پ) نشان داده شده است که با استفاده از PROBE برنامه اسپایس به دست آمده است. بدیهی است محاسبه این نتایج با دست بسیار وقتگیر خواهد بود.

مسائل

۱- در مدار شکل (مسئله ۳-۱) فرض کنید

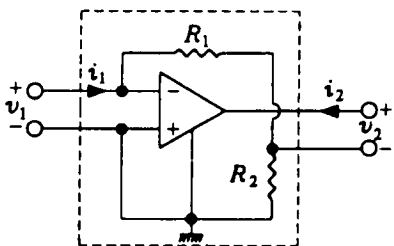
آپ‌امپ در ناحیه خطی عمل می‌کند. بهره ولتاژ $\frac{v_o}{v_i}$ را به دست آورید. حدود تغییرات v_i برای آنکه عملکرد در ناحیه خطی قرار گیرد، کدام است؟



شکل (مسئله ۳-۱)

۲- نشان دهید که مدار شکل (مسئله ۳-۲) یک منبع

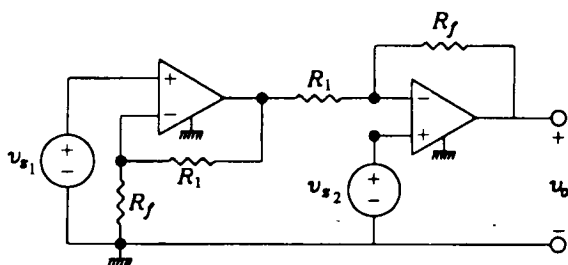
جریان کنترل شده با جریان (CCCS) را تحقق می‌دهد.



شکل (مسئله ۳-۲)

۳- در مدار شکل (مسئله ۳-۳) با

فرض این که هر دو آپ‌امپ یکسان بوده و در ناحیه خطی عمل می‌کنند، v_o را برحسب v_{s1} و v_{s2} به دست آورید.



شکل (مسئله ۳-۳)

فصل چهارم

مدارهای مرتبه اول

در دوفصل پیش سه نوع اساسی اجزاء مدار را مفصلاً بررسی کردیم و بعضی مدارهای ساده را تجزیه و تحلیل نمودیم. اتصال سری و موازی اجزاء مداری را که از یک نوع عنصر تشکیل شده باشد در نظر گرفته با آوردن مثالهایی نشان دادیم که چگونه یک قطبی‌های معادل را بدست آورده جواب آنها را پیدا میکنیم. در این مثالها ما هم روشهای تحلیلی و هم روشهای ترمیمی بکار بردیم. در هر یک از این روشها و حتی در مدارهاییکه تنها از یک نوع عنصر تشکیل می‌یابند، هرچه این مدارها پیچیده باشند، تنها عملیات جبری مورد نیاز بوده معادلات دیفرانسیل دخالت نمی‌یابند.

ما در این فصل مدارهایی را که از بیش از یک نوع عنصر تشکیل می‌یابند تجزیه و تحلیل کرده و در نتیجه از عمل‌هایی مانند مشتق‌گیری و/یا انتگرال‌گیری استفاده خواهیم کرد. چون بحث ما تنها به مدارهایی که با معادله‌های دیفرانسیل مرتبه اول توصیف میشوند محدود میباشد آنها را «مدارهای مرتبه اول»^(۱) خواهیم خواند. نخست مداری را که شامل یک مقاومت و یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان می‌باشد تجزیه و تحلیل نموده و این مثال ساده را در همه این فصل برای یافتن بعضی نتایج اساسی مربوط به مدارها و سیستم‌های خطی که تغییرناپذیر با زمان می‌باشند بکار خواهیم برد. نخست مفهومهای پاسخ ورودی صفر^(۲)، پاسخ حالت صفر^(۳) و پاسخ کامل را همراه با یادآوری مختصر حل معادله‌های دیفرانسیل مطالعه میکنیم و سپس توابع پله و ضربه را مطالعه کرده و نشان خواهیم داد که چگونه پاسخ‌های پله و ضربه بدست می‌آیند. در فصلهای بعد، مدارهای از مرتبه بالاتر یعنی مدارهایی که با معادله‌های دیفرانسیل مرتبه بالاتر توصیف میشوند را مطالعه خواهیم کرد. مدارهای مرتبه اول ساده غیرخطی یا مدارهایی که با زمان تغییرپذیرند در پایان این فصل بطور مختصر مطالعه خواهند شد. منظور اساسی ما آنستکه روشهای ساده و در عین حال سودمندی که در حل مدارهای با عنصرهای غیرخطی و یا

۱ — First order circuits

۲ — Zero input response

۳ — Zero state response

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

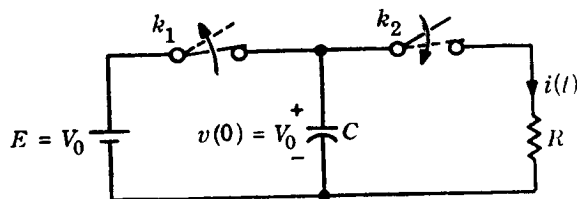
تغییرپذیر با زمان بکار می‌آیند را بیان نموده در نتیجه تفاوت بین این مدارها را با مدارهایی که شامل عنصرهای خطی و تغییرناپذیر با زمان هستند آشکار سازیم.

در آنچه پس از این خواهیم گفت، برای ساده کردن برخی توصیفها، اصطلاحات زیر را بکار می‌بریم: یک مدار فشرده را **خطی** گویند هرگاه هر یک از اجزاء آن یک عنصر خطی یا یک منبع نایسته باشد. بهمین‌سان گویند یک مدار فشرده **تغییرناپذیر با زمان** است هرگاه هر یک از اجزای آن یک عنصر تغییرناپذیر با زمان یا یک منبع نایسته باشد بدینسان اجزاء یک «مدار خطی تغییرناپذیر با زمان»، عناصر خطی تغییرناپذیر با زمان یا منابع نایسته هستند. بطریقی مشابه، مداری را که حاوی یک یا چند عنصر غیرخطی غیر از منابع نایسته باشد **مدار غیرخطی**، و مداری را که حاوی یک یا چند عنصر تغییرپذیر با زمان غیر از منابع نایسته باشد **مدار تغییرپذیر با زمان** گویند. دلیل اینکه چرا منابع نایسته بطور جدا در نظر گرفته میشوند بعد روشن خواهد شد.

۱- مدار خطی تغییرناپذیر با زمان مرتبه اول، پاسخ ورودی صفر

۱-۱- مدار RC (مقاومت و خازن)

در مدار شکل (۱-۱) خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ظرفیت C بوسیله یک منبع ولتاژ ثابت به پتانسیل V_0 بار شده است. در لحظه $t=0$ بطور همزمان کلید k_1 باز و کلید k_2 بسته میشود، پس در این لحظه، خازن بار شده از منبع قطع شده و به مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان R متصل میشود. اکنون آنچه را که روی میدهد بطور فیزیکی توصیف میکنیم. بعلت باری که در خازن ذخیره شده است $(Q_0 = CV_0)$ جریانی در جهت



شکل ۱-۱- یک خازن بار شده به یک مقاومت متصل شده است

(در لحظه $t=0$ ، k_1 باز و k_2 بسته میشود)

قراردادی تصریح شده $i(t)$ ، مطابق شکل (۱-۱) برقرار می‌گردد. بار ذخیره شده در خازن بتدریج کاهش یافته بالاخره به صفر می‌رسد و جریان $i(t)$ نیز کاهش یافته بهمین ترتیب به صفر می‌رسد. در این عمل انرژی الکتریکی که در خازن ذخیره شده است بصورت حرارت در مقاومت تلف خواهد شد.

اکنون آنچه را که دربارهٔ نظریه مدار میدانیم برای تجزیه و تحلیل این مسأله بکار می‌بریم. توجه خود را به حالت $t \geq 0$ محدود کرده مدار RC را بار دیگر بصورت شکل (۱-۲) رسم می‌کنیم. چنانکه می‌بینیم جهت‌های قراردادی برای ولتاژ و جریان شاخه‌ها بخوبی مشخص شده‌اند. V_0 همراه با علامتهای $+$ و $-$ کنار خازن مقدار ولتاژته^(۱) و ولتاژ اولیه خازن را معین می‌کنند. از قانونهای کیرشف و توپولوژی مدار (اتصال موازی C و R) این معادله‌ها بدست می‌آیند:

$$(۱-۱) \quad \text{KVL : } v_C(t) = v_R(t) \quad t \geq 0$$

$$(۱-۲) \quad \text{KCL : } i_C(t) + i_R(t) = 0 \quad t \geq 0$$

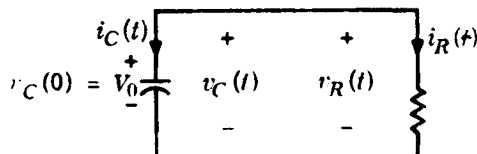
دو معادلهٔ شاخه برای دو عنصر مدار چنین می‌باشند:

$$(۱-۳) \quad \text{مقاومت : } v_R = R i_R$$

$$(۱-۴) \quad \text{خازن : } i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad \text{و} \quad v_C(0) = V_0$$

معادلهٔ (۱-۴) بصورت هم‌ارز زیر نوشته می‌شود:

$$(۱-۴) \quad v_C(t) = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t') dt'$$



شکل ۱-۲ - یک مدار RC ، $v_C(0) = V_0$

باید متوجه بود که در معادله (۴ - ۱ الف) شرط اولیه ولتاژ خازن باید همراه با :

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

نوشته شود و گرنه حالت خازن کاملاً مشخص نخواهد بود. این نکته از معادلهٔ دیگر شاخه که بصورت (۴ - ۱ ب) نوشته شده است آشکار می‌باشد.

در مداری که در بالا دیدیم، چهار معادله و چهار مجهول داریم که مجهولها دو ولتاژ شاخه v_C و v_R و دو جریان شاخه i_C و i_R می‌باشند. پس توصیف مدار از لحاظ ریاضی کامل است و میتوان معادله‌ها را نسبت به هریک از متغیرها یا همهٔ آنها حل کرد. فرض کنیم میخواهیم ولتاژ دوسرخازن را تعیین کنیم. با ترکیب معادله‌های (۱ - ۱) تا (۴ - ۱ الف) برای $t \geq 0$ خواهیم داشت :

$$C \frac{dv_C}{dt} = i_C = -i_R = -\frac{v_R}{R} = -\frac{v_C}{R} \quad \text{و} \quad v_C(0) = V_0$$

و یا :

$$(۱-۵) \quad C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R} = 0 \quad t \geq 0 \quad \text{و} \quad v_C(0) = V_0$$

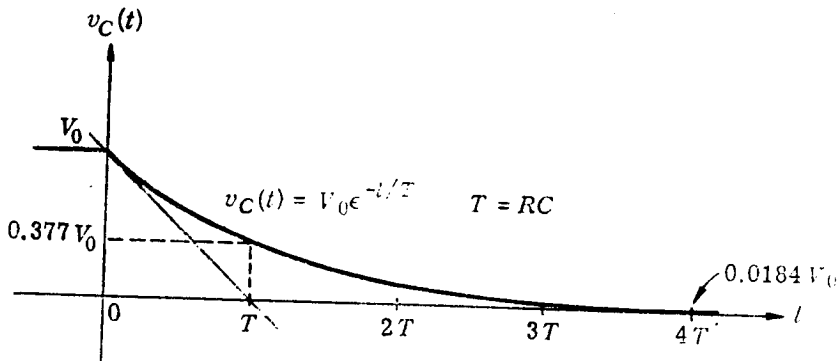
این یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت است که جواب آن بصورت نمایی^(۱) زیر می‌باشد :

$$(۱-۶) \quad v_C(t) = K e^{s_0 t} \quad \text{که در آن :}$$

$$(۱-۷) \quad s_0 = -\frac{1}{RC}$$

میتوان درستی این جواب را با جایگزینی عبارتهای (۱-۶) و (۱-۷) در معادله دیفرانسیل (۱-۵) تحقیق کرد. در معادله (۱-۶)، K ثابتی است که با شرایط اولیه معین میشود. اگر در معادله (۱-۶)، $t=0$ قرار دهیم خواهیم داشت :

$$v_C(0) = K = V_0$$



شکل ۱-۳- تخلیه خازن شکل (۱-۲) با یک منحنی نمایی داده شده است.

پس جواب مسأله چنین میباشد :

$$(۱-۸) \quad v_C(t) = V_0 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \quad t \geq 0$$

باید باین نکته مهم توجه نمود که در معادله (۱-۸) ، $v_C(t)$ برای $t \geq 0$ معین شده است زیرا بموجب مشخصات فیزیکی اولیه برای $t < 0$ ولتاژ دوسرخازن مقدار یست ثابت، در صورتیکه از معادله (۱-۸) ، بدون در نظر گرفتن $t \geq 0$ ، حتی برای مقادیر منفی t یک عبارت نمایی بدست می آید . در شکل (۱-۳) ولتاژ v_C بصورت یک تابع زمان رسم شده است. روشن است هرگاه v_C معلوم باشد میتوان سه متغیر دیگر شاخه را باسانی بست آورد . از معادله (۱-۴) (الف) داریم :

$$(۱-۹) \quad i_C(t) = C \frac{dv_C}{dt} = -\frac{V_0}{R} e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \quad t \geq 0$$

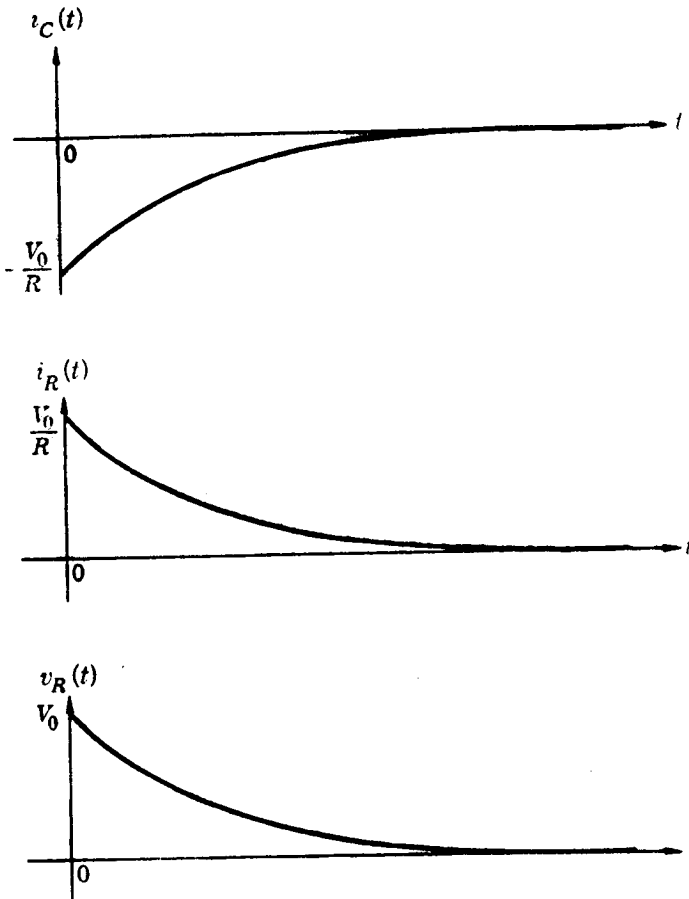
از معادله (۱-۲) داریم :

$$(۱-۱۰) \quad i_R(t) = -i_C(t) = \frac{V_0}{R} e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \quad t \geq 0$$

از معادله (۱-۳) داریم :

$$(۱-۱۱) \quad v_R(t) = v_C(t) = V_0 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \quad t \geq 0$$

این منحنی‌ها در شکل (۱-۴) رسم شده‌اند .



شکل ۱-۴ - متغیرهای شبکه i_C ، i_R و v_R که برای $t \geq 0$ نسبت به زمان رسم شده‌اند .

تمرین - ثابت کنید خط راست شکل (۳ - ۱) که در $t=0^+$ بر منحنی $v_C(t)$ مماس است محور زمان را در نقطه‌ای بطول $T=RC$ قطع میکند.

اکنون شکل موج $v_C(0)$ را با دقت بیشتری بررسی میکنیم. همانگونه که در شکل (۳ - ۱) نشان داده شده است، گوئیم ولتاژ دوسر خازن بطور نمایی با زمان کاهش می‌یابد. چون منحنی‌های نمایی و مدارهای RC ساده در کارهای روزانه مهندسان برق بسیار دیده میشوند دانستن خواص آنها بطور دقیق بسیار اهمیت دارد. یک منحنی نمایی را می‌توان با دو عدد مشخص کرد. یکی عرض منحنی در زمان مشخص، مثلاً $t=0$ ، و دیگری ثابت زمانی^(۱) T که با رابطه:

$$f(t) = f(0) e^{-\frac{t}{T}}$$

تعریف میشود. در منحنی شکل (۳-۱)، $f(0) = V_0$ و $T = RC$ است. شایسته است برخی خواص ساده منحنی نمایی را یادداشت. با فرض $V_0 = 1$ یعنی $v_C(0) = 1$ می‌بینیم که برای $t = T$ داریم:

$$v_C(T) = e^{-1} \approx 0.367$$

و برای $t = 4T$ داریم:

$$v_C(4T) = e^{-4} \approx 0.0183$$

پس در زمانی برابر با ثابت زمانی، منحنی نمایی تقریباً به ۳۸ درصد و در زمانی برابر با چهار برابر ثابت زمانی منحنی نمایی تقریباً به دو درصد مقدار اولیه خود میرسد. تبصره - در معادله‌های (۶ - ۱) و (۷ - ۱) بعد^(۲) جمله:

$$s_0 = -\frac{1}{T} = -\frac{1}{RC}$$

معکوس زمان یعنی فرکانس بوده و بر حسب رادیان بر ثانیه اندازه گیری میشود و آنرا «فرکانس طبیعی^(۳) مدار می‌خوانند. چنانکه در فصلهای بعد خواهیم دید مفهوم «فرکانس طبیعی»

۱ - Time constant

۲ - Dimension

۳ - Natural frequency

در مدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان اهمیت بسیار دارد .

تمرین - میدانیم که واحد ظرفیت فاراد و واحد مقاومت اهم است . نشان دهید که واحد $T = RC$ ، ثانیه است .

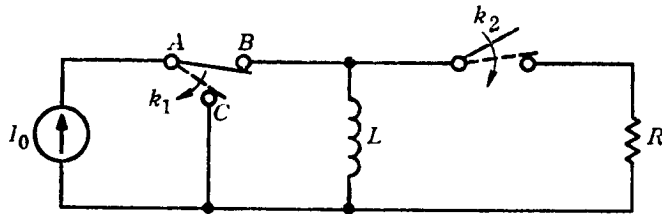
در تجزیه و تحلیل مدار ، ما تقریباً همواره به رفتار یک متغیر خاص شبکه که پاسخ (و گاه خروجی^(۱)) نامیده میشود توجه داریم . چنانکه میدانیم متغیرهای شبکه ولتاژ شاخه یا جریان شاخه و یا یک ترکیب خطی ولتاژهای شاخه‌ها و جریانهای شاخه‌ها است . همچنین ممکن است متغیر یک شبکه بار یک خازن یا شار یک سلف نیز باشد . در مثال بالا ، هریک از منحنی‌های شکل‌های (۱-۳) و (۱-۴) را میتوان پاسخ شبکه دانست . پاسخهای شبکه عموماً معلول منابع ناپسته‌ای که آنها را بعنوان ورودی^(۲) در نظر میگیریم ، یا شرطهای اولیه ، و یا هر دو میباشدند . در مثال بالا ورودی موجود نیست و پاسخ تنها در اثر ولتاژ اولیه خازن بدست آمده است . بدین سبب این پاسخ را پاسخ ورودی صفر می‌نامند . در حالت کلی پاسخ ورودی صفر به پاسخ شبکه‌ای اطلاق میشود که هیچگونه ورودی نداشته باشد . پاسخ ورودی صفر به شرایط اولیه و مشخصات مدار بستگی دارد . پاسخ ورودی صفر یک مدار ساده RC یک منحنی نمایی است که با فرکانس طبیعی :

$$s_0 = -\frac{1}{RC}$$

و ولتاژ اولیه V_0 کاملاً مشخص میشود .

۱-۲- مدار RL (مقاومت - سلف)

نوع دیگر مدار مرتبه اول مدار RL است که ما پاسخ ورودی صفر آن را بررسی خواهیم کرد . چنانکه در شکل (۱-۵) دیده میشود ، برای $t < 0$ کلید k_1 در نقطه B واقع شده است و کلید k_2 باز است و در سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با اندوکتانس L جریان ثابت I_0 برقرار میباشد . در لحظه $t = 0$ کلید k_1 را به نقطه C چرخانده k_2 را می‌بندیم . پس برای $t \geq 0$ سلفی که جریان اولیه آن I_0 میباشد به مقاومت خطی



شکل ۱-۵- برای $t < 0$ کلید k_1 نقطه A را به نقطه B وصل نموده و کلید k_2 باز است. پس برای $t < 0$ جریان I_0 از داخل سلف L میگذرد. در لحظه $t = 0$ کلید k_1 را به نقطه C چرخانیده و کلید k_2 را می‌بندیم در اینصورت منبع جریان با خود اتصال کوتاه شده و جریان سلف باید از مقاومت R بگذرد.

تغییرناپذیر بازمان R متصل میشود. انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی که در نتیجه جریان I_0 در سلف بوجود آمده بتدریج کاهش یافته بصورت حرارت در مقاومت تلف میشود. جریان در حلقه RL بطور یکنواخت کاهش یافته بالاخره بسوی صفر می‌گراید.

میتوان این مدار را بطریق مشابه بانوشتن قوانین کیرشف و معادله‌های شاخه‌ها تجزیه و تحلیل نمود و بدین منظور برای $t \geq 0$ بار دیگر مدار را مطابق شکل (۱-۶) رسم می‌کنیم. در این شکل جهت‌های قراردادی ولتاژ و جریان همه شاخه‌ها بخوبی نشان داده شده‌است. با استفاده از قانون جریان کیرشف خواهیم داشت $i_R = -i_L$ و قانون ولتاژ کیرشف بیان میدارد که $v_L - v_R = 0$ میباشد. با بکار بردن معادله‌های شاخه برای هر دو عنصر یعنی:

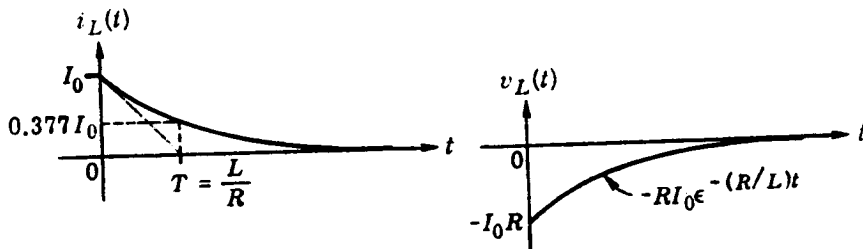
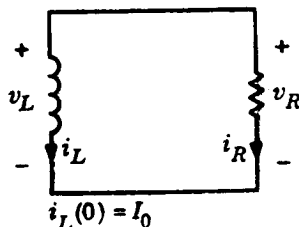
$$v_L = L \left(\frac{di_L}{dt} \right) \quad , \quad i_L(0) = I_0 \quad , \quad v_R = R i_R$$

معادله دیفرانسیل زیر برحسب جریان i_L بدست می‌آید:

$$(1-12) \quad L \frac{di_L}{dt} + R i_L = 0 \quad t \geq 0 \quad i_L(0) = I_0$$

که یک معادله دیفرانسیل خطی همگن از مرتبه اول با ضرایب ثابت، و درست بهمان

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها



شکل ۱-۶- یک مدار RL با $i_L(0) = I_0$
و شکل موجهای آن برای $t \geq 0$

صورت معادله پیش یعنی (۱-۵)، میباشد. پس جواب آن هم، بجز طرز نمایش، بهمان صورت است:

$$i_L(t) = I_0 e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t} \quad t \geq 0 \quad (1-13)$$

که در آن $T = \frac{L}{R}$ ثابت زمانی و $s_0 \triangleq -\frac{R}{L}$ فرکانس طبیعی است. نمایش هندسی جریان i_L و ولتاژ v_L در شکل (۱-۶) دیده میشوند.

۱-۳- پاسخ ورودی صفر بصورت تابعی از حالت اولیه

برای مدارهای RC و RL که در بالا در نظر گرفتیم، پاسخهای ورودی صفر بترتیب چنین میباشند:

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad t \geq 0 \quad (1-14)$$

شرایط اولیه بترتیب با V_0 و I_0 مشخص شده اند و مقادیر V_0 و I_0 بترتیب «حالت اولیه^(۱)»

مدارهای مرتبه اول

۱۵۳

مدارهای RC و RL نام دارند. اگر ما نحوه وابستگی شکل موج پاسخ ورودی صفر را به حالت اولیه در نظر گیریم به نتیجه زیر میرسیم:

« برای مدارهای مرتبه اول خطی تغییرناپذیر با زمان، پاسخ ورودی صفر که بصورت شکل موج در نظر گرفته شده در فاصله $0 \leq t < \infty$ تعریف می شود، یک تابع خطی حالت اولیه است. »

اکنون این بیان را با در نظر گرفتن یک مدار RC ثابت می کنیم. یعنی میخواهیم نشان دهیم که شکل موج $v(t)$ در معادله (۱-۱۴) یک تابع خطی حالت اولیه V_0 میباشد. بدین منظور لازم است شرطهای همگنی و جمع پذیری تابع تحقیق شوند. (بخش ۳-۲ ضمیمه الف دیده شود). خاصیت همگن بودن آشکار است زیرا اگر حالت اولیه در ثابت k ضرب شود از معادله (۱-۱۴) می بینیم که تمام شکل موج در ثابت k ضرب میشود. جمع پذیری هم بسادگی دیده می شود. پاسخ ورودی صفر متناظر با حالت اولیه V'_0 ،

$$v'(t) = V'_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

و پاسخ ورودی صفر متناظر با حالت اولیه دیگر V''_0 ،

$$v''(t) = V''_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

و پاسخ ورودی صفر متناظر با حالت اولیه $V'_0 + V''_0$ ،

$$(V'_0 + V''_0) e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0$$

میباشد. این شکل موج مجموع دو شکل موج پیش است. پس خاصیت جمع پذیری برقرار است و چون وابستگی پاسخ ورودی صفر به حالت اولیه واجد شرطهای لازم برای همگنی و جمع پذیری است این وابستگی یک تابع خطی میباشد.

تبصره - این خاصیت برای مدارهای غیر خطی برقرار نیست. برای نشان دادن این مطلب مدار RC شکل (۷-۱ الف) را در نظر میگیریم. در اینجا خازن خطی و تغییرناپذیر

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

با زمان باظرفیت یک فاراد و مقاومت غیرخطی با مشخصهٔ $i_R = v_R^2$ می‌باشد. هردو عنصر دارای ولتاژ شاخهٔ v بوده و اگر جریان شاخه‌ها را برحسب v بیان کنیم از KCL معلوم می‌شود که

$$C \frac{dv}{dt} + i_R = \frac{dv}{dt} + v^2 = 0 \quad v(0) = V_0$$

پس :

$$\frac{dv}{v^2} = -dt$$

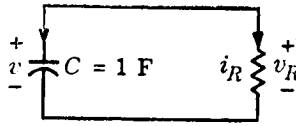
اگر درفاصلهٔ 0 و t انتگرال بگیریم، ولتاژ، مقدار اولیهٔ V_0 و مقدار نهائی $v(t)$ را بگیرد و خواهیم داشت :

$$-\frac{1}{v(t)} + \frac{1}{V_0} = -t$$

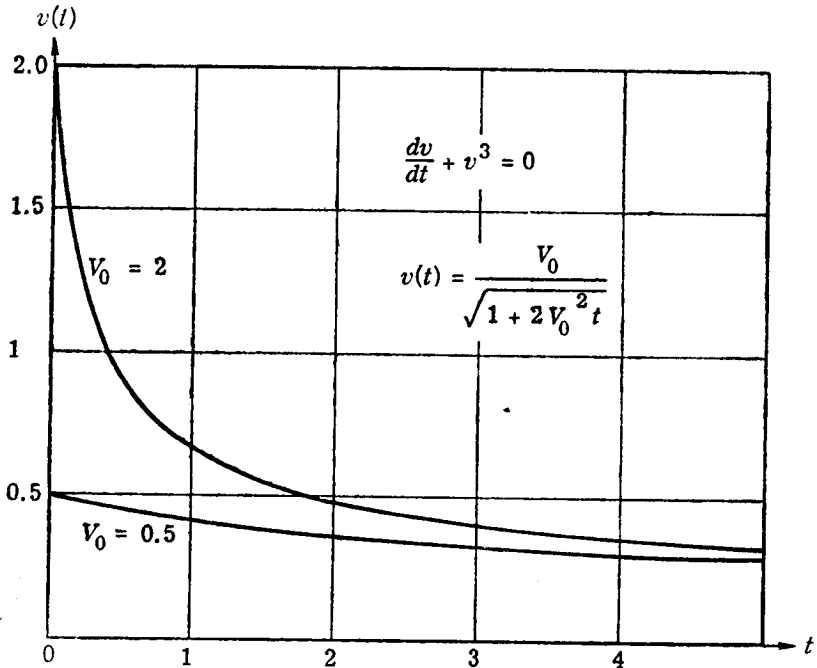
یا :

$$(۱-۱۰) \quad v(t) = \frac{V_0}{V_0 + t} \quad t \geq 0$$

این پاسخ ورودی صفر مدار غیرخطی RC است که در زمان $t=0$ از حالت اولیهٔ V_0 شروع می‌شود. نمایش هندسی شکل موجهای متناظر با $V_0=۰.۰$ و $V_0=۲$ در شکل (۷-۱) دیده می‌شوند. مسلم است که نمیتوان منحنی بالا (برای $V_0=۲$) را با ضرب کردن عرضهای نقطه‌های منحنی پائین در t بدست آورد. روشن است پاسخ ورودی صفر تابع خطی حالت اولیه نیست. این نکته از لحاظ آزمایشگاهی بسیار مهم است. فرض کنیم در یک گزارش آزمایشگاهی تصویری از پاسخ ورودی صفر یک مدار مرتبه اول که در اسیلوسکوپ دیده می‌شود، را برای $V_0=۱$ داریم. اگر مدار خطی باشد، عرض نقطه‌های پاسخ ورودی صفر برای هر حالت اولیه دیگر، مثلاً $V_0=k$ ، درست k برابر عرض نقطه‌های منحنی است که در دست داریم. در صورتیکه در حالت غیرخطی باید بار دیگر آزمایش کرد یا معادله دیفرانسیل متناظر را برای حالت اولیه $V_0=k$ حل نمود.



(الف)



(ب)

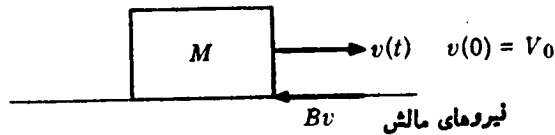
شکل ۷-۱- مدار غیرخطی RC و دو پاسخ ورودی صفر آن. خازن

خطی است و ظرفیت $C=1$ فاراد دارد. مشخصه مقاومت

غیرخطی $i_R = v_R^2$ میباشد.

۴-۱- مثال مکانیکی

اکنون یک سیستم مکانیکی را که با آن آشنایی داریم در نظر میگیریم که رفتاری مشابه مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان RL و RC که در بالا دیدیم داشته باشد. در شکل (۸-۱) جسمی بجرم M که در لحظه $t=0$ با سرعت اولیه V_0 حرکت میکند



شکل ۸-۱ = یک سیستم مکانیکی که با معادله دیفرانسیل مرتبه اول توصیف میشود .

دیده میشود . سرعت حرکت این جسم بعلا مالتش^(۱) بتدریج کاهش می‌یابد . مالتش را همواره با نیروهای مالتش که درجهت مخالف سرعت v ، مطابق شکل (۸ - ۱) ، اثر نمیکنند نشان میدهند . گیریم که این نیرو متناسب با اندازهٔ سرعت یعنی $f = Bv$ باشد که در آن ثابت B را ضریب میرائی^(۲) گویند . از قانون دوم حرکت نیوتن برای $t \geq 0$ داریم :

$$M \frac{dv}{dt} = -Bv \quad v(0) = V_0 \quad (۱-۱۶)$$

و بنابراین :

$$v(t) = V_0 e^{-\left(\frac{B}{M}\right)t} \quad t \geq 0 \quad (۱-۱۷)$$

که در آن $\frac{M}{B}$ نمایش ثابت زمانی سیستم مکانیکی و $\frac{B}{M}$ - فرکانس طبیعی است .

۲- پاسخ حالت صفر

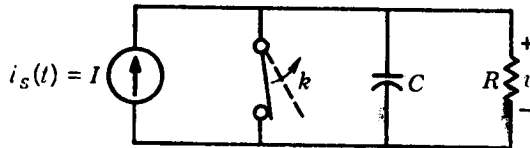
۲-۱- ورودی جریان ثابت

در مدار شکل (۲-۱) منبع جریان i_s با کلید k به مدار RC موازی خطی تغییرناپذیر با زمان متصل شده است . برای سادگی نخست حالتی را در نظر میگیریم که در آن جریان i_s ثابت و برابر I است . پیش از باز شدن کلید، منبع جریان در مدار اتصال کوتاه ، جریان گردش^(۳) بوجود می‌آورد . در لحظه $t=0$ کلید باز شده، منبع جریان به مدار RC وصل

۱ - Friction

۲ - Damping

۳ - Circulating Current



شکل ۱-۲= مدار RC با ورودی منبع جریان . در لحظه $t=0$ کلید باز میشود .

میشود . از KVL می‌بینیم که ولتاژ دوسر همره عنصر یکی است . این ولتاژ را با v نشان داده و فرض میکنیم v پاسخ موردنظر باشد . بانوشتن KCL برحسب v معادله زیر :

$$(۲-۱) \quad C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = i_s(t) = I \quad t \geq 0$$

که در آن I یک ثابت است برای شبکه بدست می‌آید . فرض میکنیم خازن بدون بار اولیه باشد پس شرط اولیه چنین خواهد بود :

$$(۲-۲) \quad v(0) = 0$$

پیش ازحل معادله‌های (۱-۲) و (۲-۲) آنچه را که پس از باز شدن کلید روی خواهد داد بررسی می‌کنیم . در لحظه $t=0^+$ ، یعنی درست پس از باز شدن کلید ، بموجب آنچه در فصل ۲ گفتیم ، چون ولتاژ دوسر خازن نمی‌تواند جهش ناگهانی داشته باشد مگر اینکه جریان بی‌نهایت بزرگی در آن برقرار شود ، ولتاژ دوسر خازن صفر است ، و چون در لحظه $t=0^+$ ، ولتاژ دوسر خازن هنوز صفر است بموجب قانون اهم جریان داخل مقاوت هم باید برابر صفر باشد . پس ، در این لحظه همه جریان منبع وارد خازن میگردد . بموجب معادله (۱-۲) این عمل موجب افزایش ولتاژ میشود و در نتیجه داریم :

$$(۲-۳) \quad \left. \frac{dv}{dt} \right|_{0^+} = \frac{I}{C}$$

با گذشت زمان v افزایش یافته و $\frac{v}{R}$ ، جریان داخل مقاوت نیز افزایش می‌یابد . مدتی دراز پس از باز شدن کلید ، خازن کاملاً پر شده ولتاژ عملاً ثابت میماند و پس از آن

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

$\frac{dv}{dt} \approx 0$ است و همهٔ جریان منبع از داخل مقاومت گذشته و خازن مانند یک مدار باز عمل می‌کند، یعنی:

$$v \approx RI \quad (2-4)$$

این نتیجه از معادلهٔ (۱-۲) نیز برمی‌آید و در شکل (۲-۲) نیز نشان داده شده است و گوئیم مدار « بحالت دائمی^(۱) » رسیده است. اکنون تنها باید نشان داد که تغییر کلی ولتاژ چگونه انجام می‌گیرد. بدین منظور از روش تحلیلی زیر استفاده می‌کنیم. جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی و ناهمگن را میتوان بصورت زیر نوشت:

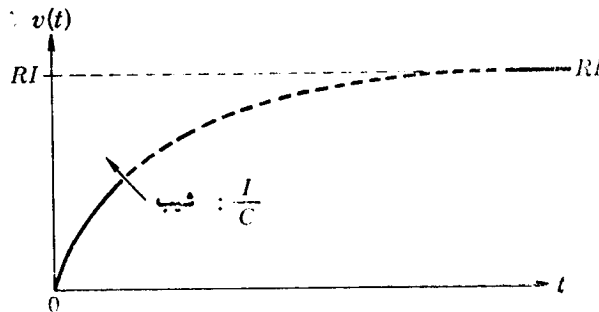
$$v = v_h + v_p \quad (2-5)$$

که در آن v_h یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل همگن و v_p ، یک جواب خاص معادلهٔ دیفرانسیل ناهمگن است. البته v_p به ورودی مدار بستگی دارد. در این مسأله جواب عمومی معادلهٔ همگن چنین است:

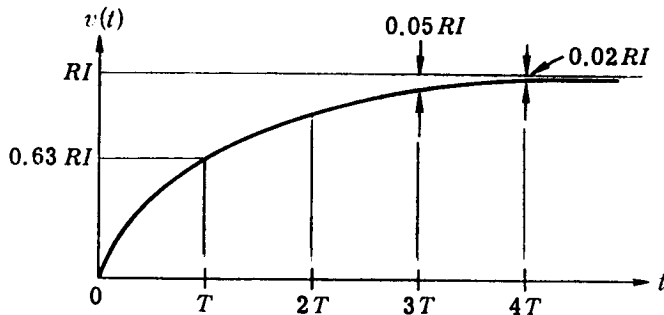
$$v_h = K_1 e^{s_0 t} \quad s_0 = -\frac{1}{RC} \quad (2-6)$$

که در آن K_1 ثابتی است دلخواه. برای یک ورودی جریان ثابت مناسب‌ترین جواب خاص یک مقدار ثابت است:

$$v_p = RI \quad (2-7)$$



شکل ۲-۲- رفتار اولیه و نهائی ولتاژ دوسر خازن



شکل ۲-۳- پاسخ ولتاژ مدار RC ناشی از منبع ثابت I چنانکه در شکل (۲-۱) با $v(0) = 0$ نشان داده شده است.

زیرا ثابت RI معادله دیفرانسیل (۲-۱) را برمی آورد. با جایگزینی روابط (۲-۶) و (۲-۷) در رابطه (۲-۵) جواب کلی معادله (۲-۱) بدست می آید:

$$(۲-۸) \quad \boxed{v(t) = K_1 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} + RI} \quad t \geq 0$$

که در آن K_1 را باید از شرط اولیه ای که با معادله (۲-۲) مشخص میشود بدست آورد. با قراردادن $t=0$ در معادله (۲-۸) چنین داریم:

$$v(0) = K_1 + RI = 0$$

پس:

$$(۲-۹) \quad K_1 = -RI$$

بنابراین عبارت ولتاژ بصورت تابعی از زمان چنین میباشد.

$$(۲-۱۰) \quad \boxed{v(t) = RI \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}\right)} \quad t \geq 0$$

منحنی شکل (۲-۳) نشان میدهد چگونه ولتاژ بطور نمایی بمقدار حالت دائمی خود نزدیک میشود. در زمانی در حدود چهار برابر ثابت زمانی مدار، ولتاژ بمقداری میرسد که تقریباً ۲ درصد با مقدار نهایی RI متفاوت است.

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

تمرین ۱- پاسخ حالت صفر مدار شکل (۲-۱) را با مقیاسی مناسب برای حالت‌های زیر رسم کنید :

الف : $I = 200 \text{ mA}$, $R = 1 \text{ k}\Omega$ (10^3 اهم) و $C = 1 \mu\text{F}$ (10^{-6} فاراد)

ب : $I = 2 \text{ mA}$, $R = 50 \Omega$ و $C = 0.1 \text{ nF}$ (10^{-10} فاراد)

تمرین ۲- دربارهٔ شدن خازن مدار شکل (۲-۱) از لحاظ انرژی بحث کنید . بگفته دقیقتر ،

الف - شکل موجهای $p_s(t)$ (توانی که منبع تحویل داده است) و $p_R(t)$ (توان تلف شده در مقاومت) و $\mathcal{E}(t)$ (انرژی ذخیره شده در خازن) را محاسبه کرده منحنی‌های آنها را رسم کنید .

ب - بازده این عمل یعنی نسبت انرژی که سرانجام در خازن ذخیره می‌شود به انرژی

که منبع تحویل میدهد (یعنی $\int_0^\infty p_s(t) dt$) را حساب کنید .

۲-۲- ورودی سینوسی

اکنون همان مدار را با ورودی متفاوتی در نظر میگیریم . فرض کنیم منبع بارابطه سینوسی زیر داده شده باشد :

$$i_s(t) = A_1 \cos(\omega t + \Phi_1) \quad t \geq 0 \quad (2-11)$$

در این رابطه ثابت A_1 را « دامنه » و ثابت ω را « فرکانس » (زاویه‌ای) ورودی سینوسی مینامند . فرکانس بر حسب رادیان بر ثانیه اندازه گرفته میشود . ثابت Φ_1 را « فاز (۱) » گویند . اکنون به حل این معادله که تعبیر فیزیکی آن را در بخش بعد خواهیم دید می‌پردازیم . چون در این حالت بجز ورودی بقیه مدار مانند حالت پیش است جواب معادله دیفرانسیل همگن به همان صورت پیش می‌باشد (معادله (۲-۶)) . پس لازم است که تنها برای ورودی سینوسی یک جواب خاص بیابیم . شایسته‌ترین جواب خاص یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت برای یک ورودی سینوسی ، یک تابع سینوسی با همان فرکانس است .

از اینرو v_p را باید بدین صورت نوشت :

$$(۲-۱۲) \quad v_p(t) = A_r \cos(\omega t + \Phi_r)$$

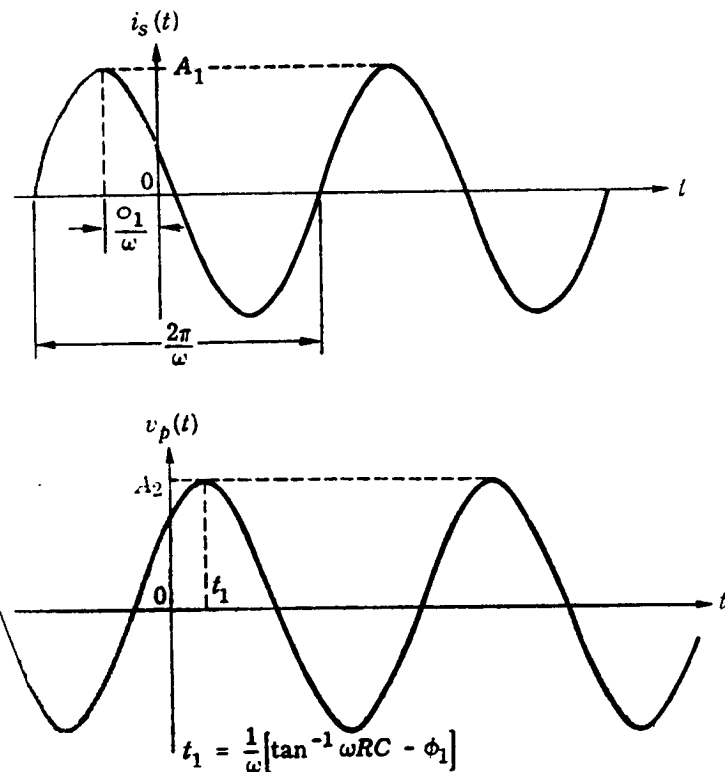
که در آن A_r و Φ_r ثابت‌هایی هستند که باید تعیین کرد. بدین منظور رابطه (۲-۱۲) را در معادله دیفرانسیل زیر میگذاریم.

$$(۲-۱۳) \quad C \frac{dv_p}{dt} + \frac{1}{R} v_p = A_1 \cos(\omega t + \Phi_1)$$

که خواهیم داشت :

$$-C A_r \omega \sin(\omega t + \Phi_r) + \frac{1}{R} A_r \cos(\omega t + \Phi_r) = A_1 \cos(\omega t + \Phi_1)$$

برای همه $t \geq 0$



شکل ۴-۲- جریانی ورودی و یک جواب ویژه برای

ولتاژ خروجی مدار RC شکل (۱-۲)

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی و گسترش عبارتهای $\cos(\omega t + \Phi_r)$ ، $\sin(\omega t + \Phi_r)$ و $\cos(\omega t + \Phi_1)$ برحسب ترکیب خطی $\cos \omega t$ و $\sin \omega t$ و برابر گذاردن جداگانه ضریبهای $\cos \omega t$ و $\sin \omega t$ این نتیجه‌ها بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} (2-14) & A_r = \frac{A_1}{\sqrt{(1/R)^2 + (\omega C)^2}} \\ (2-15) & \Phi_r = \Phi_1 - \tan^{-1} \omega RC \end{cases} \quad \text{و:}$$

در اینجا $\tan^{-1} \omega RC$ نمایش زاویه‌ایست درفاصلهٔ 0 تا 90° که تانژانت آن برابر ωRC است. این جواب خاص و جریان ورودی در شکل (2-4) رسم شده‌اند. درفصل هفتم روشی کلی‌تر و زیباتر برای یافتن این جواب خاص خواهیم دید.

تمرین - معادله‌های (2-14) و (2-15) را به تفصیل بدست آورید.

بنابراین جواب کلی معادله (2-13) چنین است:

$$(2-16) \quad v(t) = K_1 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} + A_r \cos(\omega t + \Phi_r) \quad t \geq 0$$

با گذاشتن $t=0$ خواهیم داشت:

$$(2-17) \quad v(0) = K_1 + A_r \cos \Phi_r = 0$$

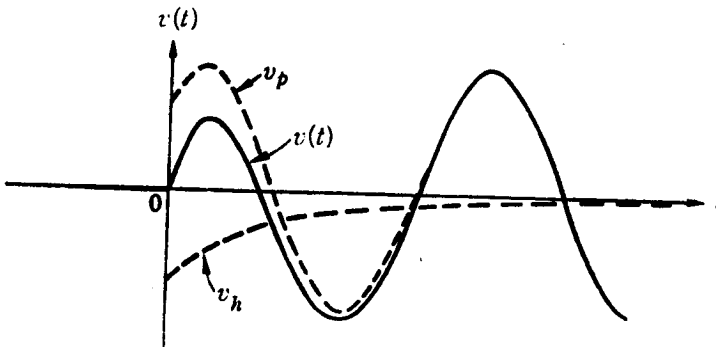
یعنی:

$$(2-18) \quad K_1 = -A_r \cos \Phi_r$$

پس پاسخ چنین خواهد بود:

$$(2-19) \quad \boxed{v(t) = -A_r \cos \Phi_r e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} + A_r \cos(\omega t + \Phi_r) \quad t \geq 0}$$

که در آن A_r و Φ_r در معادله‌های (2-14) و (2-15) تعریف شده‌اند. منحنی v یعنی پاسخ حالت صفر به ورودی $A_1 \cos(\omega t + \Phi_1)$ در شکل (2-5) دیده می‌شود.



شکل ۵-۲- پاسخ ولتاژ مدار شکل (۲-۱) با $v(0)=0$

$$i_s(t) = A_1 \cos(\omega t + \Phi_1) \quad \text{و}$$

در دو حالتی که در این بخش دیدیم ولتاژ v را پاسخ و منبع جریان i_s را ورودی در نظر گرفتیم. شرط اولیه در مدار صفر بوده یعنی پیش از وارد آوردن ورودی، ولتاژ دوسر خازن برابر با صفر بود. در حالت کلی اگر همه شرط‌های اولیه در مدار صفر باشند گوئیم مدار در حالت صفر^(۱) است. پاسخ مداری که از حالت صفر شروع میکند منحصرأ معلول ورودی آنست. بموجب تعریف، پاسخ حالت صفر یک مدار پاسخ آن به یک ورودی است که در زمان دلخواه t_0 به مدار وارد شود بشرط آنکه مدار درست پیش از وارد آوردن این ورودی (یعنی در زمان t_0) در حالت صفر باشد. در محاسبه پاسخ حالت صفر هدف اصلی، رفتار پاسخ برای $t \geq t_0$ است. بدین منظور چنین «قرار می‌گذاریم»: برای $t < t_0$ ورودی و پاسخ حالت صفر را متحد با صفر می‌گیریم.

+ در فصل سیزدهم ثابت خواهیم کرد که اگر ولتاژ دوسر همه خازنها و جریان اولیه داخل همه سلفهای یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان برابر صفر باشد این مدار دو حالت صفر خواهد بود.

۱ - Zero State

۳- پاسخ کامل: حالت گذرا و حالت دائمی

۳-۱- پاسخ کامل

پاسخ یک مدار به تحریک ورودی و شرطهای اولیه رویهم، پاسخ کامل^(۱) نام دارد. بنابراین پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر حالت‌های خاص پاسخ کامل هستند. در این بخش نشان خواهیم داد که:

« برای مدار ساده خطی تغییرناپذیر با زمان RC پاسخ کامل برابر است با مجموع پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر آن مدار. »

مدار شکل (۳-۱)، که در آن خازن دارای بار اولیه میباشد یعنی:

$$v(0) = V_0 \neq 0$$

را در نظر گرفته یک ورودی جریان در لحظه $t=0$ به مدار وصل میکنیم. بموجب تعریف، پاسخ کامل شکل موج $v(t)$ است که معلول تحریک ورودی $i_s(t)$ و حالت اولیه V_0 رویهم میباشد. از لحاظ ریاضی این پاسخ جواب معادله زیر است:

$$(۳-۱) \quad C \frac{dv}{dt} + Gv = i_s(t) \quad t \geq 0$$

با شرط

$$(۳-۲) \quad v(0) = V_0$$

که در آن V_0 ولتاژ اولیه دوسر خازن است. گیریم v_i پاسخ ورودی صفر باشد، بنا به تعریف v_i جواب معادله زیر است:

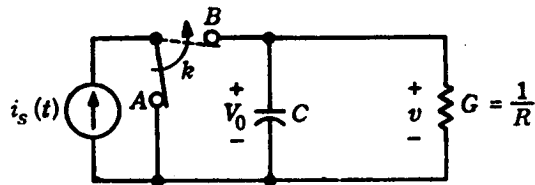
$$C \frac{dv_i}{dt} + Gv_i = 0 \quad t \geq 0$$

با شرط

$$v_i(0) = V_0$$

+ در واقع این بیان برای هر مدار خطی (تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان) درست است.

۱ — Complete Response



شکل ۳-۱- مدار RC با $v(0) = V_0$ با یک منبع جریان $i_s(t)$

تحریک میشود. در لحظه $t=0$ کلید k از نقطه A

به نقطه B پرخانیده میشود.

گیریم v_0 پاسخ حالت صفر باشد. بنا بتعریف، این پاسخ جواب معادله زیر است:

$$C \frac{dv_0}{dt} + Gv_0 = i_s(t) \quad t \geq 0$$

با شرط

$$v_0(0) = 0$$

از جمع این چهار معادله میتوان معادله زیر را بدست آورد:

$$C \frac{d}{dt} (v_i + v_0) + G(v_i + v_0) = i_s(t) \quad t \geq 0$$

با شرط

$$v_i(0) + v_0(0) = V_0$$

اما چنانکه از این دو معادله بررسی آید شکل موج $v_i(0) + v_0(0)$ هم معادله دیفرانسیل (۳-۱) و هم شرطهای اولیه (۳-۲) را برمی آورد. و چون جواب معادله دیفرانسیلی بصورت (۳-۱) با شرطهای اولیه (۳-۲) یکتا است، جواب کامل پاسخ v بدین صورت میباشد:

$$v(t) = v_i(t) + v_0(t) \quad t \geq 0$$

یعنی پاسخ کامل v برابر با مجموع پاسخ ورودی صفر v_i و پاسخ حالت صفر v_0 میباشد.

مثال- گیریم ورودی یک مدار RC منبع جریان ثابت $i_s = I$ باشد که در لحظه

$t=0$ وارد میشود. میتوان باسانی پاسخ کامل مدار را نوشت زیرا پاسخ ورودی صفر و

پاسخ حالت صفر را محاسبه کرده ایم . پس :

$$v(t) = v_i(t) + v_0(t) \quad t \geq 0$$

از معادله (۱-۸) چنین داریم :

$$v_i(t) = V_0 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \quad t \geq 0$$

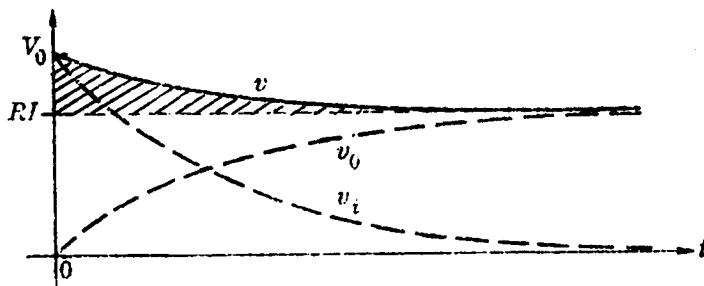
همچنین از معادله (۲-۱۰) چنین داریم :

$$v_0(t) = RI \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}\right) \quad t \geq 0$$

در نتیجه پاسخ کامل چنین است :

$$(۲-۲) \quad \underbrace{v(t)}_{\text{پاسخ کامل}} = \underbrace{V_0 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}}_{\text{پاسخ ورودی صفر } v_i} + \underbrace{RI \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}\right)}_{\text{پاسخ حالت صفر } v_0} \quad t \geq 0$$

پاسخها در شکل (۲-۲) نشان داده شده اند .



شکل ۲-۳ = پاسخ ورودی صفر ، پاسخ حالت صفر و پاسخ کامل

یک مدار ساده RC . تحریک ورودی یک منبع جریان

ثابت است که در $t=0$ اعمال میشود .

مسلّم است که از لحاظ محاسباتی محض، یافتن پاسخ کامل مستلزم حل معادله دیفرانسیل نا همگن با شرطهای اولیه معین است و ممکن است نیازی به تجزیه آن بصورت پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر نباشد. از سوی دیگر از لحاظ فیزیکی، این نکته که پاسخ کامل برابر است با مجموع پاسخ حالت صفر (معلول ورودی تنها) و پاسخ ورودی صفر (معلول شرطهای اولیه) بسیار جالب است و این تجزیه یک نتیجه اساسی نظریه مدار و در واقع نظریه سیستمهای خطی میباشد.

تبصره - مدار فصل ششم ثابت خواهیم کرد که برای مدار RC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان، و برای ورودی دلخواه i_s ، میتوان پاسخ کامل را صریحاً بدین صورت نوشت:

$$\underbrace{v(t)}_{\text{پاسخ کامل}} = \underbrace{V_0 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}}_{\text{پاسخ ورودی صفر}} + \underbrace{\int_0^t \frac{1}{C} e^{-\left(\frac{t-t'}{RC}\right)} i_s(t') dt'}_{\text{پاسخ حالت صفر}}$$

تمرین - با جایگزینی مستقیم نشان دهید که عبارت پاسخ کامل که در بالا داده شده است معادله های (۳-۱) و (۳-۲) را برسی آورد.

۳-۲- حالت گذرا و حالت دائمی

در مثال پیش میتوان پاسخ کامل را با راهی دیگر تجزیه نمود. پاسخ کامل معلول حالت اولیه V_0 و ورودی جریان ثابت I در معادله (۳-۲) چنین نوشته میشود:

$$(۳-۴) \quad \underbrace{v(t)}_{\text{پاسخ کامل}} = \underbrace{(V_0 - RI) e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}}_{\text{حالت گذرا}} + \underbrace{RI}_{\text{حالت دائمی}} \quad t \geq 0$$

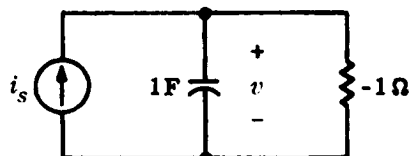
همچنانکه در قسمت هاشور زده شکل (۳-۲) نشان داده شده است جمله اول یعنی تفاضل شکل موج $v(0)$ و ثابت RI یک تابع نمایی میرا^(۱) است. برای مقادیر بزرگ t جمله

اول ناچیز و جمله دوم از آن بسیار بزرگتر است. بدین سبب جمله اول را «حالت گذرا»^(۱) و جمله دوم را «حالت دائمی»^(۲) گویند. در این مثال واضح است که پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر هر دو در حالت گذرا سهمیم هستند در صورتیکه حالت دائمی تنها محلول پاسخ حالت صفر میباشد. از لحاظ فیزیکی حالت گذرا نتیجهٔ دو علت است، یکی شرطهای اولیه در مدار و دیگری وارد آمدن ناگهانی ورودی. و اگر رفتار مدار با پیشرفت زمان خوب باشد این حالت گذرا کم کم از میان میرود و حالت دائمی تنها محلول تعریکه ورودی، دارای شکل موجی است که با شکل موج ورودی ارتباط بسیار نزدیک دارد. مثلاً اگر ورودی ثابت باشد پاسخ حالت دائم نیز مقداری است ثابت و اگر ورودی یک سینوسی با فرکانس ω باشد پاسخ حالت دائمی نیز یک سینوسی با همان فرکانس خواهد بود. در مثال بخش (۲-۲) ورودی برابر با $i_s = A_1 \cos(\omega t + \Phi_1)$ و پاسخ آن (همچنانکه از معادله (۱۹-۲) برمی‌آید) دارای جزء حالت دائمی $A_2 \cos(\omega t + \Phi_2)$ و جزء گذرای:

$$-A_2 \cos \Phi_2 e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}$$

میباشد. بحث کامل حالت‌های گذرا و دائمی در فصل هفتم دیده خواهد شد.

تمرین - مداری که در شکل (۲-۳) دیده میشود دارای یک خازن خطی یک فارادی و یک مقاومت خطی با مقاومت منفی ۱- اهم است. در لحظه $t=0$ هنگامی که منبع جریان وارد میشود مدار در حالت صفر است، چنانکه برای $t \geq 0$ داریم $i_s = I_m \cos \omega t$ (I_m و ω مقادیر ثابتی هستند). پاسخ v را محاسبه و رسم کنید. آیا حالت دائمی سینوسی وجود دارد؟ توضیح دهید.



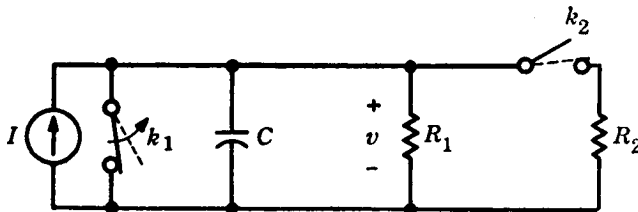
شکل ۳-۳ - تمرین حالت دائمی. توجه کنید که مدار دارای یک

مقاومت، با مقاومت «منفی» است.

تیمبر ۵- تذکر این نکته حائز اهمیت است که گاه میتوان با ورودی سینوسی و انتخاب لحظه خاصی برای وارد نمودن این ورودی، حالت گذرا را کاملاً حذف کرد. ما این نتیجه را با همان مثال بخش (۲-۲) نشان خواهیم داد. چنانکه میدانیم مسأله مورد نظر تعیین پاسخ حالت صفر یک مدار RC به ورودی جریان $A_1 \cos(\omega t + \Phi_1)$ بود. جواب این مسأله بصورت معادله (۲-۱۶) و برحسب ثابت K_1 بدست آمده بود ولی بایستی این ثابت را با شرطهای اولیه تعیین کرد. واضح است که اگر K_1 صفر باشد حالت گذرای وجود نداشته و در معادله (۲-۱۶) یک سینوسی محض خواهد بود. چنانکه می بینیم در معادله (۲-۱۷)، K_1 به ولتاژ اولیه دوسرخازن و هم چنین به مقدار شکل موج ورودی در لحظه $t=0$ بستگی دارد. در واقع اگر و تنها اگر، $\Phi_2 = \pm 90^\circ$ باشد $K_1 = 0$ خواهد بود. از لحاظ فیزیکی این بدان معنی است که اگر در لحظه $t=0$ ، ولتاژ حالت دائمی دوسرخازن یعنی، $A_2 \cos \Phi_2$ برابر ولتاژ اولیه دوسرخازن یعنی، $v(0)$ باشد پاسخ حالت صفر، حالت گذرای نخواهد داشت. برای آنکه $\Phi_2 = \pm 90^\circ$ باشد، معادله (۲-۱۵) مستلزم آنست که فاز تحریک ورودی برابر $\pm 90^\circ + \tan^{-1} \omega CR$ انتخاب شود. میتوان از این بحث چنین نتیجه گرفت که اگر در لحظه $t=0$ ولتاژ دوسرخازن معین باشد وارد آوردن ناگهانی منبع جریان سینوسی یک حالت گذرا بوجود می آورد مگر اینکه دامنه و فاز ورودی سینوسی بطور مناسب طوری تنظیم شوند که جزء حالت دائمی v در لحظه $t=0$ برابر ولتاژ اولیه دوسرخازن گردد.

۳-۳- مدارهای با دو ثابت زمانی

اغلب در مدارهایی که کلید قطع و وصل دارند مسأله هایی شامل محاسبه حالت های گذرا پیش می آیند، و اکنون می خواهیم چنین مسائلی را با مداری که در شکل (۳-۴) نشان داده شده است مطالعه کنیم. گیریم خازن و مقاومتها خطی و تغییرناپذیر با زمان و خازن بدون بار اولیه است. برای $t < 0$ کلید k_1 بسته و کلید k_2 باز است. در $t=0$ کلید k_1 را باز کرده منبع جریان ثابت را بمدار موازی RC وصل می کنیم. خازن بتدریج با ثابت زمانی $T_1 \triangleq R_1 C$ پر می شود. اکنون گیریم که در زمان $t=T_1$ کلید k_2 بسته شود. می خواهیم شکل موج ولتاژ را در دوسرخازن، برای $t \geq 0$ بدست آوریم. میتوان مسأله را به دو جزء تقسیم نمود: یکی فاصله $[0, T_1]$ و دیگری فاصله $[T_1, \infty)$.



شکل ۳-۴- یک مسأله حالت گذرای ساده. در لحظه $t=0$

کلید k_1 باز شده و در لحظه $t=T_1 \triangleq R_1 C$ کلید k_2 بسته میشود.

نخست ولتاژ را در فاصله $[0, T_1]$ ، پیش از اینکه کلید k_2 بسته شود تعیین میکنیم. بنا بفرض چون $v(0)=0$ است میتوان پاسخ حالت صفر را فوراً تعیین نمود. در نتیجه

$$(۳-۵) \quad v(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ R_1 I \left(1 - e^{-\frac{t}{T_1}}\right) & 0 \leq t \leq T_1 \end{cases}$$

در لحظه $t=T_1$:

$$(۳-۶) \quad v(T_1) = R_1 I \left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

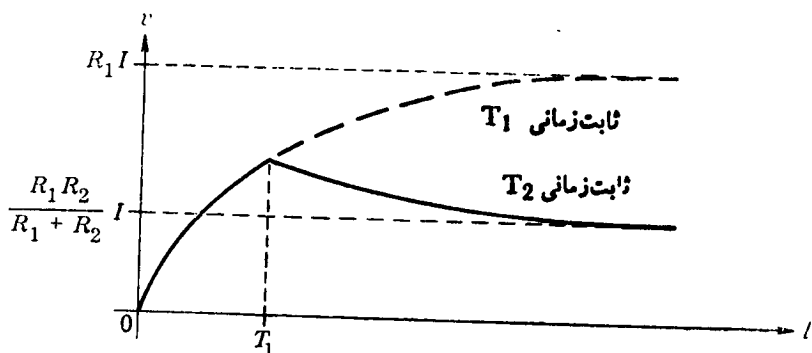
این، شرط اولیه قسمت دوم مسأله است. چون کلید k_2 برای $t > T_1$ بسته است یک ترکیب موازی C و R_1 و R_2 داریم و ثابت زمانی این مدار چنین است:

$$(۳-۷) \quad T_2 = C \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)$$

و تحریک ورودی I میباشد. برای $t \geq T_1$ پاسخ کامل این قسمت دوم چنین است:

$$(۳-۸) \quad v(t) = R_1 I \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{-\frac{t-T_1}{T_2}} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I \left(1 - e^{-\frac{t-T_1}{T_2}}\right) \quad t \geq T_1$$

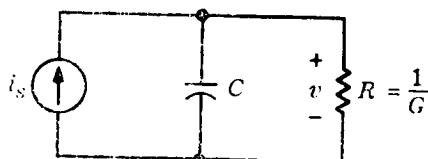
شکل موج $v(t)$ در شکل (۳-۵) دیده میشود.



شکل ۵-۳- شکل موج ولتاژ برای مدار شکل (۴-۳)

۴- خطی بودن پاسخ حالت صفر

مسلم است که پاسخ حالت صفر «هر» مدار خطی یک تابع خطی تحریک ورودی است، یعنی وابستگی شکل موج پاسخ حالت صفر به شکل موج تحریک ورودی با یک تابع خطی بیان میشود. باید دانست که هر منبع ناپسته در یک مدار خطی بعنوان ورودی در نظر گرفته میشود. اکنون این نتیجه را با مدار خطی تغییرناپذیر با زمان RC که در بالا دیدیم تشریح می‌کنیم (به شکل (۴-۱) مراجعه شود). گیریم ورودی آن شکل موج جریان $i_s(t)$ و پاسخ آن شکل موج ولتاژ $v(t)$ باشد. میخواهیم مطلب زیر را بطور مشروح نشان دهیم:



شکل ۴-۱- مدار خطی تغییرناپذیر با زمان

با ورودی i_s و پاسخ v

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

« پاسخ حالت صفر مدار خطی تغییرناپذیر با زمان RC موازی (که در شکل (۱-۱) دیده میشود) یک تابع خطی تحریک ورودی است، یعنی وابستگی شکل موج پاسخ حالت صفر به شکل موج تحریک ورودی دارای خاصیت‌های جمع‌پذیری و همگنی است ».

۱- نخست درجمع‌پذیری بررسی میکنیم. دو جریان ورودی i_1 و i_2 را که هر دو در لحظه t_0 وارد میشوند در نظر میگیریم. میدانیم که منظور از i_1 (و همچنین i_2) شکل موج جریانی است که در لحظه t_0 شروع شده و از آن پس ادامه می‌یابد. پاسخهای حالت صفر متناظر را v_1 و v_2 می‌نامیم. بموجب تعریف، v_1 جواب یکنای معادله دیفرانسیل زیر است:

$$(۱-۱) \quad C \frac{dv_1}{dt} + G v_1 = i_1(t) \quad t \geq t_0$$

با شرط

$$(۱-۲) \quad v_1(t_0) = 0$$

بطریقی مشابه، v_2 جواب یکنای معادله دیفرانسیل زیر است:

$$(۱-۳) \quad C \frac{dv_2}{dt} + G v_2 = i_2(t) \quad t \geq t_0$$

با شرط

$$(۱-۴) \quad v_2(t_0) = 0$$

از جمع معادله‌های (۱-۱) و (۱-۳)، و با در نظر گرفتن (۱-۲) و (۱-۴) می‌بینیم که تابع $v_1 + v_2$ معادلهٔ زیر را برمی‌آورد:

$$(۱-۵) \quad C \frac{d}{dt}(v_1 + v_2) + G(v_1 + v_2) = i_1(t) + i_2(t) \quad t \geq t_0$$

با شرط

$$(۱-۶) \quad v_1(t_0) + v_2(t_0) = 0$$

اکنون کوئیم که بموجب تعریف، پاسخ حالت صفر ورودی $i_1 + i_2$ ، که در لحظه $t = t_0$ وارد می‌شود جواب یکنای معادله دیفرانسیل زیر است:

$$(4-7) \quad C \frac{dy}{dt} + Gy = i_1(t) + i_2(t) \quad t \geq t_0$$

با شرط

$$(4-8) \quad y(t_0) = 0$$

با استفاده از قضیه یکتایی^(۱) در مورد جواب این معادله دیفرانسیل و با مقایسه (۴-۵) و (۴-۶) با (۴-۷) و (۴-۸) باین نتیجه میرسیم که شکل موج $v_1(0) + v_2(0)$ ، پاسخ حالت صفر شکل موج ورودی $i_1(0) + i_2(0)$ است و چون این استدلال برای «هر» ورودی دلخواه i_1 و i_2 که در «هر» لحظه دلخواه t_0 وارد شوند برقرار است، معلوم میشود که «پاسخ حالت صفر مدار RC تابعی از تحریک ورودی است که دارای خاصیت جمع پذیری است.»

۲- اکنون همگنی را بررسی میکنیم. تحریک ورودی i_1 (که در زمان t_0 وارد میشود) و تحریک ورودی ki_1 که در آن k ثابت حقیقی دلخواهی است را در نظر میگیریم. بموجب تعریف، پاسخ حالت صفر در اثر ورودی i_1 معادله های (۴-۱) و (۴-۲) را برمی آورد. بطریقی مشابه، پاسخ حالت صفر در اثر ورودی ki_1 معادله دیفرانسیل زیر را برمی آورد:

$$(4-9) \quad C \frac{dy}{dt} + Gy = ki_1(t) \quad t \geq t_0$$

با شرط

$$(4-10) \quad y(t_0) = 0$$

چون (۴-۱) و (۴-۲) را در «ثابت» k ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$(4-11) \quad C \frac{d}{dt} (kv_1) + G(kv_1) = ki_1(t) \quad t \geq 0$$

با شرط

$$(4-12) \quad kv_1(t_0) = 0$$

اگر این چهار معادله را با یکدیگر مقایسه کنیم، با استفاده از قضیه یکتایی جواب معادله های

دیفرانسیل معمولی، باین نتیجه می‌رسیم که پاسخ حالت صفر در اثر تحریک kz_1 برابر است با kz_1 ، و چون این استدلال برای «هر» شکل موج ورودی دلخواه $i_1(0)$ و «هر» زمان اولیه دلخواه t_0 و «هر» ثابت دلخواه k برقرار است، پس معلوم می‌شود که «پاسخ حالت صفر یک مدار RC تابعی از تحریک ورودی است که دارای خاصیت همگنی می‌باشد.»

بنا به تعریف تابع خطی، چون پاسخ حالت صفر، یک تابع جمع‌پذیر و همگن تحریک ورودی است، پس یک «تابع خطی» تحریک ورودی می‌باشد و در نتیجه گفته ما ثابت می‌شود.

«اپراتور $\mathcal{Z}_{t_0}$ » . میتوان خطی بودن پاسخ حالت صفر، را بطور سمبلیک^(۱) با تعریف اپراتور^(۲) $\mathcal{Z}_{t_0}$ بیان کرد. برای مدار RC که در شکل (۱-۴) دیده می‌شود، گیریم $\mathcal{Z}_{t_0}(i_s)$ نمایش «شکل موج» پاسخ حالت صفر مدار RC به ورودی شکل موج $i_s(0)$ باشد. زیرنویس t_0 در $\mathcal{Z}$ نمایش آنستکه در زمان t_0 مدار RC در حالت صفر بوده و ورودی در لحظه t_0 وارد شده است. پس معنای دقیق خطی بودن پاسخ حالت صفر چنین است:

۱- برای همه شکل موجهای ورودی $i_1(0)$ و $i_2(0)$ (که برای $t \geq t_0$ معین و برای $t < t_0$ متحد با صفر گرفته می‌شود) پاسخ حالت صفر برای ورودی $i_1(0) + i_2(0)$ برابر با مجموع پاسخ حالت صفر معلول ورودی $i_1(0)$ تنها و پاسخ حالت صفر معلول ورودی $i_2(0)$ تنها می‌باشد، یعنی:

$$\mathcal{Z}_{t_0}(i_1 + i_2) = \mathcal{Z}_{t_0}(i_1) + \mathcal{Z}_{t_0}(i_2) \quad (1-13)$$

۲- برای همه عددهای حقیقی α و برای همه شکل موجهای $i(0)$ ، پاسخ حالت صفر معلول ورودی $\alpha i(0)$ برابر است با α برابر پاسخ حالت صفر معلول ورودی $i(0)$ ، یعنی:

$$\mathcal{Z}_{t_0}(\alpha i) = \alpha \mathcal{Z}_{t_0}(i) \quad (1-14)$$

تبصره ۱- اگر خازن و مقاومت شکل (۱-۴) خطی و «تغییرپذیر با زمان» باشند،

برای $t \geq t_0$ معادله دیفرانسیل چنین خواهد بود :

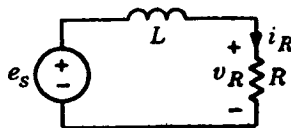
$$(10-4) \quad \frac{d}{dt} [C(t) v(t)] + G(t) v(t) = i_s(t)$$

پاسخ حالت صفر باز یک تابعی خطی تحریک ورودی می باشد . در واقع اثبات جمع پذیری و همگنی تنها مستلزم تغییر مختصر خواهد بود . این اثبات هنوز معتبر است زیرا :

$$\frac{d}{dt} [C(t) v_1(t)] + \frac{d}{dt} [C(t) v_2(t)] = \frac{d}{dt} \{ C(t) [v_1(t) + v_2(t)] \}$$

تبصره ۵-۲ - حقیقت زیر که ما آنرا تنها برای حالت خاص ثابت کردیم در حالت کلی نیز برقرار است . مدار دلخواهی را که شامل عنصرهای خطی (تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان) است در نظر میگیریم و فرض میکنیم که این مدار تنها بوسیله یک منبع ناهسته تحریک شود و جریان یا ولتاژ یک شاخه دلخواه آن پاسخ مورد نظر باشد . بدینسان پاسخ حالت صفر یک تابع خطی تحریک ورودی است . اثبات این نتیجه به تجزیه و تحلیل کلی شبکه ها وابسته است (که در فصل ششم خواهیم دید) . مثلاً مدار خطی RL که در شکل (۲-۴) نشان داده شده و تحریک ورودی آن منبع ولتاژ e_s و پاسخ آن جریان i_R است دارای این خاصیت می باشد که پاسخ حالت صفر آن $i_R(0)$ یک تابع خطی تحریک ورودی $e_s(0)$ می باشد .

تبصره ۵-۳ - از اثبات مدار ساده خطی RC که در بالا دیدیم باسانی معلوم میشود که « پاسخ کامل » یک تابع خطی تحریک ورودی « نیست » (مگر اینکه مدار از حالت صفر شروع نماید) . اکنون با تغییرات این موضوع بازگشته ملاحظه میکنیم که اگر مدار در حالت اولیه $V_0 \neq 0$ باشد ، یعنی در معادله (۲-۴) ، $v_1(t_0) = V_0$ و در معادله (۴-۴) ، $v_2(t_0) = V_0$ باشد در این صورت در معادله (۶-۴) ، $[v_1(t_0) + v_2(t_0)] = 2V_0$ خواهد بود



شکل ۲-۴ - مدار خطی RL با ورودی e_s و پاسخ i_R

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

که برابر ولتاژ اولیه نمی‌باشد. این نتیجه بار دیگر این نکته مهم را تأیید می‌کند که رابطهٔ ورودی و پاسخ یک مدار، بوسیله شرطهای اولیه توأم با معادله دیفرانسیل مشخص می‌شود. ما در فصل ششم نشان خواهیم داد که پاسخ کامل هر مدار خطی را میتوان صریحاً برحسب شکل موج ورودی و پاسخ ورودی صفر نوشت که در آن، عبارت اخیر تنها به شرطهای اولیه مدار بستگی دارد.

تمرین- منظور از این تمرین آنست که نشان دهیم اگر مداری شامل عناصر غیرخطی باشد پاسخ حالت صفر آن لزوماً یک تابع خطی تحریک ورودی نخواهد بود. بدین منظور مدار شکل (۲-۴) را در نظر گرفته و گیریم مقاومت آن غیرخطی بوده و مشخصه‌اش بصورت

$$v_R = a_1 i_R + a_2 i_R^2$$

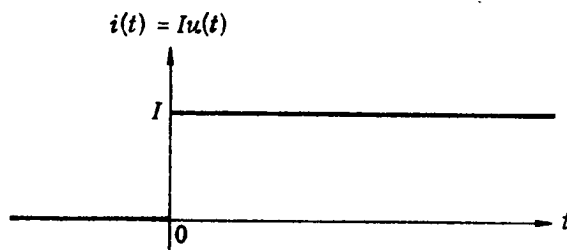
باشد که در آن a_1 و a_2 ثابت‌های مثبتی هستند. نشان دهید که ابراتور $\mathcal{Z}_{t_0}$ دارای خاصیت جمع‌پذیری نیست.

۵- خطی بودن و تغییر ناپذیری بازمان

ما در فصل دوم، عناصر مدار را برحسب خطی یا غیرخطی بودن، تغییرپذیری یا تغییر ناپذیری بازمان رده‌بندی نمودیم و در بخش پیش برای یک حالت ساده نشان دادیم که برای مدارهای خطی، پاسخ حالت صفر، یک تابع خطی تحریک ورودی است و گفتیم که این نتیجه برای مدارهای تغییرپذیر و تغییرناپذیر بازمان، هردو، برقرار است. در این بخش ما تفاوت میان پاسخهای یک مدار با عناصر تغییرناپذیر بازمان و مدار با عناصر تغییرپذیر با زمان را بررسی خواهیم کرد. این مطالعه از لحاظ درک اهمیت «تغییرناپذیری بازمان» برای ما بسیار سودمند خواهد بود.

۵-۱- پاسخ پله

تا اینجا ما هروقت منبع ناپسته‌ای را به مداری وصل کردیم کلیدی بکار بردیم تا نشان دهیم که در یک زمان معین $t=0$ ، کلید باز یا بسته شده و ورودی در مدار شروع به عمل مینماید. میتوان با بکار بردن یک تابع پله راه دیگری برای توصیف عمل وارد نمودن یک ورودی، که در زمان معینی مانند $t=0$ شروع می‌شود، عرضه نمود. مثلاً میتوان

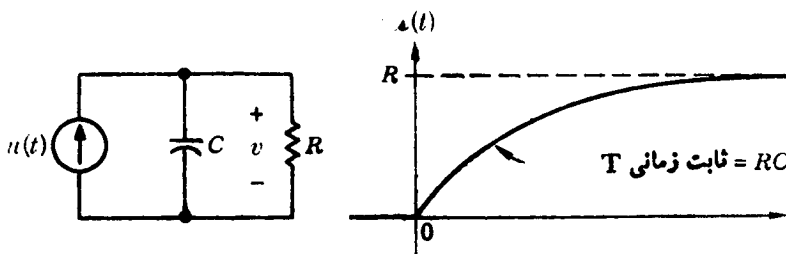


شکل ۵-۱- تابع پله با اندازه I

یک منبع جریان ثابت را که در لحظه $t=0$ وارد مدار میشود توسط منبع جریانی که بطور همیشگی به مدار وصل شده است (بدون کلید) و مطابق شکل (۵-۱) دارای شکل موج تابع پله میباشد نمایش داد. بنابراین برای $t < 0$ ، $i(t)=0$ ، برای $t > 0$ ، $i(t)=I$ و در $t=0$ جریان از صفر به I می جهد .

پاسخ حالت صفر یک مدار به ورودی پله واحد $u(0)$ ، پاسخ پله نامیده شده و با s نشان داده میشود . عبارت دقیقتر ، $s(t)$ پاسخ مدار در لحظه t است بشرطیکه :

(۱) ورودی آن تابع پله واحد $u(0)$ باشد . (۲) درست قبل از وارد کردن ورودی پله واحد ، مدار در حالت صفر باشد . همانطوریکه قبلاً گفته شد ، ما قرار داد $s(t)=0$ برای $t < 0$ را می پذیریم . برای مدار RC خطی تغییرناپذیر با زمان شکل (۵-۲) ، پاسخ پله برای همه t عبارتست از :



شکل ۵-۲- پاسخ پله یک مدار ساده RC

$$u(t) \leq 0$$

$$u(t) > 0$$

$$t \leq 0$$

$$t > 0$$

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

۱۷۸

$$s(t) = u(t) R \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \right)$$

توجه کنید که وجود $u(t)$ در معادله $(0-1)$ ، نشان دادن این را که نتیجه فوق، مانند حالات قبل، فقط برای $t \geq 0$ درست است غیر ضروری می‌سازد.

۵-۲- خاصیت تغییرناپذیری با زمان

در اینجا منظور ما تمرکز روی یک خاصیت اصلی مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان است. ابتدا با یک بحث حسی شروع کرده سپس به توصیف رسمی^(۱) خاصیت تغییرناپذیری با زمان می‌پردازیم.

یک مدار دلخواه خطی تغییرناپذیر با زمان که با یک منبع ناپسته تنها تحریک شده است را در نظر گرفته و یکی از متغیرهای شبکه را بعنوان پاسخ انتخاب کنید. مثلاً ممکن است که مدار RC موازی که قبلاً در نظر گرفته شده است را بکار برد. گیریم که ولتاژ v_0 پاسخ حالت صفر مدار به ورودی منبع جریان i_0 که در لحظه $t=0$ شروع می‌شود باشد. برحسب اپراتور $\mathcal{Z}_0$ داریم:

$$v_0 \triangleq \mathcal{Z}_0(i_0) \quad (2-5 \text{ الف})$$

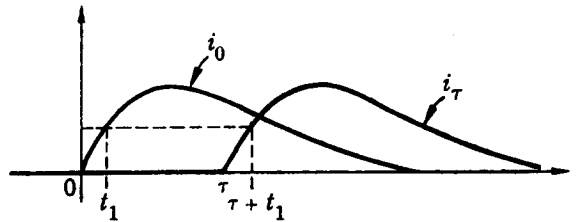
زیرنویس 0 اپراتور $\mathcal{Z}_0$ مخصوصاً نشان می‌دهد که لحظه شروع، $t=0$ می‌باشد. بنابراین v_0 جواب منحصر بفرد معادله دیفرانسیل زیر است:

$$C \frac{dv_0}{dt} + Gv_0 = i_0(t) \quad t \geq 0 \quad (2-5 \text{ ب})$$

با شرط

$$v_0(0) = 0 \quad (2-5 \text{ پ})$$

در حال $(2-5 \text{ ب})$ و $(2-5 \text{ پ})$ ما فقط به $t \geq 0$ علاقه‌مندیم. با قرارداد قبلی فرض می‌کنیم که برای $t < 0$ ، $i_0(t) = 0$ و $v_0(t) = 0$ باشد. حال فرض کنید که بدون تغییر دادن فرم شکل موج $i_0(\cdot)$ آنرا بطور افقی انتقال دهیم تا اینکه در زمان τ



شکل ۳-۵- شکل موج i_τ نتیجه انتقال شکل موج i_0 بمقدار τ ثانیه است

شروع کند، $\tau \geq 0$ (به شکل ۳-۵ مراجعه شود). منحنی حاصل، تابع جدید $i_\tau(0)$ را تعریف میکند که زیرنویس τ نشان دهنده زمان شروع جدید است. از روی منحنی واضح است که عرض i_τ در زمان $\tau + t_1$ برابر عرض i_0 در زمان t_1 میباشد و چون t_1 اختیاری است بنابراین:

$$i_\tau(\tau + t_1) = i_0(t_1) \quad \text{برای همه } t_1$$

و اگر $t = \tau + t_1$ قرار دهیم بدست می آوریم:

$$(۳-۵) \quad i_\tau(t) = \begin{cases} i_0(t - \tau) & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases}$$

حال v_τ ، پاسخ مدار RC به ورودی i_τ را در نظر گیرید، با فرض اینکه در زمان صفر، مدار در حالت صفر است، داریم:

$$(۴-۵ الف) \quad v_\tau \triangleq \mathcal{Z}_0(i_\tau)$$

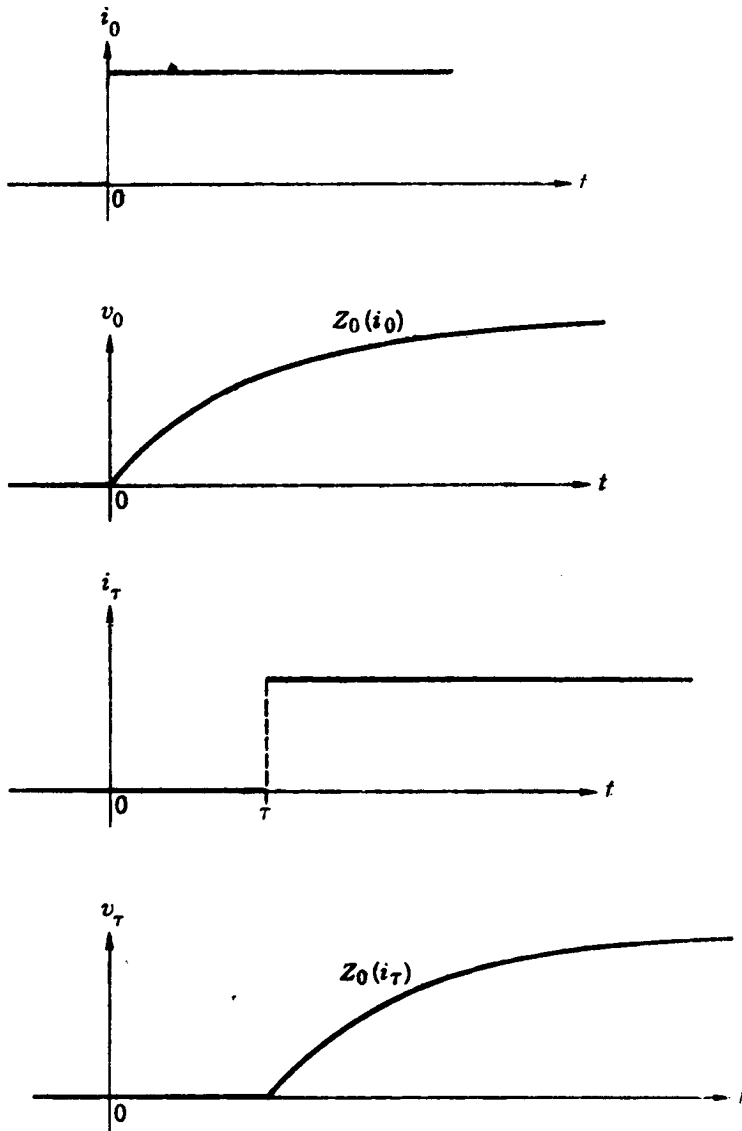
بعبارت دقیقتر، v_τ پاسخ منحصر بفرد معادله زیر است:

$$(۴-۵ ب) \quad C \frac{d}{dt} v_\tau(t) + G v_\tau(t) = i_\tau(t) \quad t \geq 0$$

با شرط

$$(۴-۵ پ) \quad v_\tau(0) = 0$$

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها



شکل ۴-۵- تشریح خاصیت تغییرناپذیری بازمان

بطور حسی، ما انتظار داریم که شکل موج v_τ همان شکل موج v_0 باشد که بمقدار τ انتقال داده شده است. در واقع چون مدار تغییرناپذیر با زمان است پاسخ آن به i_τ که در زمان τ وارد شده است، بجز یک انتقال زمانی، برابر پاسخ آن به i_0 که در زمان $t=0$ وارد شده است خواهد بود. این حقیقت در شکل (۴-۵) نشان داده شده است. برای دانشجویانی که علاقمند به استدلال مشروح باشند، اثبات زیر را در دوره بعد بیان میکنیم:

۱- v_τ در فاصله $(0, \tau)$ بطور متحد مساوی صفر است، در واقع $v_\tau \equiv 0$ ، برای $0 \leq t \leq \tau$ در معادله (۴-۵) ب (ب) علت اینکه در این فاصله $i_\tau \equiv 0$ و در شرط اولیه (۴-۵) ب) صدق میکند. چون در فاصله $0 \leq t \leq \tau$ ، $v_\tau \equiv 0$ است از اینجا نتیجه میشود:

$$v_\tau(\tau) = 0 \quad (5-5)$$

۲- حال v_τ را برای $t \geq \tau$ باید تعیین نمود. برای این کار معادله (۵-۵) را بعنوان شرط اولیه بکار برده و اظهار میکنیم که شکل موج حاصل از انتقال v_0 بمقدار τ برای $t \geq \tau$ در معادلات (۴-۵) ب) و (۵-۵) صدق میکند. برای اثبات این مطلب تحقیق میکنیم تابع y که بصورت $y(t) \triangleq v_0(t-\tau)$ تعریف میشود، برای $t \geq \tau$ در معادله دیفرانسیل (۴-۵) ب) و شرط اولیه (۵-۵) صدق میکند.

با عوض کردن t با $t-\tau$ در معادله (۲-۵) ب) به دست می آوریم که:

$$C \frac{d}{dt} [v_0(t-\tau)] + G v_0(t-\tau) = i_0(t-\tau) = i_\tau(t) \quad t \geq \tau \quad (6-5 \text{ الف})$$

و یا طبق تعریف:

$$C \frac{d}{dt} [y(t)] + G y(t) = i_\tau(t) \quad t \geq \tau \quad (6-5 \text{ ب})$$

که دقیقاً همان معادله (۴-۵) ب) برای $t \geq \tau$ میباشد. واضح است که شرایط اولیه نیز برقرار است زیرا:

$$y(\tau) \triangleq v_0(t-\tau) \Big|_{t=\tau} = v_0(0) = 0$$

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

بعبارت دیگر تابع $y(t) \triangleq v_0(t-\tau)$ برای $t \geq \tau$ در معادلهٔ دیفرانسیل (۴-۵) و شرط اولیه (۵-۵) صدق میکند. این حقیقت، توأم با $v_\tau = 0$ در فاصلهٔ $[0, \tau]$ لازم می‌دارد که «شکل موج v_0 که بمقدار τ تغییر مکان داده باشد برابر $Z_0(i_\tau)$ ، یعنی پاسخ حالت صفر به ورودی i_τ ، می‌باشد.

مثال- اگر $i_0(t) = Iu(t)$ باشد در این صورت:

$$v_0(t) = u(t) RI \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \text{برای همه } t$$

و پاسخ حالت صفر برای $i_\tau(t) = i_0(t-\tau) = Iu(t-\tau)$ مساوی است با:

$$v_\tau(t) = u(t-\tau) RI \left(1 - e^{-\frac{(t-\tau)}{RC}}\right) \quad \text{برای همه } t$$

تبصره ۹- استدلال گفته شده در بالا به مقدار خاص $\tau \geq 0$ و به فرم شکل موج ورودی i_0 بستگی ندارد. بعبارت دیگر برای همه $\tau \geq 0$ و همه i_0 ، $Z_0(i_\tau)$ عیناً مساوی $Z_0(i_0)$ است که بمقدار τ انتقال داده شده است. این حقیقت را «خاصیت تغییرناپذیری با زمان» مدار خطی تغییرناپذیر با زمان RC نامند.

تبصره ۱۰- مشاهده این موضوع بسیار حائز اهمیت است که، در بحث اینکه معادله (۶-۵) در واقع همان معادله (۲-۵) است که در آن $t-\tau$ بجای t جایگزین شده بود، از ثابت بودن مقادیر C و G استفاده کردیم.

۳-۵- اپراتور انتقال

میتوان مفهوم تغییرناپذیری با زمان را با بکار بردن «اپراتور انتقال» دقیقاً بیان نمود. گیریم که $f(\cdot)$ شکل موج دلخواهی باشد که برای همه t تعریف شده است و T_τ اپراتوری باشد که وقتی روی f عمل میکند شکل موجی یکسان ولی انتقال یافته بمقدار

τ بوجود می‌آورد. شکل موج انتقال یافته را $f_\tau(\cdot)$ نامیده و عرضهای آن بوسیله رابطه زیر داده میشوند:

$$f_\tau(t) = f(t - \tau) \quad \text{برای همه } t$$

بعبارت دیگر، نتیجه بکار بردن اپراتور T_τ روی شکل موج f ، شکل موج جدیدی است که با f با T_τ نشان داده می‌شود، بقسمی که در هر زمان t مقدار شکل موج جدید، که با $(T_\tau f)(t)$ نشان داده می‌شود، توسط رابطه زیر به مقادیر f مربوط میشود:

$$(T_\tau f)(t) = f(t - \tau) \quad \text{برای همه } t$$

در طرز نمایش بحث قبلی داشتیم $f_\tau = T_\tau f$. اپراتور T_τ را اپراتور انتقال^(۱) نامند. حقیقت اینکه اپراتور انتقال یک اپراتور خطی است بسیار حائز اهمیت است. در واقع این اپراتور دارای خاصیت جمع پذیری است و بنابراین:

$$T_\tau(f+g) = T_\tau f + T_\tau g$$

یعنی نتیجه انتقال $f+g$ مساوی مجموع انتقال یافته f و انتقال یافته g است. این اپراتور همگن نیز میباشد. اگر α یک عدد حقیقی دلخواه و f یک شکل موج اختیاری باشد:

$$T_\tau[\alpha f] = \alpha T_\tau f$$

یعنی اگر شکل موج f را در عدد α ضرب کرده نتیجه را انتقال دهیم، همان شکل موجی را بدست می‌آوریم که ابتدا f را انتقال داده سپس آنرا در α ضرب کنیم.

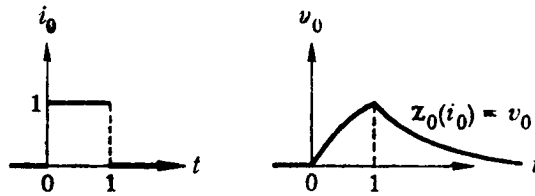
حال اپراتور انتقال را برای بیان خاصیت تغییرناپذیری با زمان بکار می‌بریم. مانند قبل، گیریم $\mathcal{Z}_0(i_0)$ پاسخ مداری که در زمان صفر در حالت صفر است به ورودی i_0 باشد. قبلاً $v_0(t)$ برای نشان دادن مقدار پاسخ حالت صفر در زمان t بکار رفته بود [بمعادله (۲-ه الف) مراجعه شود]. دلیل اینکه حالا $\mathcal{Z}_0(i_0)$ بکار می‌رود تأکید وابستگی پاسخ حالت صفر به تمامی شکل موج ورودی $i_0(\cdot)$ و همچنین تأکید زمانی است که مدار در حالت صفر میباشد. بخاطر نگهداشتن اینکه $\mathcal{Z}_0(i_0)$ تمامی شکل موج است نه فقط مقدار آن در زمان t ، حائز اهمیت است. با این طرز نمایش میتوان خاصیت تغییرناپذیری بازمان

راکه در بالا نشان داده شد بصورت زیر نوشت :

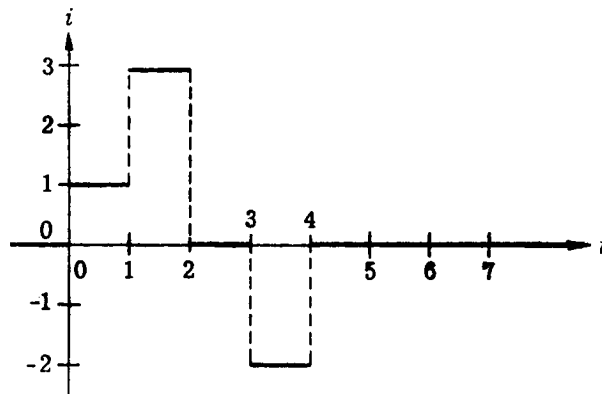
برای همه ورودی‌های i_0 و همه $\tau \geq 0$ $T_\tau[Z_0(i_0)] = Z_0[T_\tau i_0]$ (۷-۵)
 گرچه رابطه (۷-۵) را فقط برای یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان که شامل یک مقاومت و خازن موازی است ثابت کردیم ، این مطلب ، در واقع ، در مورد « هر » مدار خطی تغییرناپذیر با زمان و برای « هر » ورودی i و « هر » مقدار $\tau \geq 0$ معتبر است . معادله (۷-۵) خاصیت تغییرناپذیری با زمان مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان را بیان میدارد . این رابطه در بدست آوردن نمایش کانولوشن^(۱) پاسخ حالت صفر در فصل ششم نقش اساسی خواهد داشت .

تبصره ۵- میتوان خاصیت تغییرناپذیری با زمان را که در رابطه (۷-۵) بیان شد بدین ترتیب تعبیر نمود که اپراتورهای T_τ و Z_0 « جابجایی پذیرند »^(۲)، یعنی ترتیب اثر دادن دو عامل هیچ تفاوتی نمی کند . گرچه شما عملیات زیادی که جابجایی پذیرند دیده اید (جمع اعداد حقیقی ، جمع ماتریس ها وغیره) ، عملهای زیادی هم وجود دارند که جابجایی پذیر نیستند (مثلاً ضرب ماتریسهای $n \times n$) . این حقیقت که برای مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان اپراتورهای T_τ و Z_0 جابجایی پذیرند بسیار قابل ملاحظه است ، زیرا در بسیاری از موارد اگر ترتیب دو عمل با هم تعویض شود نتایج حاصل بطور فاحشی متفاوت میگردد . مثلاً اگر (۱) هفت تیری را پر کرده و (۲) آنرا نزدیک شقیقه خود قرار داده و ماشهٔ آنرا بکشیم ، نتیجه حاصل از نتیجهٔ آنکه عمل (۲) را قبل از عمل (۱) انجام دهیم بطور فاحشی متفاوت خواهد بود !

مثال - برای تشریح نتیجه خطی بودن و تغییرناپذیری با زمان مثالی بیان میکنیم . مدار خطی تغییرناپذیر با زمان دلخواهی را در نظر گرفته فرض کنید که پاسخ حالت صفر v_0 به پالس ورودی i_0 را مطابق شکل (۵-۵) اندازه گیری نموده و شکل موج v_0 را ثبت کرده ایم . با بکار بردن طرز نمایش قبلی این بدین معنی است که $v_0 = Z_0(i_0)$. مسأله ، تعیین پاسخ حالت صفر v به ورودی i نشان داده شده در شکل (۵-۶) میباشد که که در آن :



شکل ۵-۵- جریان i_0 و پاسخ حالت صفر v_0 متناظر با آن

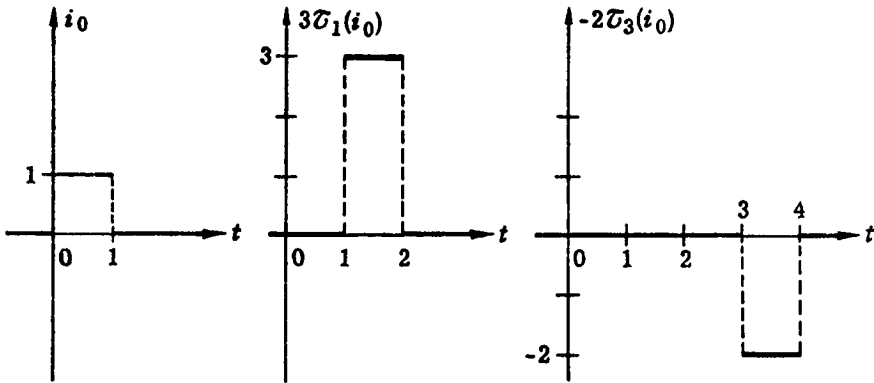


شکل ۵-۶- ورودی $i(t)$

$$i(t) = \begin{cases} 1 & \text{برای } 0 < t \leq 1 \\ 3 & \text{برای } 1 < t \leq 2 \\ 0 & \text{برای } 2 < t \leq 3 \\ -2 & \text{برای } 3 < t \leq 4 \\ 0 & \text{برای } t > 4 \end{cases}$$

مشاهده قابل توجه اینست که ورودی داده شده را میتوان بصورت ترکیب خطی i_0 و مضربهایی از i_0 که بطور زمانی انتقال یافته اند نمایش داد. این عمل در شکل (۷ - ۵) نشان داده شده است. مجموع سه تابع نشان داده شده مساوی i است. از منحنی های i و i_0 واضح است که :

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

شکل ۷-۵- تجزیه i بر حسب پالسهای انتقال یافته

$$i = i_0 + {}_rT_1(i_0) - {}_rT_r(i_0)$$

پاسخ حالت صفر در اثر ورودی i را v نامیده و داریم :

$$v = \mathcal{Z}_0(i)$$

$$= \mathcal{Z}_0[i_0 + {}_rT_1(i_0) - {}_rT_r(i_0)]$$

از خطی بودن پاسخ حالت صفر بدست می‌آوریم که :

$$v = \mathcal{Z}_0(i_0) + {}_r\mathcal{Z}_0[T_1(i_0)] - {}_r\mathcal{Z}_0[T_r(i_0)]$$

و از خاصیت تغییرناپذیری با زمان داریم :

$$v = \mathcal{Z}_0(i_0) + {}_rT_1[\mathcal{Z}_0(i_0)] - {}_rT_r[\mathcal{Z}_0(i_0)]$$

و چون $v_0 = \mathcal{Z}_0(i_0)$ پس داریم :

$$v = v_0 + {}_rT_1[v_0] - {}_rT_r[v_0]$$

و یا :

$$v(t) = v_0(t) + {}_rv_0(t-1) - {}_rv_0(t-2) \quad \text{برای } t \geq 0$$

تبصره - روشی که برای محاسبه v برحسب v_0 بکار رفت معمولاً به روش «اصل جمع آثار»^(۱) معروف است. توجه به این مطلب بسیار اهمیت دارد که ما باید از خاصیت تغییرناپذیری با زمان و این حقیقت که پاسخ حالت صفر یک «تابع خطی» ورودی است کمک بگیریم.

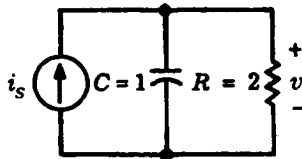
تمرین - مدار آشنای خطی تغییرناپذیر با زمان RC نشان داده شده در شکل (۸ - الف) که در آن i_1 ورودی و v پاسخ میباشد را در نظر بگیرید.

الف: پاسخ حالت صفر به ورودی‌های زیر را محاسبه و رسم کنید:

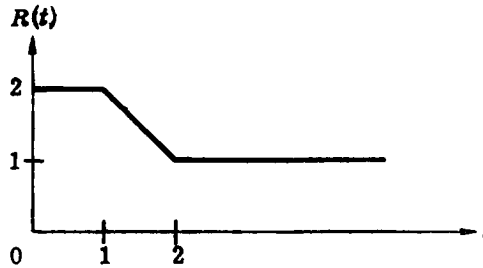
$$i_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq 0.5 \text{ برای} \\ 0 & 0.5 < t \text{ برای} \end{cases}$$

$$i_2(t) = \begin{cases} 2 & 0 < t \leq 0.5 \text{ برای} \\ 0 & 0.5 < t \leq 2 \text{ برای} \\ -0.5 & 2 < t \leq 2.5 \text{ برای} \\ 0 & 2.5 < t \text{ برای} \end{cases}$$

ب: حال فرض کنید که مقاومت تغییرپذیر با زمان ولی هنوز خطی باشد و مقاومت آن بصورت تابعی از زمان مطابق شکل (۸ - ب) باشد. فرض کنید که میخواهیم پاسخ این مدار را به ورودی i_2 حساب کنیم، آیا هنوز میتوان روش بحث قبلی را بکار برد؟ اگر جواب منفی است دلیلش را بطور خلاصه ذکر کنید.



(الف)



(ب)

شکل ۸-۵- (الف) یک مدار خطی ساده RC

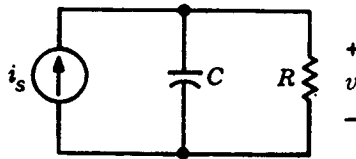
(ب) مشخصه مقاومت تغییرپذیر

بازمان

۶- پاسخ ضربه

پاسخ حالت صفر یک مدار تغییرناپذیر بازمان را بیک ضربه «واحد» که در $t=0$ وارد شده است پاسخ ضربه مدار گفته با h نشان میدهند. به عبارت دقیقتر، $h(t)$ پاسخ مدار در زمان t است بشرطیکه (۱) ورودی آن ضربه واحد δ باشد و (۲) درست قبل از وارد نمودن ضربه، مدار در «حالت صفر» باشد. برای راحتی فرمولهای بعدی h را برای $t < 0$ مساوی صفر تعریف می‌کنیم. از آنجائیکه محاسبهٔ پاسخ ضربه برای مهندسين برق اهمیت بسیار زیادی دارد، سه روش برای محاسبهٔ آن ارائه خواهد شد.

«روش اول» در اینجا با تقریب، تابع پالس p_{Δ} را جایگزین تابع ضربه می‌نمائیم. برای بدست آوردن آشنایی اولیه با پاسخ ضربه، پاسخ ضربه مدار RC موازی نشان داده شده در شکل (۶-۱) را محاسبه می‌کنیم. ورودی مدار منبع جریان i_s و پاسخ، ولتاژ خروجی v میباشد. چون، بنا به تعریف، پاسخ ضربه حالت صفر به ورودی δ میباشد، پس پاسخ ضربه جواب معادله دیفرانسیل زیر است:



شکل ۶-۱- مدار خطی تغییرناپذیر با زمان RC

$$(۶-۱) \quad C \frac{dv}{dt} + Gv = \delta(t)$$

با شرط

$$(۶-۲) \quad v(0-) = 0$$

که در آن علامت $0-$ درست لحظه قبل از $t=0$ را نشان می‌دهد.

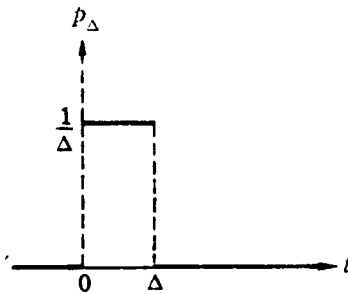
بعلت وجود تابع ضربه درست راست معادله (۶-۱) لازم است که بین $0+$ و $0-$ تمایزی قائل شد. در لحظه $t=0$ ، جریان بی‌نهایت زیادی در فاصله زمانی بی‌نهایت کوچکی وارد مدار می‌شود. این وضعیت، مشابه توپ گلفی است که در روی زدن گاه قرار گرفته است و در لحظه $t=0$ بوسیله چوگان زده می‌شود. واضح است که تمیز دادن سرعت توپ در لحظه $0-$ ، یعنی درست قبل از اینکه توپ زده شود، از سرعت آن در لحظه $0+$ ، یعنی درست بعد از اینکه توپ زده می‌شود، اهمیت بسیار زیادی دارد.

معادله (۶-۲) بیان می‌دارد که مدار، درست قبل از وارد کردن ورودی، در حالت صفر است. در حل معادله (۶-۱)، با مشکلاتی مواجه می‌شویم، زیرا وقتی دقیق‌تر صحبت کنیم δ یک تابع ریاضی «نیست». از اینرو، جواب را با جایگزین نمودن تقریبی ضربه واحد δ با تابع پالس p_{Δ} و محاسبه جواب حاصل و میل دادن $0 \rightarrow \Delta$ بدست خواهیم آورد. بخاطر بیاورید که p_{Δ} بصورت زیر تعریف شده است:

$$p_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 & \text{برای} \\ \frac{1}{\Delta} & 0 < t < \Delta & \text{برای} \\ 0 & \Delta < t & \text{برای} \end{cases}$$

و در شکل (۶-۲) رسم شده است. قدم اول بدست آوردن h_{Δ} ، یعنی پاسخ حالت صفرمدار

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

شکل ۶-۲- تابع پالس $p_{\Delta}(\cdot)$

RC به ورودی p_{Δ} می‌باشد که در آن Δ خیلی کوچکتر از ثابت زمانی RC انتخاب می‌شود. شکل موج h_{Δ} جواب معادله دیفرانسیل زیر است:

$$(۶-۲ الف) \quad C \frac{dh_{\Delta}}{dt} + \frac{1}{R} h_{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \quad 0 < t < \Delta$$

$$(۶-۲ ب) \quad C \frac{dh_{\Delta}}{dt} + \frac{1}{R} h_{\Delta} = 0 \quad t > \Delta$$

با شرط $h_{\Delta}(0) = 0$. واضح است که $\frac{1}{\Delta}$ مقدار ثابتی می‌باشد و بنابراین از (۶-۲ الف) داریم:

$$(۶-۲ الف) \quad h_{\Delta}(t) = \frac{R}{\Delta} (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad 0 < t < \Delta$$

و این پاسخ حالت صفر به ورودی پله $\frac{1}{\Delta} u(t)$ می‌باشد. از (۶-۲ ب)، برای $t > \Delta$ ، پاسخ ورودی صفر است که در $t = \Delta$ از $h_{\Delta}(\Delta)$ شروع می‌کند. بنابراین:

$$(۶-۲ ب) \quad h_{\Delta}(t) = h_{\Delta}(\Delta) e^{-\frac{t-\Delta}{RC}} \quad t > \Delta$$

پاسخ کامل h_{Δ} از روی (۶-۲ الف) و (۶-۲ ب) در شکل (۶-۲ الف) نشان داده شده است. از (۶-۲ الف) داریم:

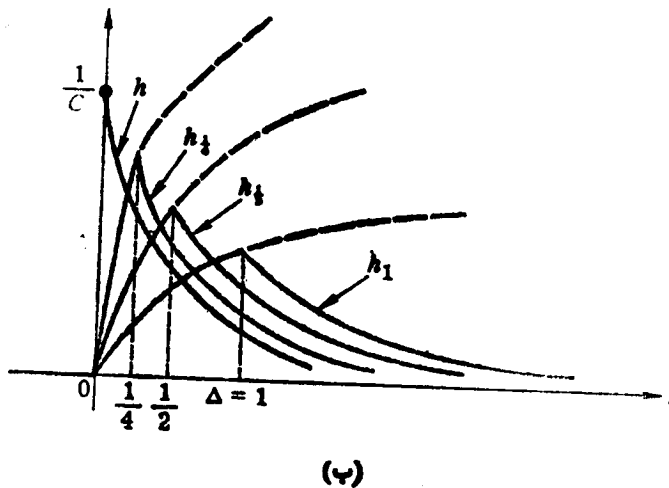
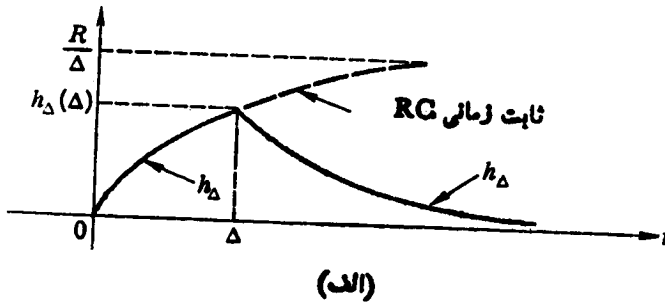
$$h_{\Delta}(\Delta) = \frac{R}{\Delta} (1 - e^{-\frac{\Delta}{RC}})$$

و چون Δ خیلی کوچکتر از RC میباشد، با بکار بردن بسط :

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

بست می آوریم :

$$\begin{aligned} h_{\Delta}(\Delta) &= \frac{R}{\Delta} \left[\frac{\Delta}{RC} - \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta}{RC} \right)^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{C} \left[1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta}{RC} \right) + \dots \right] \end{aligned}$$



شکل ۳-۶- (الف) پاسخ حالت صفر p_{Δ}

(ب) پاسخها وقتی که $\Delta \rightarrow 0$

بطریق مشابه، برای مقادیر خیلی کوچک Δ و $0 < t < \Delta$ ، بابت تابع نمایی در (۶-۴ الف) بدست می‌آید که :

$$h_{\Delta}(t) = \frac{1}{C} \frac{t}{\Delta} + \dots \quad 0 < t < \Delta$$

توجه کنید که شیب منحنی h_{Δ} درفاصله $(0, \Delta)$ برابر $\frac{1}{C\Delta}$ میباشد. و چون Δ کوچک است این شیب خیلی زیاد است. و قتیکه $\Delta \rightarrow 0$ شیب منحنی h_{Δ} درفاصله $(0, \Delta)$ تند و تندتر گشته و $h_{\Delta}(\Delta) \rightarrow \frac{1}{C}$ ، و درحد، h_{Δ} در لحظه $t=0$ از صفر به $\frac{1}{C}$ می‌جهد. برای $t > 0$ از (۶-۴ ب) بدست می‌آوریم که :

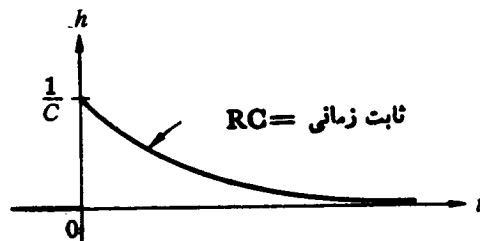
$$h_{\Delta}(t) \rightarrow -\frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}}$$

و قتیکه Δ بسمت صفر میل میکند، h_{Δ} مطابق شکل (۶-۳ ب) بسمت پاسخ ضربه h میل میکند. با بغاظر آوردن قرارداد اینکه برای $t < 0$ ، $h(t)$ را مساوی صفر قرار میدهیم میتوان نوشت :

$$h(t) = u(t) \frac{1}{C} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{برای همه } t \quad (۶-۵)$$

پاسخ ضربه h در شکل (۶-۴) نشان داده شده است.

محاسبهٔ h بطریق بالا دو تبصره زیر را لازم میدارد :



شکل ۶-۴- پاسخ ضربه مدار RC شکل (۶-۱)

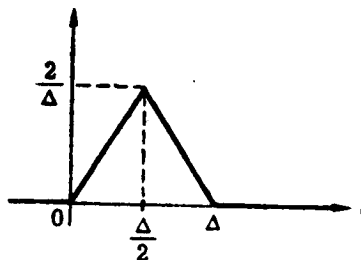
تبصره ۱- منظور ما از مساحت پاسخ ضربه به طریق فوق، نشان دادن این حقیقت است که این روش، یک روش بسیار سراسری می باشد که فقط احتیاج به جایگزین نمودن تقریبی δ با یک پالس مناسب، که در اینجا p_{Δ} است، دارد. تنها شرایطی که p_{Δ} باید در آن صدق کند اینست که در بیرون فاصله $(0, \Delta)$ مساوی صفر بوده و مساحت زیر p_{Δ} مساوی واحد باشد، یعنی:

$$\int_0^{\Delta} p_{\Delta}(t) dt = 1$$

واضح است که شکل p_{Δ} در بدست آوردن پاسخ هیچگونه اثری ندارد و بنابراین ما شکلی را انتخاب میکنیم که حداقل کار را لازم داشته باشد. البته می توانستیم پالس مثلی نشان داده شده در شکل (۵-۶) را اختیار کنیم. توجه کنید که دامنه حداکثر پالس مثلی در اینجا مساوی $\frac{2}{\Delta}$ می باشد. برقراری چنین شرطی برای اینکه مساحت زیر پالس برای همه $\Delta > 0$ مساوی واحد باشد لازم است.

تبصره ۲- چون برای $t > 0$ ، $\delta(t) = 0$ است (یعنی برای $t > 0$ ورودی بطور متعادل برابر صفر است)، نتیجه می شود که برای $t > 0$ پاسخ ضربه $h(t)$ همانند یک پاسخ ورودی صفر خاص می باشد. ما این موضوع را بعداً بکار خواهیم برد.

« رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله » حال می خواهیم یک رابطه بسیار مهم میان پاسخ پله و پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان بدست آوریم، عبارت دقیقتر، می خواهیم صحت مطلب زیر را نشان دهیم:



شکل ۵-۶- میتوان یک پالس مثلی را نیز برای تقریب نمودن ضربه بکار برد.

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

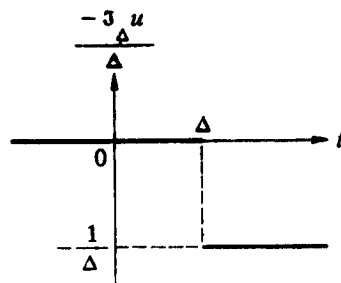
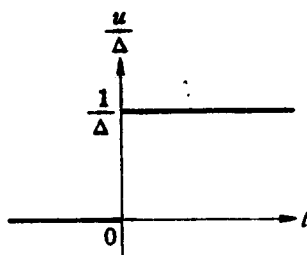
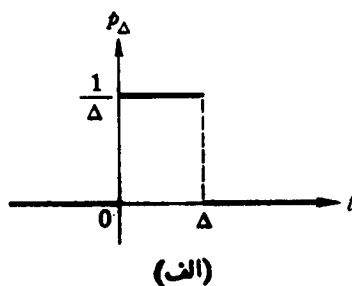
« پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان مشتق زمانی پاسخ پله آن است . »
 بطورسمبلیک :

$$(۶-۶) \quad h = \frac{ds}{dt} \quad \text{با بطورمعادل} \quad s(t) = \int_{-\infty}^t h(t') dt'$$

ما این عبارت مهم را با جایگزین نمودن تقریبی ضربه با تابع پالس p_{Δ} ثابت میکنیم . گیریم که h_{Δ} پاسخ حالت صفر به ورودی p_{Δ} باشد ، یعنی :

$$h_{\Delta} \triangleq \mathcal{Z}_0(p_{\Delta})$$

وقتیکه $\Delta \rightarrow 0$ ، تابع پالس p_{Δ} به سمت ضربه واحد δ میل کرده و h_{Δ} ، پاسخ حالت صفر به ورودی پالس p_{Δ} ، به سمت پاسخ ضربه h میل می نماید . حال p_{Δ} را بصورت مجموع



شکل ۶-۶- تابع پالس p_{Δ} شکل (الف) را میتوان بعنوان مجموع

تابع پله شکل (ب) و تابع پله تأخیردار شکل (پ)

در نظر گرفت

یک تابع پله و یک تابع پله تأخیردار مطابق شکل (۶-۶) در نظر میگیریم. بنابراین:

$$p_{\Delta} = \frac{1}{\Delta} [u(t) - u(t - \Delta)] = \frac{1}{\Delta} u + \frac{-1}{\Delta} T_{\Delta} u$$

از خطی بودن پاسخ حالت صفر داریم:

$$\begin{aligned} (6-7) \quad Z_0(p_{\Delta}) &= Z_0\left(\frac{1}{\Delta} u + \frac{-1}{\Delta} T_{\Delta} u\right) \\ &= \frac{1}{\Delta} Z_0(u) + \frac{-1}{\Delta} Z_0(T_{\Delta} u) \end{aligned}$$

چون مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان است اپراتورهای Z_0 و T_{Δ} جابجایی پذیرند و بنابراین:

$$(6-8) \quad Z_0(T_{\Delta} u) = T_{\Delta} Z_0(u)$$

گیریم که پاسخ پله را بصورت زیر نشان دهیم:

$$s \triangleq Z_0(u)$$

میتوان معادلات (۶-۷) و (۶-۸) را با هم ترکیب نموده و بدست آورد که:

$$h_{\Delta} \triangleq Z_0(p_{\Delta}) = \frac{1}{\Delta} s - \frac{1}{\Delta} T_{\Delta} s$$

و یا:

$$\begin{aligned} h_{\Delta}(t) &= \frac{1}{\Delta} s(t) - \frac{1}{\Delta} s(t - \Delta) \\ &= \frac{s(t) - s(t - \Delta)}{\Delta} \quad \text{برای همه } t \end{aligned}$$

حال وقتی که $\Delta \rightarrow 0$ ، عبارت سمت راست بصورت مشتق درمی آید و بنابراین:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} h_{\Delta}(t) = h(t) = \frac{ds}{dt}$$

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

تبصره - دو معادله (۶ - ۶) برای مدارهای خطی «تغییرپذیر با زمان» معتبر نیست، و نباید هم چنین انتظاری داشت زیرا که تغییرناپذیری با زمان در یک مرحله اساسی از اثبات این معادلات بکار رفت. بنابراین، برای مدارهای خطی «تغییرپذیر با زمان» مشتق زمانی پاسخ پله، پاسخ ضربه را بدست «نمیدهد».

«روش دوم» در این روش $h = \frac{ds}{dt}$ را بکار می‌بریم. مدار RC موازی شکل (۶-۱) را دوباره در نظر گرفته بخاطر آورد که s ، پاسخ پله آن بصورت زیر میباشد:

$$s(t) = u(t) R \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \right)$$

اگر ما سمت راست را بصورت حاصلضرب دو تابع در نظر گرفته وقاعده مشتق گیری:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

را بکار بریم پاسخ ضربه را بدست می‌آوریم:

$$h(t) = \delta(t) R \left(1 - e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} \right) + \frac{1}{C} u(t) e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}$$

جمله اول بطور متحد برابر صفر است، زیرا برای $t \neq 0$ ، $\delta(t) = 0$ و برای $t = 0$ ،

$$1 - e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t} = 0$$

است. و بنابراین داریم:

$$h(t) = \frac{1}{C} u(t) e^{-\left(\frac{1}{RC}\right)t}$$

البته این نتیجه با نتیجه بدست آمده قبلی (۵ - ۶) یکسان است.

«روش سوم» در این روش مستقیماً معادله دیفرانسیل را بکار برده نشان می‌دهیم که تابع h که بصورت زیر تعریف میشود:

$$h(t) = \frac{1}{C} u(t) e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{برای همه } t$$

جواب معادله دیفرانسیل زیر است :

$$(۶-۹) \quad C \frac{d}{dt}(v) + Gv = \delta \quad v(0-) = 0 \quad \text{با شرط}$$

برای اینکه تعصبی باین حالت نداشته باشیم جواب معادله (۶-۹) را y نامیده و نشان می‌دهیم که $y = h$ است. چون برای $t > 0$ ، $\delta(t) = 0$ می‌باشد و y جواب معادله (۶-۹) است، باید داشته باشیم :

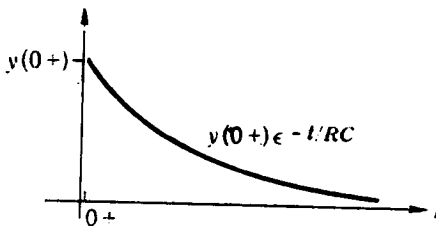
$$(۶-۱۰) \quad y(t) = y(0+) e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{برای } t > 0$$

و این در شکل (۶-۷ الف) نشان داده شده است. همچنین چون برای $t < 0$ ، $\delta(t) = 0$ است و در زمان 0 مدار در حالت صفر می‌باشد، باید داشته باشیم :

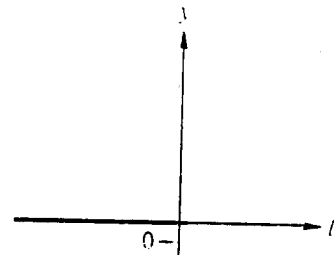
$$(۶-۱۱) \quad y(t) = 0 \quad \text{برای } t < 0$$

و این در شکل (۶-۷ ب) نشان داده شده است. از ترکیب (۶-۱۰) و (۶-۱۱) نتیجه می‌گیریم که :

$$(۶-۱۲) \quad y(t) = u(t) y(0+) e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{برای همه } t$$



(الف)



(ب)

شکل ۶-۷- پاسخ ضربه برای مدار RC موازی، (الف) - $y(t)$

برای $t > 0$ (ب) - $y(t)$ برای $t < 0$.

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

حال باید $y(0+)$ ، یعنی مقدار جهش منحنی y در $t=0$ ، محاسبه گردد . در این محاسبه از مطلب معلوم زیر استفاده میکنیم :

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

با بکار بردن رابطه (۱۲ - ۶) و در نظر گرفتن سمت راست آن بصورت حاصلضرب دو تابع بدست می‌آوریم که :

$$\frac{dy}{dt}(t) = \delta(t)y(0+)e^{-\frac{t}{RC}} + u(t)y(0+) \frac{-1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

در جمله اول ، چون $\delta(t)$ در همه جا بجز $t=0$ صفر است میتوان در جمله‌ای که در $\delta(t)$ ضرب میشود t را مساوی صفر قرار داد و بنابراین نوشت :

$$\frac{dy}{dt}(t) = \delta(t)y(0+) + u(t)y(0+) \frac{-1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$$

با جایگزینی در (۹ - ۶) بدست می‌آوریم که :

$$\delta(t)Cy(0+) - u(t)y(0+)Ge^{-\frac{t}{RC}} + Gu(t)y(0+)e^{-\frac{t}{RC}} = \delta(t)$$

پس از حذف جملات مشابه ، تنها جمله‌ای که درست چپ باقی میماند مساوی است با $\delta(t)Cy(0+)$ ، و چون این جمله باید با عبارت $\delta(t)$ سمت راست معادل باشد، بدست می‌آید که $Cy(0+) = 1$ ، عبارت معادل :

$$y(0+) = \frac{1}{C}$$

با گذاشتن مقدار $y(0+)$ در (۱۲ - ۶) نتیجه میگیریم که جواب (۹ - ۶) در واقع همان h ، یعنی پاسخ ضربه که قبلاً محاسبه شده است میباشد .

تبصره- در بالا نشان دادیم که برای $t > 0$ جواب معادله دیفرانسیل :

$$C \frac{d}{dt}(v) + Gv = 0 \quad v(0-) = 0 \quad \text{با شرط}$$

با جواب معادله دیفرانسیل زیر یکسان است :

$$(۱-۱۲) \quad C \frac{d}{dt}(v) + Gv = 0 \quad v(0+) = \frac{1}{C} \quad \text{با شرط}$$

برای $t > 0$. این موضوع را میتوان با انتگرال گیری دوطرف رابطه (۱-۹) از $t=0-$ تا $t=0+$ مشاهده نموده و بدست آورد که :

$$Cv(0+) - Cv(0-) + G \int_{0-}^{0+} v(t') dt' = 1$$

و چون v پایاندار^(۱) است :

$$G \int_{0-}^{0+} v(t') dt' = 0$$

میباشد . همچنین چون $v(0-) = 0$ ، پس از اینجا بدست میآوریم که :

$$v(0+) = \frac{1}{C}$$

در معادله (۱-۱۲) اثر ضربه در زمان $t=0$ با در نظر گرفتن شرط اولیه در زمان $t=0+$ منظور شده است .

۲۳۵

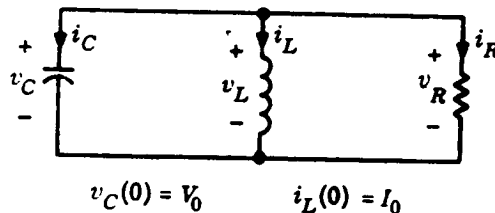
فصل پنجم

مدارهای مرتبه دوم

در فصل چهارم مدارهای الکتریکی مرتبه اول را مفصلاً مطالعه کردیم و با مدارهای خطی و غیر خطی هردو مواجه شدیم. ما مدارهای خطی را مطالعه کرده و پاسخ کامل، پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر آنها را محاسبه نمودیم. همچنین ثابت کردیم که برای مدارهای خطی، پاسخ ورودی صفر، تابع خطی حالت اولیه و پاسخ حالت صفر تابع خطی ورودی است. این حقایق برای شبکه‌های خطی عمومی معتبر بوده و در فصل سیزدهم اثبات خواهند شد. در این فصل مدارهای مرتبه دوم را مطالعه خواهیم کرد. برای تشریح محاسبه پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر، از یک مدار ساده موازی RLC (مقاومت - سلف - خازن) استفاده خواهیم کرد. همچنین با روش جدیدی برای توصیف یک مدار بنام روش فضای حالت^(۱) مواجه خواهیم شد. این روش را نه تنها در مدارهای خطی، بلکه در مدارهای غیر خطی نیز بکار خواهیم برد.

۱- مدار RLC خطی تغییر ناپذیر با زمان، پاسخ ورودی صفر

در شکل (۱-۱) یک اتصال موازی از سه عنصر پسیو^(۲) خطی تغییر ناپذیر با زمان داریم که عبارت از یک مقاومت، یک سلف و یک خازن میباشند. معادلات شاخه‌های آنها چنین است،



شکل ۱-۱- مدار RLC موازی، هر سه جزء خطی، تغییر ناپذیر با زمان و پسیو هستند

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$v_R = Ri_R \quad \text{یا} \quad i_R = Gv_R \quad (۱-۱) \text{ الف}$$

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad i_L(0) = I_0 \quad \text{یا} \quad i_L(t) = I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t v_L(t') dt' \quad (۱-۱) \text{ ب}$$

$$v_C(t) = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t') dt' \quad \text{یا} \quad i_C = C \frac{dv_C}{dt}, \quad v_C(0) = V_0 \quad (۱-۱) \text{ پ}$$

که در آن C, L, G, R مقادیر «مثبت» بوده و بترتیب نمایشگر مقاومت، رسانایی، اندوکتانس و ظرفیت میباشند. I_0 نشان دهنده جریان اولیه در داخل سلف و V_0 نمایشگر ولتاژ اولیه در دوسرخازن است. $i_C, i_L, i_R, v_C, v_L, v_R$ شش متغیر شبکه میباشند. از KVL داریم:

$$v_C = v_R = v_L \quad (۱-۲)$$

و از KCL داریم:

$$i_C + i_R + i_L = 0 \quad (۱-۳)$$

رویه‌مرفته شش معادله داریم، سه معادله در (۱-۱)، دو معادله در (۱-۲) و یک معادله در (۱-۳). بنابراین میتوان انتظار داشت که شش متغیر مجهول شبکه را بتوان بطور یکتا تعیین نمود. در حقیقت توسعه درسی ما نشان خواهد داد که آنها واقعاً بطور یکتا تعیین میشوند.

مسئله مورد نظر اینست که مناسب‌ترین متغیر را انتخاب کرده و راحت‌ترین معادله را برحسب آن متغیر بنویسیم و برحسب آن متغیر حل کنیم، و سپس پنج متغیر باقی‌مانده را محاسبه نماییم. یک راه حل مسئله اینست که ولتاژ خازن v_C را بعنوان مناسب‌ترین متغیر انتخاب کنیم. با استفاده از معادلات (۱-۱) تا (۱-۳)، معادله انتگرال-دیفرانسیل^(۱) زیر را برحسب متغیر v_C بدست می‌آوریم:

$$(۱-۴) \quad C \frac{dv_C}{dt} + Gv_C + I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t v_C(t') dt' = 0$$

و :

$$(۱-۵) \quad v_C(0) = V_0$$

هرگاه ولتاژ v_C بدست آید ، پنج متغیر دیگر شبکه را میتوان از معادلات (۱-۱) و (۱-۲) بدست آورد . راه حل دیگر مسأله اینست که جریان سلف i_L بعنوان متغیر انتخاب شود . اگر معادلات شاخه را برای خازن و مقاومت بکار بریم ، از معادله (۱-۳) بدست میاوریم :

$$C \frac{dv_C}{dt} + Gv_R + i_L = 0$$

چون در (۱-۲) ، $v_C = v_R = v_L$ است ، معادله بالا باینصورت درمیآید :

$$(۱-۶) \quad C \frac{dv_L}{dt} + Gv_L + i_L = 0$$

حال معادله شاخه درمورد سلف را بکار میبریم تا معادله دیفرانسیل مرتبه دوم زیر که در آن i_L بعنوان متغیر وابسته است بدست آید :

$$(۱-۷) \quad LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + GL \frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

شرایط اولیه لازم چنین است :

$$(۱-۸) \quad i_L(0) = I_0$$

و :

$$(۱-۹) \quad \frac{di_L}{dt}(0) = \frac{v_L(0)}{L} = \frac{v_C(0)}{L} = \frac{V_0}{L}$$

معادله دیفرانسیل (۱-۷) با شرایط اولیه (۱-۸) و (۱-۹) دارای جواب منحصر بفرد i_L است . هرگاه جریان i_L بدست آید ، میتوان پنج متغیر دیگر شبکه را از معادلات (۱-۱) و (۱-۲) بدست آورد . گیریم برای حل i_L از معادلات (۱-۷) تا (۱-۹) شروع کنیم . چون

نظریه^۱ اساسی مدارها و شبکه‌ها

هیچ منبعی مدار را تحریک نمی‌کند، پاسخ i_L ، «پاسخ ورودی صفر» است. برای راحتی عملیات، فرض کنید دو پارامتر α و ω_0 بصورت زیر تعریف شوند:

$$\alpha \triangleq \frac{G}{2C} \quad \omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1-10)$$

پارامتر α ثابت میرایی^(۱) و پارامتر ω_0 (برحسب رادیان برثانیه) فرکانس (زاویه‌ای) تشدید^(۲) نامیده می‌شود. $\omega_0 = 2\pi f_0$ است که در آن f_0 (برحسب هرتز) فرکانس تشدید سلف و خازن است. دو پارامتر α و ω_0 رفتار مدار RLC را مشخص می‌کنند. با تقسیم معادله (۱-۷) به LC بدست می‌آید:

$$(1-11) \quad \boxed{\frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0}$$

این یک معادله دیفرانسیل همگن مرتبه دوم با ضرایب ثابت است. «چند جمله‌ای مشخصه» این معادله دیفرانسیل چنین است:

$$(1-12) \quad s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$$

صفرهای چند جمله‌ای مشخصه، ریشه‌های مشخصه و یا عبارت بهتر «فرکانس‌های طبیعی مدار» نامیده می‌شوند. این ریشه‌ها عبارتند از:

$$(1-13) \quad \left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \begin{cases} -\alpha + \alpha_d \\ -\alpha - \alpha_d \end{cases} \quad \text{که در آن:}$$

$$\alpha_d \triangleq \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

شکل پاسخ ورودی صفر مدار به مقادیر نسبی α و ω_0 بستگی دارد. برحسب مقادیر نسبی α و ω_0 میتوان پاسخ ورودی صفر را به چهار حالت طبقه بندی کرد:

۱- Damping Constant

۲- Resonant Frequency

۳- Hertz

۲۳۹

مدارهای مرتبه دوم

میرای شدید^(۱)، میرای بحرانی^(۲)، میرای ضعیف^(۳) و بی اتلاف^(۴). سه حالت اول، شکل موجهای $i_L(t)$ را که بصورت نمایی میرا هستند بوجود آورده درحالیکه حالت آخری متناظر با یک شکل موج سینوسی است.

۱- میرای شدید ($\alpha > \omega_0$). فرکانسهای طبیعی s_1 و s_2 هردو «حقیقی و منفی» هستند و پاسخ، مجموع دو تابع نمایی میرا است:

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} \quad (1-14)$$

که در آن ثابتهای k_1 و k_2 به شرایط اولیه بستگی دارند.

۲- میرای بحرانی ($\alpha = \omega_0$). دو فرکانس طبیعی مساوی و حقیقی میباشند، یعنی $s_1 = s_2 = -\alpha$ پاسخ چنین است:

$$i_L(t) = (k + k' t) e^{-\alpha t} \quad (1-15)$$

که در آن ثابتهای k و k' به شرایط اولیه بستگی دارند.

۳- میرای ضعیف ($\alpha < \omega_0$). دو فرکانس طبیعی مزدوج مختلط^(۵) هستند $s_1 = -\alpha + j\omega_d$ و $s_2 = -\alpha - j\omega_d$ که در آن $\omega_d^2 \triangleq \omega_0^2 - \alpha^2$. پاسخ باین شکل است:

$$i_L(t) = k e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta) \quad (1-16)$$

که در آن k و θ ثابتهای حقیقی هستند که بشرایط اولیه بستگی دارند. یک نمونه از شکل موج $i_L(t)$ در شکل (۱-۲) نشان داده شده است که در آن منحنیهای نمایی کم رنگ، منحنیهای پوش^(۶) نامیده میشوند. توجه کنید که دامنه نوکهای^(۷) شکل موج طبق پوشهای نمایی میرا کاهش مییابند.

۴- بی اتلاف ($\alpha = 0$) و بنابراین ($G = 0$). هردو فرکانس طبیعی انگاری^(۸) هستند ($s_1 = j\omega_0$ ، $s_2 = -j\omega_0$). پاسخ چنین است:

۱- Overdamped

۲- Critically damped

۳- Underdamped

۴- Lossless

۵- Complex Conjugate

۶- Envelope

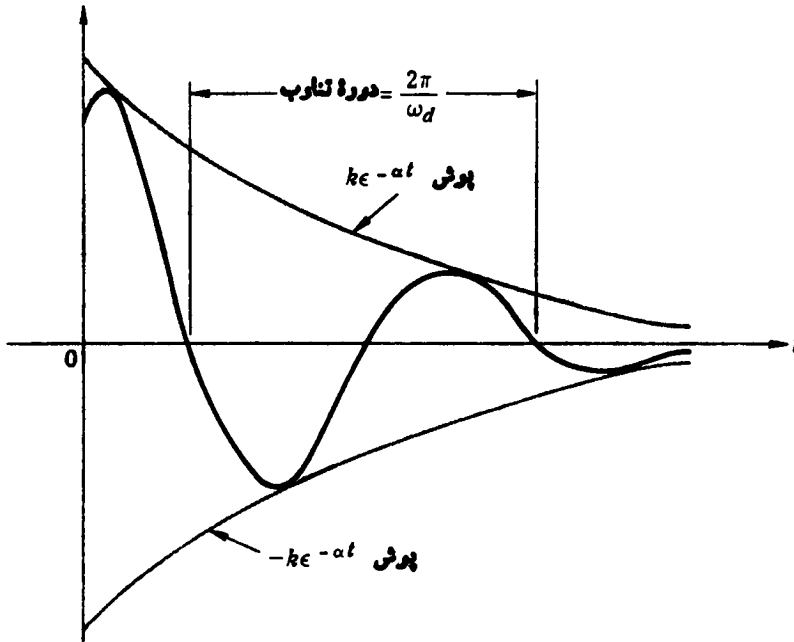
۷- Peak

۸- Imaginary

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$i_L(t) = k \cos(\omega_0 t + \theta) \quad (1-17)$$

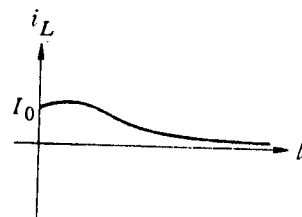
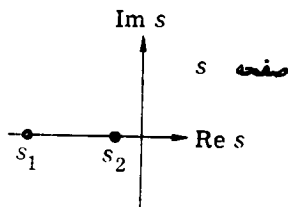
که در آن k و θ ثابت‌های حقیقی هستند که بشرایط اولیه بستگی دارند.



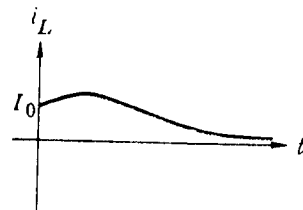
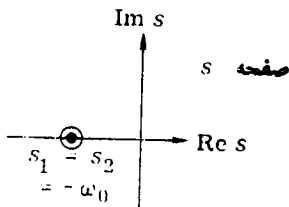
شکل ۲-۹- شکل موج $i_L(0)$ برای حالت میرای ضعیف ($\alpha < \omega_0$) مدار RLC موازی.

میتوان براحتی با جایگزینی مستقیم نشان داد که معادلات (۱-۱۴) تا (۱-۱۷) جواب کلی معادله دیفرانسیل همگن (۱-۱۱) میباشند. در هر مورد، دو ثابت دلخواه از شرایط اولیه داده شده در معادلات (۱-۸) و (۱-۹) تعیین میشوند. محاسبه ثابت‌های دلخواه از شرایط اولیه داده شده سراسر است میباید.

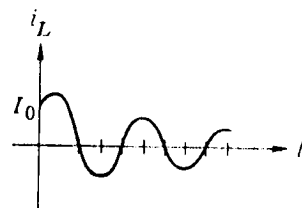
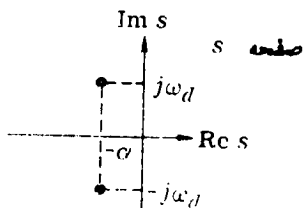
میتوان چهار حالت فوق را برحسب فرکانس‌های طبیعی، یعنی برحسب دو ریشه s_1 و s_2 معادله مشخصه معادله دیفرانسیل نیز طبقه‌بندی کرد. چون فرکانس‌های طبیعی میتوانند حقیقی، مختلط و یا انگاری باشند، نشان دادن آنها در صفحه مختلط موسوم به «صفحه فرکانس مختلط»^(۱) آموخته است. در صفحه فرکانس مختلط (صفحه s) محور افقی نمایشگر جزء حقیقی و محور عمودی نشان دهنده جزء انگاری میباشد. چهار



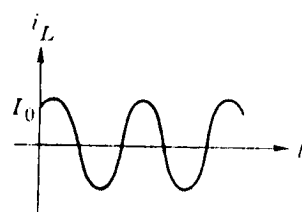
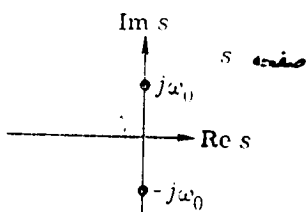
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

- شکل ۳-۱ = پاسخ‌های ورودی صفر مدار RLC موازی که برحسب محل قرارگرفتن فرکانس‌های طبیعی درست‌چپ و شکل موجها در طرف راست طبقه‌بندی شده‌اند.
- (الف) میرای شدید ($\alpha > \omega_0$) . (ب) میرای بحرانی ($\alpha = \omega_0$) .
- (پ) میرای ضعیف ($\alpha < \omega_0$) . (ت) بی‌اتلاف ($\alpha = 0$) .

۲۴۲

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

حالت در شکل (۱-۳) تشریح شده‌اند، که در آن محل فرکانس‌های طبیعی در صفحه s ، درست چپ نشان داده شده و شکل موج $i_L(0)$ متناظر در سمت راست رسم شده است. اهمیت صفحه فرکانس مختلط، وقتی که تبدیل لاپلاس^(۱) در فصل سیزدهم معرفی می‌شود روشن‌تر خواهد شد. معه‌ذا اکنون بایستی تشخیص داد که محل فرکانس‌های طبیعی در صفحه فرکانس مختلط شکل پاسخ را تعیین می‌کند.

تمرین - جواب معادله دیفرانسیل همگن (۱-۱۱) برای حالت میرای ضعیف را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

که در آن s_1 ، s_2 ، k_1 و k_2 اعداد مختلط هستند و:

$$s_2 = \overline{s_1} = -\alpha - j\omega_d \quad k_2 = \overline{k_1}$$

تیره‌های (۲) بالای حروف نمایشگر مزدوج مختلط می‌باشند. معادله (۱-۱۶) را از این جواب بدست آورید و نشان دهید که:

$$k = 2|k_1| \quad \text{و} \quad \theta = \angle k_1$$

«محاسبه ثابت‌های دلخواه» - فرض کنید حالت میرای شدید را در نظر بگیریم.

جریان i_L بوسیله معادله (۱-۱۴) باینصورت داده می‌شود:

$$i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

می‌خواهیم ثابت‌های k_1 و k_2 را از شرایط اولیه مشخص شده در معادلات (۱-۸) و (۱-۹) تعیین کنیم. با محاسبه $i_L(t)$ در (۱-۱۴) در لحظه $t=0$ بدست می‌آوریم:

$$(1-18) \quad i_L(0) = k_1 + k_2 = I_0$$

با مشتق‌گیری از (۱-۱۴) و محاسبه مشتق در لحظه $t=0$ ، بدست می‌آوریم:

$$(1-19) \quad \frac{di_L(t)}{dt} (0) = k_1 s_1 + k_2 s_2 = \frac{V_0}{L}$$

مدارهای مرتبه دوم

۲۴۳

اگر معادلات (۱-۱۸) و (۱-۱۹) را برحسب k_1 و k_2 حل کنیم بدست میاوریم :

$$(1-20) \quad k_1 = \frac{1}{s_1 - s_2} \left(\frac{V_0}{L} - s_2 I_0 \right)$$

و :

$$(1-21) \quad k_2 = \frac{1}{s_2 - s_1} \left(\frac{V_0}{L} - s_1 I_0 \right)$$

با جایگذاری k_1 و k_2 در (۱-۱۴)، یک عبارت کلی برای شکل موج جریان $i_L(0)$ برحسب «حالت اولیه» مدار، یعنی جریان اولیه I_0 در سلف و ولتاژ اولیه V_0 در دوسر خازن بدست میاوریم. بنابراین :

(۱-۲۲)

$$i_L(t) = \frac{V_0}{(s_1 - s_2)L} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) + \frac{I_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_2 t} - s_2 e^{s_1 t})$$

ولتاژ v_C دوسر خازن را میتوان از روی i_L حساب کرد زیرا $v_C = v_L$ و $v_L = L \frac{di_L}{dt}$ ، بنابراین :

$$(1-23) \quad v_C(t) = \frac{V_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) + \frac{LI_0 s_1 s_2}{s_1 - s_2} (e^{s_2 t} - e^{s_1 t})$$

بطریق مشابه ، میتوان برای حالت میرای ضعیف ، جریان سلف و ولتاژ خازن را بصورت زیر بدست آورد :

$$(1-24) \quad i_L(t) = \frac{V_0}{\omega_d L} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + I_0 e^{-\alpha t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t \right)$$

$$(1-25) \quad v_C(t) = V_0 e^{-\alpha t} \left(\cos \omega_d t - \frac{\alpha}{\omega_d} \sin \omega_d t \right) - \frac{L\omega_d^2}{\omega_d} I_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

تمرین ۱- فرمولهای (۱-۲۴) و (۱-۲۵) را ثابت کنید.

تمرین ۲- ثابت کنید که برای حالت بی اتلاف ، جریان سلف و ولتاژ خازن

بصورت زیر داده میشوند:

نظریه^{*} اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$(۱-۲۶) \quad i_L(t) = \frac{V_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t + I_0 \cos \omega_0 t$$

$$(۱-۲۷) \quad v_C(t) = V_0 \cos \omega_0 t - \omega_0 L I_0 \sin \omega_0 t$$

تمرین ۳- اگر $I_0 = ۱$ آمپر و $V_0 = ۱$ ولت باشد، برای هریک از مدارهای RLC موازی زیر پاسخ‌های حالت صفر را تعیین و شکل موجهای $i_L(0)$ و $v_C(0)$ آنها را نسبت به t رسم کنید:

الف - $R = ۱$ اهم ، $L = ۱$ هانری و $C = ۱$ فاراد

ب - $R = ۱$ اهم ، $L = ۴$ هانری و $C = \frac{1}{4}$ فاراد

پ - $R = \infty$ ، $L = ۴$ هانری و $C = ۱$ فاراد

بایستی بخاطر داشت که حالت بی‌اتلاف در واقع یک حالت حدی، حالت میرای ضعیف است و اگر R بسمت بینهایت میل کند، $(\alpha = 0)$ ، نوسان میرا تبدیل به نوسان سینوسی با فرکانس زاویه‌یی ω_0 میگردد.

«انرژی و ضریب Q » - بخاطر بیاورید که حالت اولیه بوسیله جریان اولیه I_0 در سلف و ولتاژ اولیه V_0 دوسرخازن در لحظه $t=0$ داده میشود. بنابراین، انرژی ذخیره شده اولیه مساوی مجموع $\frac{1}{2} L I_0^2$ (در میدان مغناطیسی) و $\frac{1}{2} C V_0^2$ (در میدان الکتریکی) میباشد. فرض کنید حالت میرای ضعیف را در نظر بگیریم. با گذشت زمان انرژی از خازن به سلف و از سلف به خازن انتقال می‌یابد و ضمن این نوسان، قسمتی از این انرژی بصورت حرارت در مقاومت تلف میشود. بنابراین انرژی کلی که در میدان مغناطیسی و میدان الکتریکی باقی میماند بتدریج از بین میرود. برای $R = \infty$ ، جریان داخل مقاومت همیشه صفر بوده و هیچ اتلاف انرژی وجود ندارد و بنابراین یک نوسان مداوم^(۱) خواهیم داشت.

توجه کنید که پارامتر ω_0 به فرکانس نوسان میرا، $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ ، ارتباط

دارد، درحالیکه پارامتر α شدت میرایی نمایی را تعیین میکند. میرایی نسبی دریک نوسان میرا اغلب بوسیله یک عدد Q که بصورت زیر تعریف میشود مشخص میگردد:

$$(۲۸-۱) \quad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

میتوان Q را بعنوان «ضریب کیفیت»^(۱) یک مدار تشدید فیزیکی در نظر گرفت. هر قدر میرایی کمتر باشد Q بزرگتر خواهد بود. توجه کنید که در مدار RLC موازی، برای «کاهش» میرایی لازم است که مقاومت را «افزایش» دهیم. یک مدار تشدید بی اتلاف دارای میرایی صفر یا Q بینهایت میباشد. در فصل هفتم نشان خواهیم داد که میتوان Q را به نسبت انرژی ذخیره شده و توان تلف شده در هر سیکلی ارتباط داد. چهار حالتی را که مطالعه کردیم میتوان برحسب مقدار Q نیز طبقه بندی نمود. در حالت میرای شدید، $Q > \frac{1}{2}$ ، در حالت میرای بحرانی، $Q = \frac{1}{2}$ ، در حالت میرای ضعیف، $Q < \frac{1}{2}$ و در حالت بی اتلاف $Q = \infty$ است. در شکل (۱-۴) مقادیر Q به محل های فرکانس های طبیعی در چهار حالت ارتباط داده شده اند.

حالت بی اتلاف ($\alpha = 0$ ، $R = \infty$ و $Q = \infty$) یک حالت ایده آل است، زیرا یک سلف فیزیکی همیشه دارای مقداری اتلاف میباشد. بنابراین در مدارهای «پسیو» عملی نمیتوان $Q = \infty$ ، پیدا کرد و این بدان معنی است که بدست آوردن نوسان سینوسی، ناشی از حالت اولیه تنها در واقع غیر ممکن است. در بخش ۴ نشان خواهیم داد که اگر علاوه بر L و C دارای اتلاف، بعضی از عناصر اکتیو نیز در مدار بکار برده شود، یک نوسان مداوم بدست خواهد آمد.

تمرین در مدارهای فشرده عملی، Q هایی با مقدار چندین صد قابل دسترس است. برای بدست آوردن احساسی از معنای Q فرض کنید که $Q \gg 1$ باشد. ثابت کنید که دامنه نوسان میرا، پس از Q پریود به ۳٪ درصد مقدار اولیه خود میرسد.

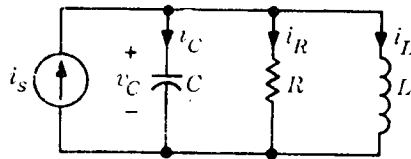
$$\text{تشديد فرکانس} \quad s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2 = 0$$

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ را ثابت نگاهداشته و Q تغییر میکند. این متناظر با مداری است که L و C در آن ثابت مانده و R تغییر میکند.

۲- مدار RLC خطی تغییر ناپذیر با زمان ، پاسخ حالت صفر

مطالعه مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان را ادامه میدهیم تا طرز محاسبه و خواص «پاسخ حالت صفر» را تشریح کنیم. بنابراین، درحالتی هستیم که در آن شرایط اولیه همه صفر بوده و ورودی بطور متحد مساوی صفر نیست. در بخش قبل ورودی بطور متحد مساوی صفر بود ولی شرایط اولیه همگی مساوی صفر نبودند.

در واقع منظور از پاسخ حالت صفر، پاسخ مدار به یک ورودی اعمال شده در یک زمان دلخواه t_0 میباشد، بشرط اینکه مدار در t_0- در حالت صفر باشد. علت اینکه بجای t_0 ، t_0- گفته میشود اینست که تأکید کنیم، شرایط اولیه (جریان داخل سلف و



شکل ۱-۲- مدار RLC موازی با ورودی منبع جریان

ولتاژ دو سر خازن) درست قبل از اعمال ورودی صفر میباشند .

برای مدار شکل (۱-۲) از KCL چنین بدست میاید :

$$(۱-۲) \quad i_C + i_R + i_L = i_s$$

با تکرار همان روش بخش ۱ ، معادله مدار را برحسب جریان سلف i_L بدست میاوریم، بنابراین :

$$(۲-۲) \quad LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + LG \frac{di_L}{dt} + i_L = i_s(t) \quad t \geq 0$$

و :

$$(۲-۳) \quad i_L(0_-) = 0$$

$$(۲-۴) \quad \frac{di_L}{dt}(0_-) = \frac{v_C(0_-)}{L} = 0$$

سه معادله فوق متناظر با معادلات (۷-۱) ، (۸-۱) و (۹-۱) بخش قبلی است . تفاوت آنها در این است که قبلاً " ورودی صفر بود و شرایط اولیه غیر صفر بودند درحالیکه اکنون تابع ورودی ، همانطور که در (۲-۲) دید، میشود $i_s(t)$ بوده و همه شرایط اولیه چنانکه در (۲-۳) و (۲-۴) داده شده است صفر هستند . بخاطر بیاورید که جواب معادله دیفرانسیل خطی نا همگن با ضرایب ثابت مجموع دو جمله است ، یعنی :

$$(۲-۵) \quad i_L = i_h + i_p$$

که در آن i_h یک جواب معادله دیفرانسیل همگن ، یعنی جواب معادله (۲-۲) با $i_s = 0$ بوده و i_p یک جواب خاص معادله دیفرانسیل نا همگن میباشد . درمسأله ما ، i_h در بخش قبل محاسبه شده است زیرا همان پاسخ ورودی صفر است و بخاطر دارید که شامل دو ثابت دلخواه میباشد . بجز حالت میرای بحرانی ، میتوان i_h را بصورت زیر نوشت :

نظریه^۹ اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$(۲-۶) \quad i_h = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

البته اگر فرکانس‌های طبیعی مختلط باشند، در آن صورت :

$$(۲-۷) \quad s_2 = \overline{s_1} = -\alpha - j\omega_d \quad \text{و} \quad k_2 = \overline{k_1}$$

و میتوان i_h را بصورت زیر نیز نوشت :

$$(۲-۸) \quad i_h = 2|k_1|e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \angle k_1)$$

از طرف دیگر، i_p به ورودی بستگی دارد. چنانچه ورودی یک تابع پله باشد، راحت‌تر است که i_p بصورت یک ثابت انتخاب شود و اگر ورودی یک سینوسی باشد، راحت‌تر است که i_p بصورت یک سینوسی انتخاب گردد.

در بقیه این بخش، تنها پاسخ پله و پاسخ ضربه را حساب خواهیم کرد. محاسبه پاسخ حالت صفر برای یک ورودی سینوسی در فصل هفتم و برای ورودی‌های دلخواه در فصل ششم داده خواهد شد.

یک خاصیت مهم پاسخ حالت صفر یک مدار خطی آنست که این پاسخ تابع خطی ورودی است. ما به اثبات این مطلب نخواهیم پرداخت چونکه آن مشابه مدارهای مرتبه اول میباشد که در فصل چهارم داده شده است.

۲-۱- پاسخ پله

میخواهیم پاسخ پله مدار RLC موازی نشان داده شده در شکل (۲-۱) را محاسبه کنیم. بموجب تعریف، ورودی یک پله واحد بوده و شرایط اولیه صفر میباشند. بنابراین از معادلات (۲-۲) تا (۲-۴) داریم :

$$(۲-۹) \quad LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + LG \frac{di_L}{dt} + i_L = u(t)$$

$$(۲-۱۰) \quad i_L(0) = 0$$

$$(۲-۱۱) \quad \frac{di_L}{dt}(0) = 0^+$$

+ چون در معادله (۲-۹) ضربه وجود ندارد، لازم نیست که بین 0_+ و 0_- تمایزی قایل شویم.

۲۴۹

مدارهای مرتبه دوم

راحت‌ترین جواب خاص معادله (۲-۹) چنین است :

$$(۲-۱۲) \quad i_p(t) = 1 \quad t \geq 0 \quad \text{برای}$$

بنابراین، چنانچه فرکانس‌های طبیعی متمایز باشند، جواب کلی بصورت زیر خواهد بود:

$$(۲-۱۳) \quad i_L(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + 1$$

و چنانکه فرکانس‌های طبیعی مساوی هم باشند، جواب کلی باینصورت است :

$$(۲-۱۴) \quad i_L(t) = (k + k't) e^{-\alpha t} + 1$$

اکنون با استفاده از شرایط اولیه (۲-۱۰) و (۲-۱۱) ثابت‌های k_1 و k_2 در معادله (۲-۱۳) را تعیین میکنیم. در زمان $t=0$ از معادلات (۲-۱۰) و (۲-۱۳) نتیجه میشود :

$$(۲-۱۵) \quad i_L(0) = k_1 + k_2 + 1 = 0$$

با مشتق‌گیری از (۲-۱۳) و محاسبه مشتق در $t=0$ بدست میاید :

$$(۲-۱۶) \quad \frac{di_L}{dt}(0) = k_1 s_1 + k_2 s_2 = 0$$

از حل دو معادله فوق برحسب k_1 و k_2 داریم :

$$(۲-۱۷) \quad k_1 = \frac{s_2}{s_1 - s_2} \quad \text{و} \quad k_2 = \frac{-s_1}{s_1 - s_2}$$

بنابراین پاسخ پله واحد چنین است :

$$(۲-۱۸) \quad i_L(t) = \left[\frac{1}{s_1 - s_2} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) + 1 \right] u(t)$$

فرکانس‌های طبیعی در حالت میرای ضعیف مختلط هستند، بنابراین :

$$\left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = -\alpha \pm j\omega_d$$

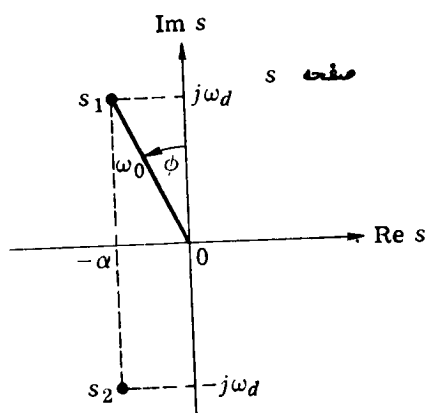
یا در مختصات قطبی^(۱) (شکل (۲-۲) را ببینید) :

$$\left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = \omega_0 e^{\pm j\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}$$

که در آن :

$$(۲-۱۹) \quad |s_1| = |s_2| = \sqrt{\alpha^2 + \omega_d^2} = \omega_0 \quad \text{و} \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{\alpha}{\omega_d}$$

جمله اول (۲-۱۸) را میتوان باینصورت بیان کرد :



شکل ۲-۲- نمایش فرکانسهای طبیعی s_1 و s_2 بر حسب مختصات قائم و قطبی، مینویسیم :

$$\left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = -\alpha \pm j\omega_d = \omega_0 e^{\pm j\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} \quad \text{و} \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_d^2 + \alpha^2}$$

$$\sin \varphi = \frac{\alpha}{\omega_0}, \quad \cos \varphi = \frac{\omega_d}{\omega_0}, \quad \tan \varphi = \frac{\alpha}{\omega_d}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_1 - s_2} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) &= \\ &= \frac{1}{r j \omega_d} \omega_0 e^{-\alpha t} \left[e^{j\left(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \phi\right)} - e^{-j\left(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \phi\right)} \right] \\ &= \frac{\omega_0}{r j \omega_d} e^{-\alpha t} r j \sin\left(\omega_d t - \frac{\pi}{2} - \phi\right) \end{aligned}$$

$$(۲-۲۰) \quad = -\frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

پاسخ پله واحد بصورت زیر درمیآید:

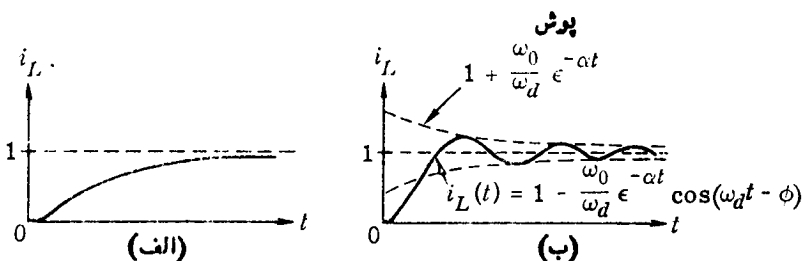
$$(۲-۲۱) \quad i_L(t) = \left[-\frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \phi) + 1 \right] u(t)$$

نمونه شکل های پاسخ پله برای حالت های میرای شدید و میرای ضعیف در شکل (۲-۳) داده شده اند.

آموخته است که پاسخ پله را بدو قسمت تفکیک کنیم، جمله ای که یک نمایی میرا یا سینوسی میرا بوده و نمایشگر «حالت گذرا» است و جمله ثابت مساوی واحد که نشان دهنده «حالت دائمی» است. در هر دو حالت، جریان i_L از صفر شروع کرده و برای $t = \infty$ بمقدار واحد میرسد.

ولتاژ دوسر خازن مدار RLC موازی را میتوان با محاسبه $L \frac{di_L}{dt}$ به سبب

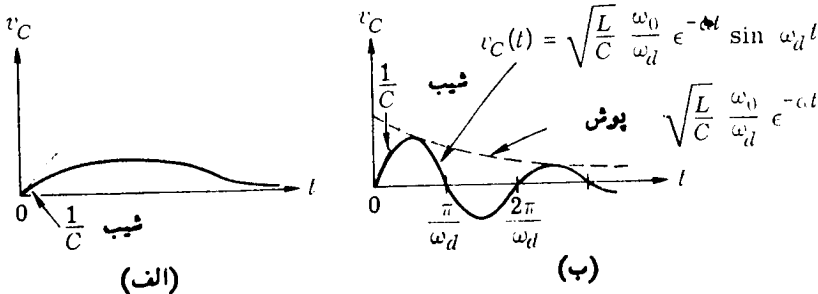
حساب کرد. بنابراین:



شکل ۲-۳- پاسخی پله برای جریان سلف در مدار RLC موازی.

(الف) میرای شدید. (ب) میرای ضعیف

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها



شکل ۴-۲- پاسخهای پله برای ولتاژ خازن مدار RLC موازی

$$(۲-۲۲) \quad v_C(t) = L \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) u(t)$$

و برای حالت میرای ضعیف :

$$(۲-۲۳) \quad v_C(t) = u(t) \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

این توابع در شکل (۲-۴) رسم شده‌اند. در این مورد «حالت دائمی» بطور متحد مساوی صفر است. تمام جریان منبع سرانجام از داخل سلف میگذرد و چون این جریان ثابت است پس ولتاژ دو سر سلف بطور متحد مساوی صفر خواهد بود.

«تعبیر فیزیکی» یک منبع جریان ثابت بطور موازی بیک مدار RLC موازی که در حالت صفر قرار دارد اعمال میشود. واضح است که ولتاژ دو سر خازن و جریان داخل سلف نمیتوانند بطور ناگهانی تغییر کنند و بنابراین درست پس از اعمال ورودی، مقادیر آنها صفر است. این امر لازم میدارد که جریان داخل مقاومت نیز در ابتدا صفر باشد چونکه $v_R(0) = v_C(0) = 0$ است. بنابراین در لحظه $t=0$ «همه» جریان منبع از داخل خازن میگذرد و موجب افزایش تدریجی ولتاژ میشود. «در لحظه $t=0_+$ ، خازن در مقابل اعمال ناگهانی منبع جریان ثابت محدود، مانند یک مدار اتصال کوتاه رفتار میکند». بمرور زمان ولتاژ دو سر خازن افزایش می‌یابد و جریان در مقاومت و سلف هردو جاری میشود. پس از مدت زمان درازی مدار بیک حالت دائمی میرسد یعنی :

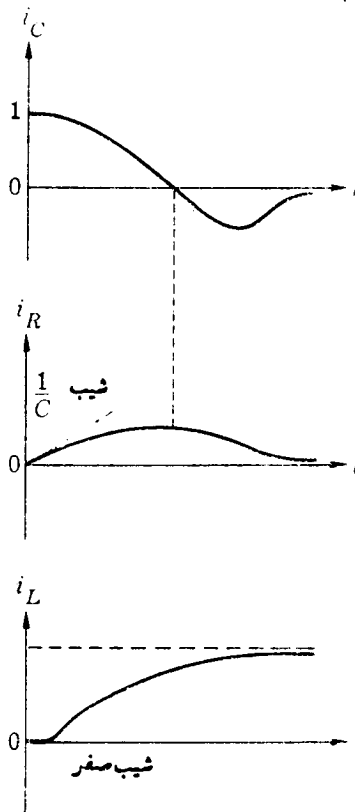
$$\frac{di_L}{dt} = 0 \quad \frac{d^2 i_L}{dt^2} = 0$$

۲۵۳

مدارهای مرتبه دوم

و بنابراین مطابق معادله (۲-۲) تمام جریان منبع از داخل سلف میگذرد. در نتیجه، چون جریان داخل مقاومت صفر است، ولتاژ دو سر مدار موازی صفر خواهد بود. «در زمان $t = \infty$ ، سلف در مقابل یک منبع جریان ثابت مانند یک مدار اتصال کوتاه رفتار میکند.» برای حالت میرای شدید ($Q < \frac{1}{2}$)، جریانهایی داخل خازن و مقاومت و سلف در شکل (۲-۵) رسم شده‌اند.

تمرین = برای یک مدار RLC موازی با $R=1$ اهم، $C=1$ فاراد و $L=1$ هانری، جریانهایی داخل سلف، خازن و مقاومت را که در اثر اعمال یک ورودی جریان پله یک آمپری حاصل میشود تعیین کنید. مدار در زمان $t=0$ در حالت صفر است. شکل موجها را رسم کنید.



شکل ۲-۵-۲- شکلهای i_C ، i_R و i_L ناشی از یک ورودی جریان

پله برای مدار RLC موازی (حالت میرای شدید $Q < \frac{1}{2}$)

۲-۲- پاسخ ضربه

اکنون پاسخ ضربه را برای مدار RLC موازی حساب میکنیم. بموجب تعریف، ورودی یک ضربه واحد بوده و در $t=0_-$ مدار در حالت صفر می‌باشد. بنابراین پاسخ ضربه i_L ، جواب معادله دیفرانسیل زیر خواهد بود.

$$(۲-۲۴) \quad LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + LG \frac{di_L}{dt} + i_L = \delta(t)$$

$$(۲-۲۵) \quad i_L(0_-) = 0$$

$$(۲-۲۶) \quad \frac{di_L}{dt}(0_-) = 0$$

چون محاسبه و درک فیزیکی پاسخ ضربه در تئوری مدار اهمیت بسزایی دارد، بدینجهت مجدداً چند روش محاسبه و تعبیر برای آن عرضه خواهد شد و تنها، حالت میرای ضعیف یعنی حالتی که فرکانس‌های طبیعی مدار مختلط می‌باشند در نظر گرفته خواهد شد.

«روش اول» - در این روش مستقیماً معادله دیفرانسیل را بکار می‌بریم. چون تابع ضربه $\delta(t)$ برای $t > 0$ بطور متحد برابر صفر است، پاسخ ضربه را میتوان بعنوان پاسخ ورودی صفر که در $t=0_+$ شروع میشود در نظر گرفت. ضربه وارده در $t=0$ شرط اولیه‌ای در $t=0_+$ بوجود می‌آورد و پاسخ ضربه برای $t > 0$ ، اساساً پاسخ ورودی صفر ناشی از آن شرط اولیه است. پس مسأله، تعیین این شرط اولیه می‌باشد. فرض کنید هر دو طرف معادله (۲-۲۴) را از $t=0_-$ تا $t=0_+$ انتگرال بگیریم، بدست می‌آوریم:

$$(۲-۲۷) \quad LC \frac{di_L}{dt}(0_+) - LC \frac{di_L}{dt}(0_-) + LG i_L(0_+) - LG i_L(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} i_L(t') dt' = 1$$

که در آن مقدار سمت راست، با استفاده از حقیقت زیر بدست آمده است:

$$\int_{0-}^{0+} \delta(t') dt' = 1$$

میدانیم که i_L نمیتواند در $t=0$ بجهد، عبارت دیگر، i_L یک تابع پیوسته است یعنی:

$$\int_{0-}^{0+} i_L(t') dt' = 0 \quad \text{و} \quad i_L(0_+) = i_L(0_-)$$

زیرا اگر i_L پیوسته نبود، $\frac{di_L}{dt}$ شامل یک ضربه و $\frac{d^2 i_L}{dt^2}$ شامل یک دویلت میبود، و معادله (۲-۲۴) هرگز نمیتوانست برقرار باشد چونکه در سمت راست هیچ تابع دو بلتی وجود ندارد. از (۲-۲۷) بدست میآوریم:

$$(2-28) \quad \frac{di_L}{dt}(0_+) = \frac{di_L}{dt}(0_-) + \frac{1}{LC} = \frac{1}{LC}$$

تا آنجا که $t > 0$ مورد نظر است، معادله دیفرانسیل ناهمگن (۲-۲۴) با شرط اولیه داده شده در (۲-۲۵) و (۲-۲۶) معادل است با:

$$(2-29) \quad LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + LG \frac{di_L}{dt} + i_L = 0$$

با:

$$(2-30) \quad i_L(0_+) = 0$$

و:

$$(2-31) \quad \frac{di_L}{dt}(0_+) = \frac{1}{LC}$$

واضح است که برای $t \leq 0$ ، $i_L(t)$ صفر است. بنابراین جواب معادله بالا چنین است:

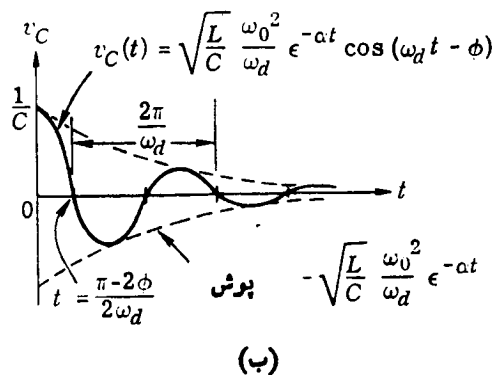
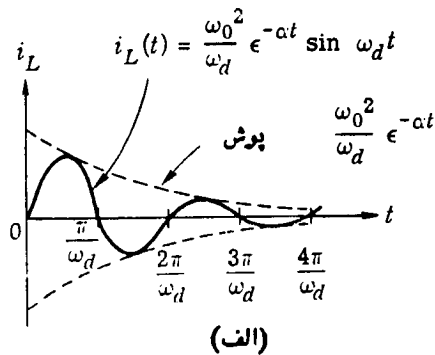
$$(2-32) \quad i_L(t) = u(t) \frac{\omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

شکل موج جریان در شکل (۲-۶ الف) نشان داده شده است. توجه کنید که برای یک

حالت اولیه داده شده $I_0 = 0$ و $V_0 = \frac{1}{C}$ ، از پاسخ ورودی صفر (۱-۲۴) نیز میتوان (۲-۲۲) را بدست آورد.

تبصره اتصال موازی یک خازن و منبع جریان i_s را در نظر بگیرید. در فصل دوم نشان دادیم که این اتصال موازی، معادل با اتصال سری همان خازن و منبع ولتاژ v_s میباشد که در آنجا:

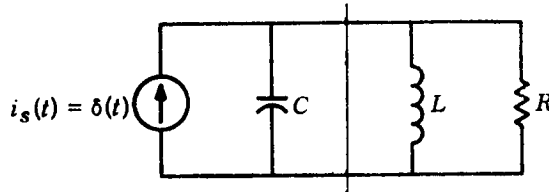
$$v_s(t) = \frac{1}{C} \int_{0_-}^t i_s(t') dt' \quad t \geq 0$$



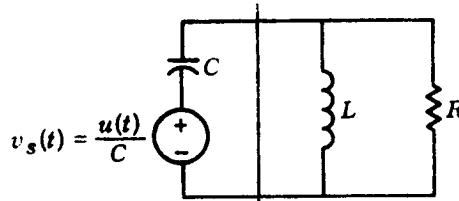
شکل ۶-۲- پاسخ ضربه مدار RLC موازی برای حالت میرای ضعیف

$$\left(Q > \frac{1}{2}\right)$$

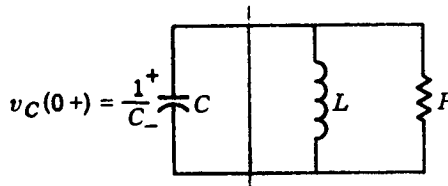
بنابراین منبع ولتاژ معادل منبع جریان ضربه ، $\frac{1}{C} u(t)$ است ، یعنی برای $t < 0$ منبع ولتاژ بطور متحد برابر صفر و برای $t > 0$ منبع ولتاژ مساوی ثابت $\frac{1}{C}$ است. اتصال سری یک خازن بی بار و منبع ولتاژ ثابت ، معادل یک خازن بار شده با ولتاژ اولیه $\frac{1}{C}$ میباشد. بنابراین پاسخ ضربه یک مدار RLC موازی ناشی از یک جریان



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۷-۲- مسأله تعیین پاسخ ضربه یک مدار RLC ، به مسأله تعیین پاسخ ورودی

صفر یک مدار RLC تبدیل میشود. توجه کنید که اتصال موازی منبع

جریان ضربه و خازن در شکل (الف) به اتصال سری خازن و یک منبع ولتاژ

بله در شکل (ب) تبدیل شده و بالاخره به خازن بار شده شکل (پ) تبدیل

گردیده است.

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

ضربه موازی با آن، با پاسخ ورودی صفر آن مدار با $v_C(o_+) = \frac{1}{C}$ یکسان است. این برابری‌ها در شکل (۲-۷) تشریح شده است.

«جایگذاری مستقیم» اکنون با جایگذاری مستقیم (۲-۳۲) در معادلات (۲-۲۴) تا (۲-۲۶) ثابت می‌کنیم که این جواب معادله است. این عمل از لحاظ آشنایی با محاسباتی که شامل ضربه هستند تمرین با ارزشی است. واضح است که i_L داده شده توسط (۲-۳۲) شرایط اولیه (۲-۲۵) و (۲-۲۶) را برمیآورد، یعنی، $i_L(o_-) = 0$ و $\frac{di_L}{dt}(o_-) = 0$. آنچه باقی میماند این است که نشان دهیم (۲-۳۲) در معادله دیفرانسیل (۲-۲۴) صدق می‌کند. با مشتق‌گیری از (۲-۳۲) بدست می‌آید:

(۲-۳۳)

$$\frac{di_L}{dt} = \delta(t) \left(\frac{\omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \right) + \frac{u(t) \omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

جمله اول بصورت $\delta(t)f(t)$ است و چون برای $t \neq 0$ ، $\delta(t)$ مساوی صفر است پس در این جمله می‌توان $t=0$ قرار داد و $\delta(t)f(0)$ را بدست آورد، ولی چون $f(0)=0$ است پس جمله اول ازین میرود و داریم:

(۲-۳۴)

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{u(t) \omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

با مشتق‌گیری مجدد بدست می‌آوریم:

(۲-۳۵)

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i_L}{dt^2} &= \delta(t) \frac{\omega_0^2}{\omega_d} \cos \varphi - u(t) \frac{\omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \varphi) \\ &= \omega_0^2 \delta(t) - u(t) \frac{\omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} [\sin(\omega_d t + \varphi) \cos \varphi + \cos(\omega_d t + \varphi) \sin \varphi] \end{aligned}$$

باجایگذاری معادلات (۲-۳۲) و (۲-۳۴) و (۲-۳۵) در (۲-۲۴) که برحسب ω_0 و α مجدداً بصورت زیر نوشته شده است:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{\alpha}{\omega_0^2} \frac{di_L}{dt} + i_L = \delta(t)$$

۲۵۹

مدارهای مرتبه دوم

ملاحظه خواهیم کرد که سمت چپ، چنانکه انتظار داشتیم، مساوی $\delta(t)$ میگردد. بنابراین با جایگذاری مستقیم ثابت کردیم که (۲-۲۲) پاسخ ضربه مدار RLC موازی است.

تمرین - نشان دهید که پاسخ ضربه برای ولتاژخازن مدار RLC موازی چنین است:

$$(۲-۲۶) \quad v_C(t) = u(t) \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{\omega_0^2}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \varphi)$$

شکل موج تابع فوق در شکل (۲-۶) ب) نشان داده شده است.

«روش دوم» در این روش از رابطه بین پاسخ ضربه و پاسخ پله استفاده میکنیم. این روش تنها برای مدارهای با اجزاء خطی تغییر ناپذیر با زمان قابل استفاده است، چونکه تنها برای اینگونه مدارها پاسخ ضربه مشتق پاسخ پله میباشد.

تمرین - نشان دهید که پاسخ های ضربه برای i_L در معادله (۲-۲۲) و v_C در معادله (۲-۲۶) را میتوان با مشتق گیری از پاسخ های پله برای i_L در معادله (۲-۲۱) و v_C در معادله (۲-۲۳) بدست آورد.

«تعبیر فیزیکی» اکنون برای توضیح چگونگی رفتار جریانها و ولتاژهای تمام شاخه ها در مدار RLC موازی، یک ورودی پالس $i_s(t) = p_{\Delta}(t)$ ، مطابق شکل (۲-۸) الف) بکار میبریم. بخاطر بسپارید چنانچه $\Delta \rightarrow 0$ ، پالس p_{Δ} بسمت ضربه میل کرده و پاسخ پالس بسمت پاسخ ضربه میل خواهد نمود. برای شروع کار فرض میکنیم Δ پایاندار و مثبت بوده ولی بسیار کوچک است. در بحث پاسخ پله آموختیم که در $t = 0_+$ تمام جریان منبع بداخل خازن جاری میشود، یعنی:

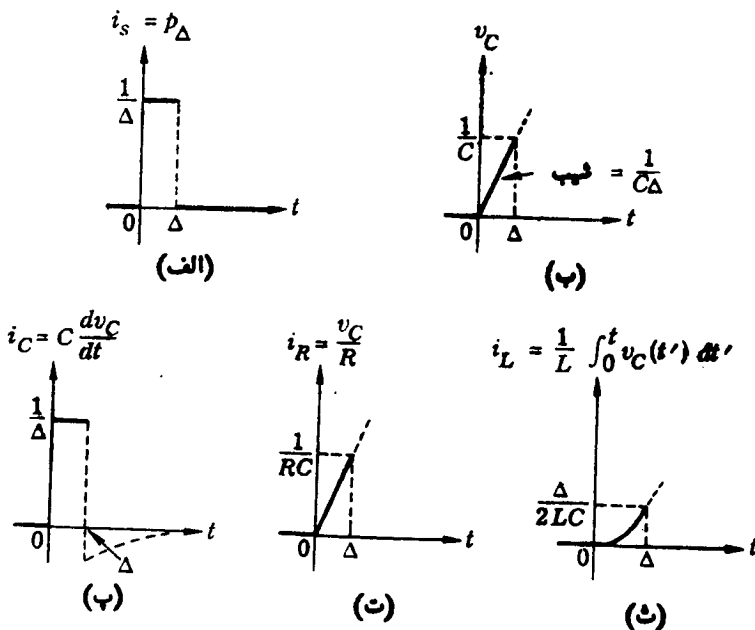
$$i_C(0_+) = i_s(0_+) = \frac{1}{\Delta} \quad \text{و} \quad i_R(0_+) = i_L(0_+) = 0$$

جریان داخل خازن با شدت اولیه $\frac{dv_C}{dt}(0_+) = \frac{i_C(0_+)}{C} = \frac{1}{C\Delta}$ موجب افزایش تدریجی ولتاژ دوسر خازن میگردد. چون توجه اصلی ما به مقدار کوچک Δ است پس فرض

۲۶۰

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

میکنیم در طول فاصله کوتاه $(0, \Delta)$ شیب منحنی ولتاژ ثابت بماند. در اینصورت مطابق شکل (۲-۸ ب) در زمان Δ ولتاژ بمقدار $\frac{1}{C}$ میرسد. جریان داخل مقاوت متناسب با ولتاژ v_C بوده و بنابراین یک تابع خطی از t است (شکل (۲-۸ ت) را ببینید). جریان داخل سلف که متناسب با انتگرال v_L میباشد یک تابع سهمی از t است (شکل (۲-۸ ث) را ببینید). در این فاصله، جریان داخل خازن بطوریکه در شکل (۲-۸ ب) نشان داده شده است ثابت میماند. البته این فرض که در فاصله $(0, \Delta)$ تمام جریان منبع از خازن میگذرد صحیح نیست. معه‌ذا خطای موجود شامل جملاتی با درجه‌های بالاتر Δ میباشد و بنابراین وقتی که $0 \rightarrow \Delta$ این خطا صفر میشود. با مراجعه مجدد به شکل (۲-۸ الف) ملاحظه میکنیم وقتی که $0 \rightarrow \Delta$ ، i_C به یک ضربه δ تبدیل شده، v_C جهشی از 0 به $\frac{1}{C}$ پیدا میکند و i_C به یک ضربه δ تبدیل شده، i_R جهشی از 0 به $\frac{1}{RC}$ پیدا میکند و i_L چنان است که:



شکل ۲-۸- تشریح فیزیکی پاسخ ضربه یک مدار RLC موازی، p_Δ پالس ورودی

است، v_C ، i_C ، i_R و i_L بدست آمده نشان داده شده‌اند.

$$i_L(o_-) = i_L(o_+) = \frac{di_L}{dt}(o_-) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{di_L}{dt}(o_+) = \frac{1}{LC}$$

بالاخره وقتی که $o \rightarrow \Delta$ ، از KCL ملاحظه میشود که :

$$i_C(o_+) = -i_R(o_+) - i_L(o_+) = \frac{-1}{RC}$$

توجه کنید که این شرایط با آنهایی که از بکار بردن روش های دیگر، مثلاً در (۳۱-۲) بدست آمده است مطابقت دارند.

۳- روش فضای حالت

تجزیه و تحلیل انجام شده در بخش های قبل تعمیم سر راست روشی بود که برای مدارهای مرتبه اول بکار رفت، یعنی مایک متغیر مناسب را انتخاب کردیم (i_L) در مورد بالا) و یک معادله دیفرانسیل برحسب این متغیر نوشتیم. چنانچه این معادله حل شود متغیرهای دیگر به سهولت محاسبه میشوند. معهذرا راه دیگری برای در نظر گرفتن این مسأله وجود دارد. واضح است هرگاه شرایط اولیه جریان I_0 سلف و ولتاژ V_0 خازن معلوم باشند پاسخ ورودی صفر کاملاً معین میشود. بنابراین میتوان V_0 و I_0 را بعنوان مشخص کننده «حالت اولیه» مدار تصور نمود و حالت کنونی ($i_L(t)$ و $v_C(t)$) را برحسب حالت اولیه (I_0, V_0) بیان کرد. بعبارت دیگر، میتوان رفتار یک مدار را بصورت یک مسیر^(۱) در فضای دو بعدی در نظر گرفت که از حالت اولیه (I_0, V_0) شروع میشود و برای هر t ، نقطه متناظر مسیر، $i_L(t)$ و $v_C(t)$ را معین میکند.

در واقع میتوان سؤال کرد که چرا ما بیاد گرفتن این جنبه جدید نیاز داریم. دلیل این موضوع نسبتاً ساده است. اول آنکه، این روش یک توصیف تصویری روشن از رفتار کامل مدار را بماندهد و دوم آنکه، این روش تنها راه مؤثر تجزیه و تحلیل مدارهای غیر خطی و تغییر پذیر با زمان است. در این حالت های کلی تر، سعی مادر انتخاب یک متغیر مناسب و نوشتن معادله دیفرانسیلی از مرتبه بالاتر برحسب آن متغیر، به بسیاری از پیچیدگی های غیر ضروری منجر میگردد و بدین جهت یک محرك قوی برای یاد گیری روش

فضای حالت در زمینه ساده مدارهای خطی تغییر ناپذیر با زمان مرتبه دوم وجود دارد. یک مزیت دیگر این روش آنست که سیستم معادلات بدست آمده از روش فضای حالت، از لحاظ محاسبه و حل عددی آنها در کامپیوترهای دیجیتال و آنالوگ به سهولت قابل برنامه نویسی هستند. بررسی دقیق تر روش فضای حالت در فصل دوازدهم داده خواهد شد.

۳-۱- معادلات و مسیر حالت

اکنون همان مدار RLC موازی را که در بخش ۱ تشریح شد در نظر بگیرید و فرض کنید که ورودی منبع جریان موجود نباشد. میخواهیم پاسخ ورودی صفر را محاسبه کنیم. گیریم i_L و v_C را بعنوان متغیرها بکار برده و معادلات (۱-۱) و (۱-۶) را مجدداً بصورت زیر بنویسیم:

$$(۱-۳) \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_C \quad t \geq 0$$

$$(۲-۳) \quad \frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L - \frac{G}{C} v_C \quad t \geq 0$$

دلیل اینکه معادلات را بصورت فوق مینویسیم (دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول همزمان) بعداً روشن خواهد شد. متغیرهای i_L و v_C دارای اهمیت فیزیکی زیادی هستند چونکه آنها با انرژی ذخیره شده در مدار ارتباط نزدیکی دارند. معادلات (۳-۱) و (۳-۲) معادلات دیفرانسیل همزمان مرتبه اول هستند و «معادلات حالت» مدار خوانده میشوند. جفت عددهای $(i_L(t), v_C(t))$ را «حالت مدار در زمان t » مینامند. طبیعتاً جفت $(i_L(0), v_C(0))$ را «حالت اولیه» میگویند، این جفت با شرایط اولیه زیر داده میشود:

$$(۳-۳) \quad i_L(0) = I_0$$

$$v_C(0) = V_0$$

از تئوری معادلات دیفرانسیل میدانیم که حالت اولیه داده شده (۳-۳) و معادلات (۳-۱) و (۳-۲) برای همه مقادیر $t \geq 0$ ، مقدار $(i_L(t), v_C(t))$ را بطور یکتا معین میکنند. بنابراین چنانکه $(i_L(t), v_C(t))$ را بعنوان مختصات نقطه‌یی در صفحه $i_L - v_C$

در نظر بگیریم، در این صورت هنگامیکه t از صفر تا بینهایت زیاد میشود نقطه $(i_L(t), v_C(t))$ یک منحنی را که از (I_0, V_0) شروع میشود، طی میکند. این منحنی «مسیر فضای حالت» خوانده میشود و صفحه (i_L, v_C) نیز «فضای حالت» مدار گفته میشود. جفت عددهای $(i_L(t), v_C(t))$ را میتوان بعنوان مؤلفه‌های یک بردار $\mathbf{x}(t)$ که مبدأش مبدأ محورهای مختصات باشد در نظر گرفت بنابراین میتوان نوشت:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$$

بردار $\mathbf{x}(t)$ را «بردار حالت» یا باختصار «حالت» نامند. بنابراین $\mathbf{x}(t)$ برداری است در فضای حالت که برای همه مقادیر $t \geq 0$ تعریف میشود. مؤلفه‌های این بردار، یعنی جریان i_L داخل سلف و ولتاژ v_C دوسر خازن را «متغیرهای حالت» گویند. با معلوم بودن حالت در زمان t ، یعنی با دانستن جفت عددهای $(i_L(t), v_C(t))$ میتوان سرعت^(۱) مسیر $\left(\frac{di_L}{dt}(t), \frac{dv_C}{dt}(t) \right)$ را از معادلات حالت (۳-۱) و (۳-۲) بدست آورد.

مثال ۱- در مدار RLC موازی، حالت‌های میرای شدید، میرای ضعیف و بی اتلاف را در نظر بگیرید و فرض کنید حالت اولیه $I_0=1$ آمپر و $V_0=1$ ولت باشد. الف- میرای شدید. $R=3$ اهم، $L=4$ هانری، $C=\frac{1}{12}$ فاراد $(\omega_0=\sqrt{3}, \alpha=2)$. بنابراین فرکانس‌های طبیعی $s_1=-1$ و $s_2=-3$ هستند. از معادلات (۱-۲۲) و (۱-۲۳) بدست میاوریم:

$$i_L(t) = \frac{1}{8} (e^{-t} - e^{-3t}) + \frac{1}{4} (-e^{-3t} + 3e^{-t}) = \frac{13}{8} e^{-t} - \frac{5}{8} e^{-3t}$$

و:

$$v_C(t) = \frac{1}{4} (-e^{-t} + 3e^{-3t}) + 6(e^{-3t} - e^{-t}) = -\frac{13}{4} e^{-t} + \frac{15}{4} e^{-3t}$$

این شکل موجها در شکل (۳-۱) الف رسم شده‌اند. اکنون t را بعنوان پارامتر بکار

۲۶۴

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

برده و برای هر مقدار t ، حالت $(i_L(t), v_C(t))$ را در فضای حالت، یعنی صفحه‌ای که محور طولهای آن i_L و محور عرضهای آن v_C باشد رسم میکنیم. نتیجه بدست آمده در شکل (۳-۱) ب) نشان داده شده است. توجه کنید که مسیر از نقطه $(1, 1)$ برای $t=0$ شروع میشود و به مبدأ مختصات برای $t=\infty$ ختم میگردد.

ب- میرای ضعیف. $R=1$ اهم، $L=1$ هانری و $C=1$ فاراد $\left(\omega_0=\frac{\sqrt{3}}{2}, \omega_0=1, \alpha=\frac{1}{2}\right)$ از معادلات (۱-۲۴) و (۱-۲۵) داریم:

$$i_L(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) = 2e^{-\frac{t}{2}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t - 60^\circ \right)$$

و:

$$v_C(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) = 2e^{-\frac{t}{2}} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} t + 60^\circ \right)$$

شکل موجها در شکل (۳-۲) الف) و مسیر در شکل (۳-۲) ب) رسم شده‌اند. توجه کنید که مسیر به شکل حلزونی^(۱) است که از نقطه $(1, 1)$ شروع شده و به مبدأ مختصات ختم میگردد.

پ- بی اتلاف. $L=\frac{1}{4}$ هانری و $C=1$ فاراد $(\omega_0=2, \alpha=0)$ از معادلات (۱-۲۶) و (۱-۲۷) داریم:

$$i_L(t) = \cos 2t + \frac{1}{8} \sin 2t = 1.01 \cos(2t - 7^\circ)$$

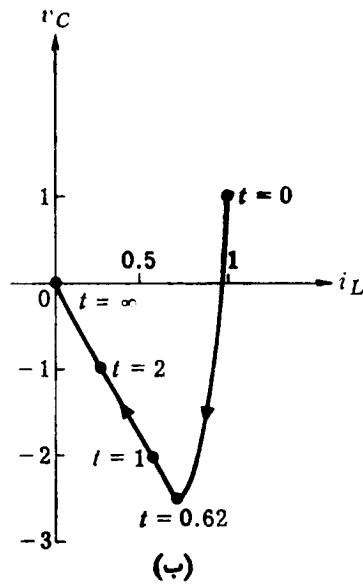
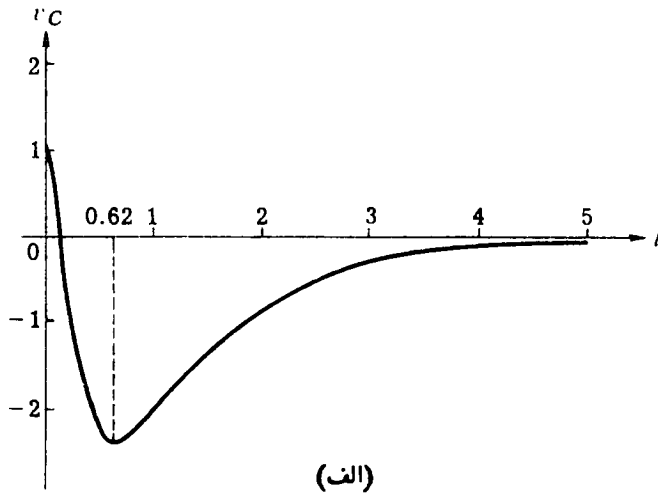
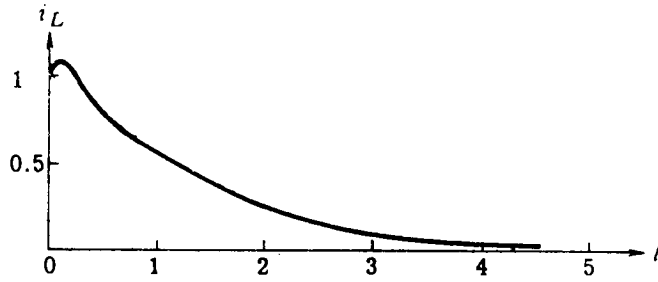
و:

$$v_C(t) = \cos 2t - 8 \sin 2t = 8.06 \cos(2t + 83^\circ)$$

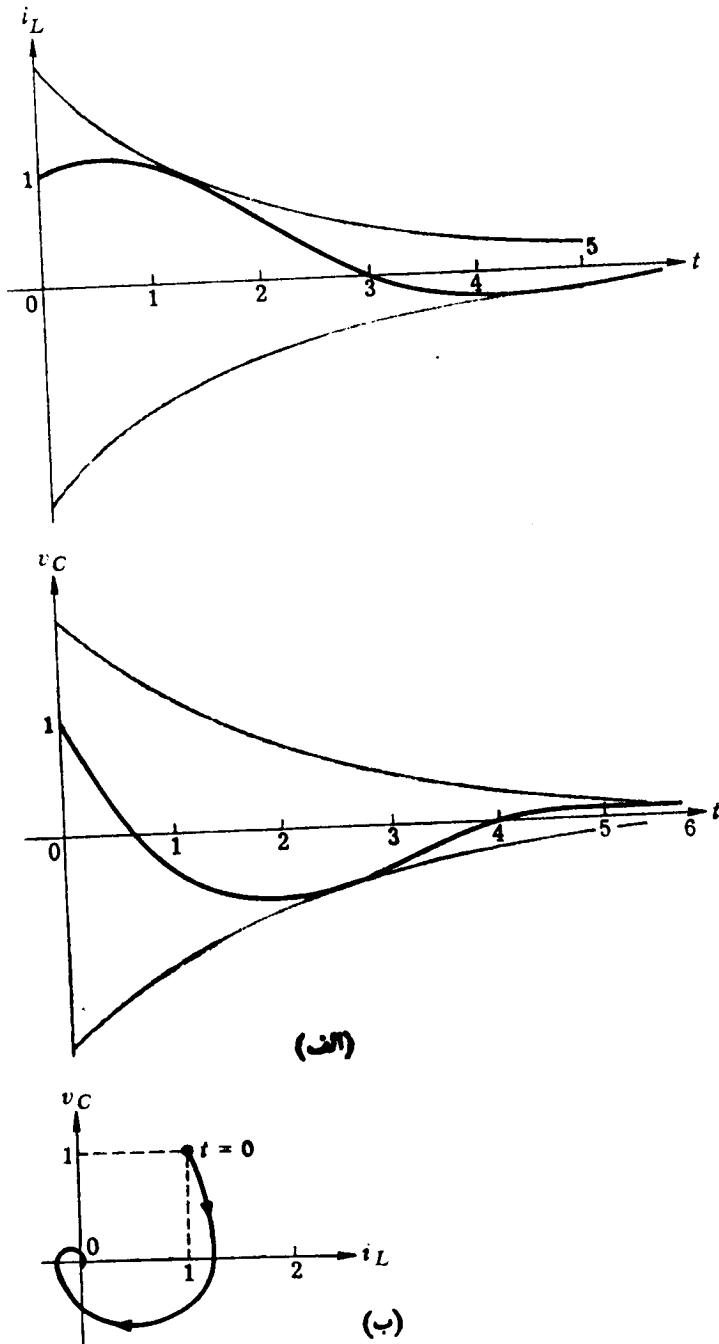
شکل موجها و مسیر در شکل های (۳-۳) الف و ب) رسم شده‌اند. توجه کنید که در این مورد، مسیر یک بیضی است که مرکزش در مبدأ مختصات قرار دارد و این نشان دهنده آنست که پاسخ ورودی صفر نوسانی است.

۲۶۵

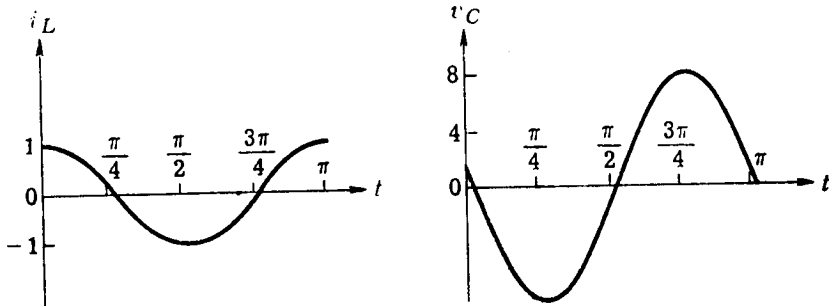
مدارهای مرتبه دوم



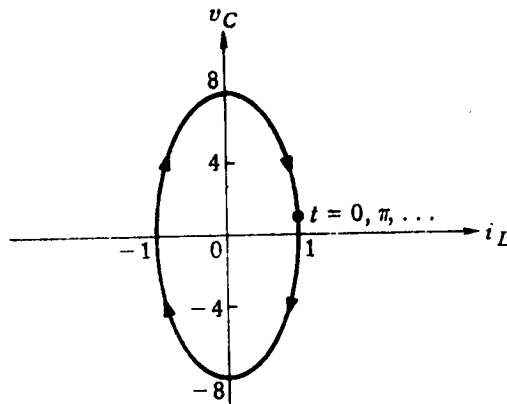
شکل ۱-۳= مدار RLC موازی میرای شدید. (الف) شکل موجهای i_L و v_C . (ب) مسیر حالت



شکل ۲-۳- مدار موازی میرای ضعیف. (الف) شکل موجهای i_L و v_C . (ب) مسیر حالت



(الف)



(ب)

شکل ۳-۳- مدار LC موازی بی اتلاف .

(الف) شکل موجهای i_L و v_C . (ب) مسیر حالت

۳-۲- نمایش ماتریسی

معادلات (۲-۱) و (۲-۲) را میتوان برحسب متغیرهای حالت به شکل ماتریسی بصورت زیر نوشت :

$$(۲-۴) \quad \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad t \geq 0$$

و :

$$(۲-۵) \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

که در آنجا :

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$(۳-۶) \quad \mathbf{A} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{G}{C} \end{bmatrix}$$

و :

$$(۳-۷) \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$$

معادلات ماتریسی (۳-۴) و (۳-۵) ، بسیار شبیه معادله اسکالر زیر هستند :

$$(۳-۸) \quad \frac{dx}{dt} = ax \quad x(0) = x_0$$

این معادله اسکالر دارای جواب شناخته شده $x(t) = e^{at}x_0$ میباشد . بطریق مشابه ، معادله ماتریسی دارای جواب زیر است :

$$(۳-۹) \quad \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 \quad t \geq 0$$

که در آن $e^{\mathbf{A}t}$ «ماتریسی» است که به $\mathbf{A}$ و t بستگی دارد . عبارت هندسی ، این رابطه بردار حالت اولیه $\mathbf{x}_0$ را به بردار حالت $\mathbf{x}(t)$ در زمان t می‌نگارد^(۱) . در واقع همانطور که عبارت نمایی e^{at} بصورت سری توانی^(۲) بسط داده میشود (که برای همه مقادیر t معتبر است) :

$$e^{at} = 1 + at + \frac{a^2 t^2}{2!} + \frac{a^3 t^3}{3!} + \dots$$

ماتریس $e^{\mathbf{A}t}$ نیز بصورت سری توانی بسط داده میشود (که برای همه مقادیر t معتبر است) :

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \mathbf{A}^3 \frac{t^3}{3!} + \dots$$

که در آنجا $\mathbf{I}$ ماتریس واحد^(۳) است . در سری اخیر هر جمله یک «ماتریس» میباشد و

مدارهای مرتبه دوم

۲۶۹

بنابراین $\mathbf{A}t$ نیز یک ماتریس است. هر عنصر ماتریس $\mathbf{A}t$ تابعی از t است. تذکر این نکته حایز اهمیت است که معادله (۳-۹) یک «تابع خطی» را نمایش میدهد که بردار $\mathbf{x}_0$ (بردار حالت اولیه) را به بردار $\mathbf{x}(t)$ (بردار حالت در زمان t) می نگارد. گرچه بیشتر از این درباره نمایش و محاسبه $\mathbf{A}t$ صحبت نخواهیم کرد، معهذا این مطلب که معادله برداری (۳-۹) تمام مسیر فضای حالت را بوجود میاورد حایز کمال اهمیت است.

۳-۳- روش تقریبی برای محاسبه مسیر حالت

با توجه به معادلات (۳-۴) و (۳-۵) میتوان برای هر t ، معادله (۳-۴) را بعنوان تعریف کننده سرعت $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t)$ در طول مسیر در نقطه $\mathbf{x}(t)$ از فضای حالت در نظر گرفت. بویژه با معلوم بودن حالت اولیه $\mathbf{x}(0)$ ، معادله (۳-۴) سرعت اولیه بردار حالت $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(0)$ را بیا میدهد. میتوان برای محاسبه مسیر تقریبی از یک روش ساده مرحله بمرحله استفاده نمود. روش فوق متکی بر این فرض است که اگر یک فاصله زمانی خیلی کوچک Δt در نظر گرفته شود، در طول این فاصله سرعت $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ تقریباً ثابت میماند، بعبارت دیگر، مسیر تقریباً یک پاره خط مستقیم است. بنابراین اگر در زمان 0 با حالت اولیه $\mathbf{x}_0$ شروع کنیم خواهیم داشت:

$$(۳-۱۰) \quad \frac{d\mathbf{x}(0)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0$$

و چون فرض میشود که در طول فاصله کوچک $(0, \Delta t)$ سرعت ثابت میماند داریم:

$$(۳-۱۱) \quad \mathbf{x}(\Delta t) \approx \mathbf{x}_0 + \frac{d\mathbf{x}}{dt}(0)\Delta t = \mathbf{x}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \Delta t$$

برای فاصله بعدی، $(\Delta t, 2\Delta t)$ ، مجدداً فرض میکنیم که سرعت ثابت باشد و آنرا بر مبنای مقدار تقریبی $\mathbf{x}(\Delta t)$ که بوسیله (۳-۱۱) داده میشود محاسبه میکنیم و داریم:

$$(۳-۱۲) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt}(\Delta t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(\Delta t)$$

و بنابراین:

$$(۳-۱۳) \quad \mathbf{x}(2\Delta t) \approx \mathbf{x}(\Delta t) + \mathbf{A}\mathbf{x}(\Delta t)\Delta t$$

نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

به همین ترتیب برای محاسبه مقادیر تقریبی متوالی حالت ادامه می‌دهیم :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[(k+1)\Delta t] &\approx \mathbf{x}(k\Delta t) + \mathbf{A}\mathbf{x}(k\Delta t)\Delta t \\ &= (\mathbf{I} + \Delta t\mathbf{A})\mathbf{x}(k\Delta t) \end{aligned} \quad k=0, 1, 2, \dots, N$$

میتوان این روش را به سبب برای کامپیوترهای دیجیتال بکار برد. در واقع میتوان نشان داد که چنانچه $\Delta t \rightarrow 0$ ، مقادیر تقریبی متوالی $\mathbf{x}(\Delta t)$ ، $\mathbf{x}(2\Delta t)$ ، ...، $\mathbf{x}(N\Delta t)$ که بدینسان حساب میشوند، به سمت نقاط واقعی مسیر واقعی میل میکنند. مقدار Δt که در عمل باید انتخاب شود به عاملهای زیر بستگی دارد. (۱) تعداد رقم‌های با معنی^(۱) که در محاسبات نگهداری میشود، (۲) دقت مورد نیاز، (۳) ثابت‌های مسأله و (۴) طول فاصله زمانی که مسیر فوق‌در آن خواسته میشود. چنانچه مسیر فوق محاسبه شود، میتوان به سبب پاسخ مدار را تعیین نمود زیرا این پاسخ یکی از مؤلفه‌های حالت و یا ترکیب خطی آنها میباشد.

مثال ۲- گیریم این روش را برای محاسبه مسیر حالت مدار RLC موازی با

میرایی ضعیف مثال ۱ بکار ببریم. معادله حالت چنین است :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

و حالت اولیه عبارتست از :

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

گیریم $\Delta t = 0.2$ ثانیه انتخاب شود. میتوان از (۲-۱۱) برای بدست آوردن حالت در Δt استفاده کرد، بنابراین :

$$\begin{bmatrix} x_1(0.2) \\ x_2(0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.6 \end{bmatrix}$$

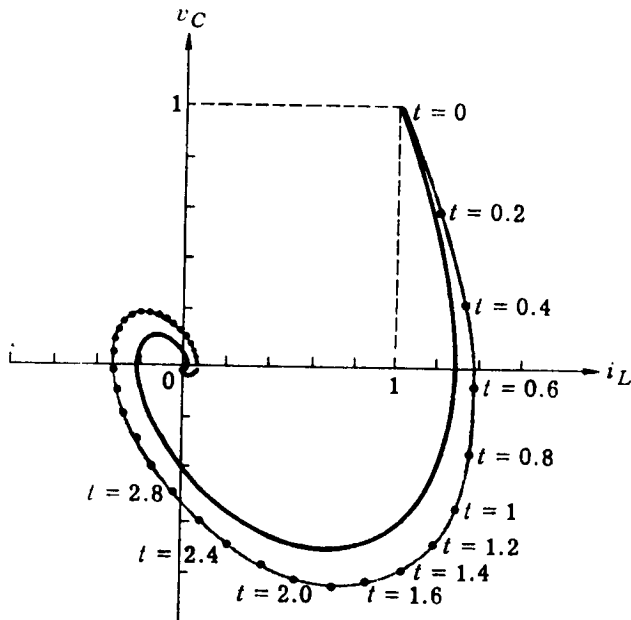
مپس از (۳-۱۳)، حالت در $2\Delta t$ بدست میاید و داریم :

$$\begin{bmatrix} x_1(0.4) \\ x_2(0.4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.6 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.32 \\ 0.24 \end{bmatrix}$$

در واقع میتوان از روی (۳-۱۴)، حالت در $(k+1)\Delta t$ را برحسب حالت در $k\Delta t$ بصورت زیر نوشت :

$$\mathbf{x}[(k+1)\Delta t] = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k\Delta t)$$

شکل (۳-۴) مسیر را بصورت یک منحنی پیوسته و نقاطی که با $\Delta t = 0.2$ ثانیه حساب شده اند نشان میدهد. چنانچه $\Delta t = 0.002$ ثانیه را بکار می بردیم نقاطی که از کاربرد



شکل ۳-۴- محاسبه مسیر حالت با استفاده از روش مرحله بمرحله برای مثال ۲

با $\Delta t = 0.2$ ثانیه.

مکرر معادله (۳-۱۴) بدست می‌آمدند همگی روی مسیر واقعی قرار می‌گرفتند.

تمرین - مسیر حالت مثال ۲ را برای موارد زیر محاسبه کنید :

الف - $\Delta t = 0.1$ ثانیه

ب - $\Delta t = 0.05$ ثانیه

نتایج حاصل را توضیح دهید.

تبصره - اگر یک مدار RLC موازی که در آن مقاومت ، سلف و خازن « غیر خطی » ولی تغییر ناپذیر با زمان باشند را در نظر بگیریم در این صورت با برقراری فرض‌های نسبتاً کلی در مورد مشخصه‌های آنها ، معادلاتی بصورت زیر خواهیم داشت :

$$(3-15) \quad \frac{di_L}{dt} = f_1(i_L, v_C) \quad , \quad \frac{dv_C}{dt} = f_2(i_L, v_C)$$

که در آن توابع f_1 و f_2 بر حسب مشخصه‌های شاخه‌ها بدست می‌آیند .
توجه باین موضوع حایز اهمیت است که روش عمومی بدست آوردن محاسبه تقریبی مسیر در این مورد نیز برقرار است و معادلات چنین هستند :

$$(3-16) \quad \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

و معادلات متناظر با (۳-۱۱) و (۳-۱۲) اکنون چنین هستند :

$$(3-17) \quad \mathbf{x}(\Delta t) \approx \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\Delta t$$

$$\mathbf{x}(2\Delta t) \approx \mathbf{x}(\Delta t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}(\Delta t))\Delta t$$

در بخش ۵ مثالهایی در این مورد داده خواهد شد.

۴-۳- معادلات حالت و پاسخ کامل

اگر مدار RLC موازی مطابق شکل (۲-۱) با یک منبع جریان تحریک شود ، بطریق مشابهی میتوان معادلات حالت را نوشت . در مرحله اول ، ولتاژ دو سر مدار موازی با حالتیکه هیچ منبعی وجود نداشت یکسان است و مانند معادله (۳-۱) بدست می‌آوریم که :

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_C$$

سپس در معادله KCL بایستی اثر منبع جریان را دخالت داد. بنابراین در مقایسه با معادله (۳-۲) یک جمله اضافی لازم است و داریم:

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{C} i_L - \frac{G}{C} v_C + \frac{i_s}{C}$$

حالت اولیه همان است که توسط معادله (۳-۲) داده میشود:

$$i_L(0) = I_0$$

$$v_C(0) = V_0$$

اگر بردار $\mathbf{x}$ برای نشان دادن بردار حالت بکار رود، یعنی، $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$ ، معادله حالت بصورت ماتریسی چنین خواهد بود:

$$(۳-۱۸) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}w$$

و حالت اولیه عبارتست از:

$$(۳-۱۹) \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$$

در معادله (۳-۱۸):

$$(۳-۲۰) \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{G}{C} \end{bmatrix}$$

و:

$$(۳-۲۱) \quad \mathbf{b}w = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} i_s$$

ماتریس های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{b}$ به اجزاء مدار بستگی دارند و ورودی با w نشان داده شده است.

۲۷۴

نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

معادله (۳-۱۸) یک معادله دیفرانسیل ماتریسی ناهمگن مرتبه اول است که مشابه معادله دیفرانسیل اسکالر خطی ناهمگن مرتبه اول زیر می‌باشد :

$$(۳-۲۲) \quad \frac{dx}{dt} = ax + bw$$

جواب این معادله اسکالر که در شرط اولیه داده شده $x(0) = x_0$ صدق میکند چنین است :

$$(۳-۲۳) \quad x = e^{at} x_0 + \int_0^t e^{a(t-t')} bw(t') dt'$$

توجه کنید که پاسخ کامل بصورت مجموع دو جمله نوشته شده است. جمله اول، یعنی $e^{at} x_0$ پاسخ ورودی صفر است و جمله دوم، که بصورت انتگرال نمایش داده شده است پاسخ حالت صفر می‌باشد. بطریق مشابه، معادله ماتریسی (۳-۱۸) دارای جواب زیر است :

$$(۳-۲۴) \quad \mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-t')} \mathbf{b}w(t') dt'$$

جمله اول، یعنی $e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$ پاسخ ورودی صفر است و جمله دوم، که بصورت انتگرال نمایش داده شده است پاسخ حالت صفر می‌باشد. اگر چه اثبات رابطه (۳-۲۴) در اینجا داده نخواهد شد معیناً صورت معادله (۳-۲۴) قابل توجه است. چنانکه دیده میشود مجدداً این عبارت به محاسبه $e^{\mathbf{A}t}$ بستگی دارد. روش تقریبی محاسبه $\mathbf{x}$ که در بخش (۳-۳) داده شد در اینجا نیز میتواند مورد استفاده قرار گیرد.

۴- نوسان ، مقاومت منفی و پایداری

ما در بخش‌های پیش مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان را به تفصیل بررسی کردیم و جواب‌های حالت میرای ضعیف را صریحاً بدست آوردیم. حالت خاص مورد توجه این بخش حالت بی اتلاف است که دارای پاسخ ورودی صفر نوسانی است. ما خواص چنین مداری را مطالعه خواهیم کرد و بعلاوه برخی توجهات فیزیکی خاص مربوط به آن را نیز بیان خواهیم نمود.

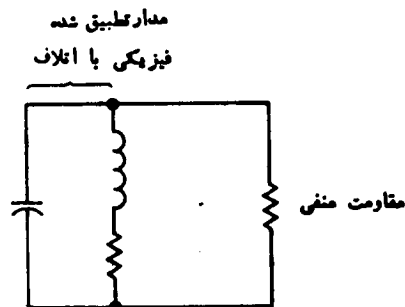
مدار LC موازی بی اتلاف را میتوان بعنوان حالت خاص یک مدار میرای ضعیف با $R=\infty$ (یا $G=0$ ، $\alpha=0$ ، $Q=\infty$) در نظر گرفت. در تشکیل دادن معادلات دیفرانسیل برحسب ولتاژ خازن یا جریان سلف و بدست آوردن معادلات حالت، هیچ تفاوتی نسبت به مدار میرای ضعیف وجود ندارد. بعلاوه میتوان پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر را مستقیماً با قرار دادن $\alpha=0$ و $\omega_0=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ ، از روی پاسخ حالت میرای ضعیف بدست آورد. اکنون پاره‌ای از این نتایج را مرور میکنیم. فرکانس‌های طبیعی مدار بی اتلاف $s=\pm j\omega_0$ ، $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ میباشد. پاسخ ورودی صفر یک سینوسی با همان فرکانس زاویه‌ای ω_0 است که این حقیقت در مثال ۱ بخش ۳ تشریح شد. مسیر حالت مطابق شکل (۳-۲) ب) یک بیضی است که ملزم میدارد پاسخ ورودی صفر یک مدار بی اتلاف، یک نوسان مداوم باشد. انرژی ذخیره شده اولیه در خازن و/یا در سلف بطور بی پایان بیکدیگر منتقل میشوند.

اکنون پاسخ حالت صفر را در نظر میگیریم. با مراجعه به بخش ۲ بخاطر میاوریم که پاسخ ضربه یک مدار LC بی اتلاف، یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω_0 میباشد. پاسخ پله نیز شامل یک قسمت سینوسی با همان فرکانس است. در واقع اگر در زمان صفر مدار در حالت صفر بوده و در فاصله $[0, T]$ (که در آن T هر زمان بزرگتر از صفر میباشد) یک ورودی دلخواه بان اعمال شود و پس از زمان T این ورودی مساوی صفر قرار داده شود، در اینصورت برای زمانهای بعد از T پاسخ بصورت $K \sin(\omega_0 t + \theta)$ خواهد بود که در آن دامنه K و فاز θ به ورودی بستگی دارند.

مدار LC بی اتلاف، یک مدار تشدید یا یک مدار تطبیق شده^(۱) نامیده میشود. واژه «تطبیق شده» ملزم میدارد که فرکانس نوسان با تنظیم مقدار خازن یا سلف، با یک عدد داده شده $f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}$ تطبیق داده شود. اگر مدار فیزیکی چنان میبود که سلف و خازن فیزیکی آن همانند مدل‌های سلف و خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان ما بودند، یک نوسان ساز خطی^(۲) بدست می‌آمد که با فرکانس زاویه‌ای ω_0 نوسان میکرد.

واضح است که عناصر فیزیکی همانند مدل‌های مداری ما نیستند و چنانکه در فصل دوم گفته شد یک سلف «فیزیکی» همیشه دارای مقدار معینی اتلاف است و مدل آن باید بصورت اتصال سری یک سلف و یک مقاومت در نظر گرفته شود. بنابراین در عمل یک مدار تطبیق شده فیزیکی (بتنهایی) یک نوسان ساز نیست و بشرطیکه اتلاف آن بقدر کافی کوچک باشد بصورت یک مدار با میرایی ضعیف رفتار میکند. در عمل، برای مدارهای تطبیق شده میتوان Q را تا حدود چندین صد بدست آورد. از نظر اصولی، با استفاده از فوق رساناها^(۱) میتوان مدارهایی با Q بینهایت نیز بدست آورد.

برای بدست آوردن یک نوسان ساز لازم است اتلاف موجود در هر مدار تطبیق شده فیزیکی را جبران نمود. واضح ترین وسیله برای اینکار وارد کردن عنصری با مقاومت منفی به مدار است بقسمی که نتیجه حاصل یک مدار بی اتلاف باشد. غالباً میتوان یک نوسان ساز نوعی را متشکل از یک مدار تطبیق شده فیزیکی که بیک مقاومت با مقاومت منفی متصل است تصور نمود. این مطلب در شکل (۱-۴) تشریح شده است. در فصل دوم درباره خاصیت مقاومت منفی سیگنال کوچک یک دیود تونلی بحث شده است. بعداً خواهیم دید که با استفاده از پس خورد^(۲) در یک مدار ترانزیستوری نیز میتوان مقاومت منفی بدست آورد. همه این مقاومت‌های منفی تقریبی هستند یعنی فقط در فاصله معینی از ولتاژها



شکل ۱-۴ = یک نوسان ساز خطی ساده که دارای یک مدار تطبیق شده

فیزیکی و یک مقاومت منفی است

و جریانه‌ها و شاید فقط در باند معینی از فرکانس، این گونه وسایل مانند مقاومتهای خطی تغییر ناپذیر با زمان با مقاومتهای منفی رفتار مینمایند. با وجود این، مدل یک مقاومت اکتیو خطی تغییر ناپذیر با زمان مفید بوده و ما آنرا برای تجزیه و تحلیل رفتار بعضی مدارهای ساده مرتبه دوم بکار خواهیم بود. درک کامل این مدارها در مطالعه مدارهای غیر خطی سودمند خواهد بود.

اکنون مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان مطابق شکل (۲-۴) را در نظر بگیرید که در آن مقاومت دارای یک مقاومت «منفی» ($R < 0$ و $G < 0$) میباشد. چند جمله‌ای مشخصه برای این مدار، $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2$ است که در آن $\alpha = -\frac{G}{2C}$

منفی میباشد و ω_0 مانند حالت قبل مساوی $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ است. ریشه‌های معادله مشخصه فرکانس‌های طبیعی مدار هستند و چون $\alpha < 0$ است میتوان آنها را بصورت زیر نوشت:

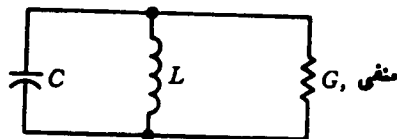
$$\left. \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ انگاری خالص و یا حقیقی است که در حالت اخیر از $|\alpha|$ کوچکتر میباشد. بنابراین فرکانس‌های طبیعی در نیمه راست صفحه فرکانس مختلط قرار دارند. ما پاسخ ورودی صفر را بررسی کرده و طبقه بندی زیر را انجام میدهم:

۱- $|\alpha| < \omega_0$: دو فرکانس طبیعی مزدوج مختلط هستند $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$ و $\omega_d^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$. بنابراین پاسخ چنین است:

$$ke^{at} \cos(\omega_d t + \theta)$$

که در آن k و θ ثابت‌هایی هستند که بشرایط اولیه بستگی دارند.



شکل ۲-۴- مدار RLC موازی

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

۲- $|\alpha| > \omega_0$: دو فرکانس طبیعی s_1 و s_2 حقیقی و مثبت هستند و پاسخ مجموع دو نمایی «افزایشی» میباشد :

$$k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$$

که در آن k_1 و k_2 بشرایط اولیه بستگی دارند.

پاسخ‌ها در هر دو حالت شامل عوامل نمایی افزایشی می‌باشند و بنابراین با مرور زمان پاسخ‌ها بطور دلخواهی بزرگ میشوند. روش تعیین شکل موجهای i_L و v_C درست مانند موردی است که در آن مقاومت مثبت میباشد. منحنی‌های v_C و i_L برحسب t در شکل (۳-۴) و مسیر حالت برای یک مورد $(|\alpha| < \omega_0)$ و حالت اولیه $v_C(0) = 1$ و $i_L(0) = 1$ در شکل (۴-۴) داده شده‌اند.

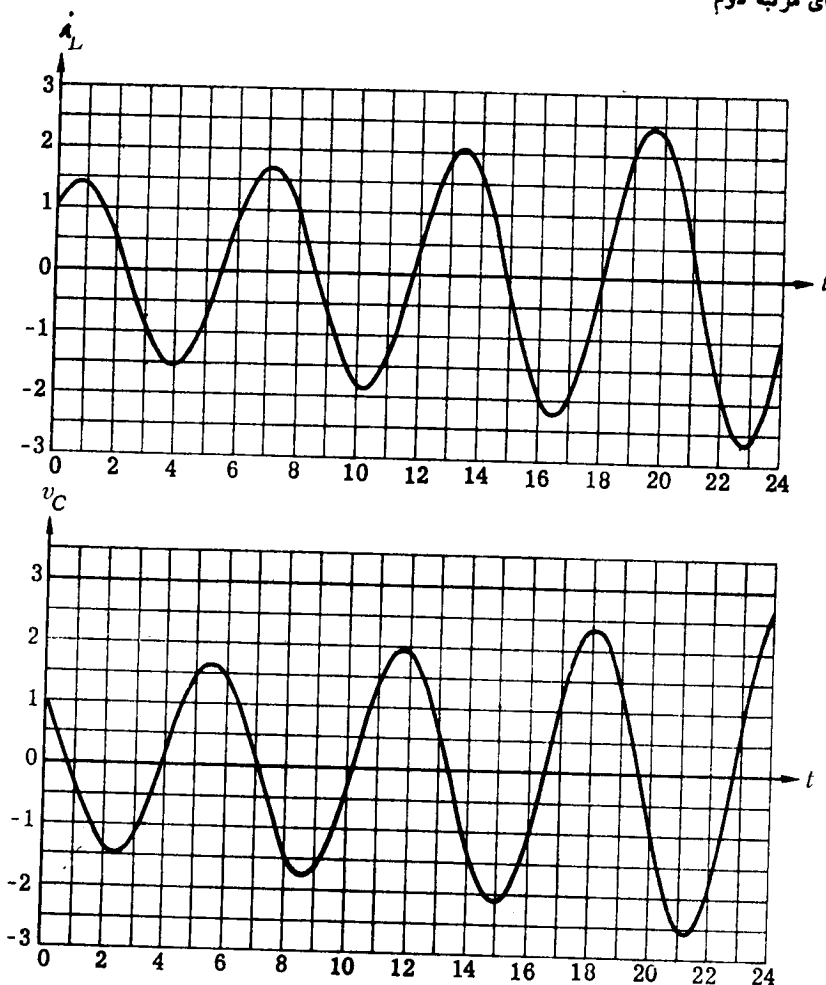
درک این پاسخ‌ها حائز کمال اهمیت است. مقاومت خطی دارای مقاومت «منفی»، جزء «اکتیوی» است که بجای اینکه مانند مقاومت پسیو انرژی تلف نماید به سلف و خازن انرژی تحویل میدهد. بنابراین بدون هیچ ورودی، پاسخ‌ها پس از اینکه در اثر انرژی اولیه در سلف و / یا خازن شروع شدند میتوانند افزایش یابند. چنانکه قبلاً اشاره شده است، مقاومت خطی اکتیو تنها مدلی است که رفتار برخی از وسایل را در فاصله مشخص شده‌ای از ولتاژ و جریان بطور تقریبی نشان میدهد. اگر ولتاژها و جریانها خارج از این مقادیر مشخص شده افزایش یابند، محاسبات، دیگر رفتار فیزیکی واقعی مدار را نمایش نمیدهند. در اکثر موارد بایستی توصیف غیرخطی دستگاه را در نظر گرفت و نتایج ریاضی حاصل از فرض تقریب خطی را اصلاح نمود. چنانکه در بخش بعد نشان داده خواهد شد، ممکن است رفتار فیزیکی واقعی به نوسان غیر خطی منتهی شود و یا در موارد دیگر پاره‌ای از عناصر مدار نتوانند جریان زیاد را تحمل نموده و بالاخره بسوزند.

اکنون به تجزیه و تحلیل خطی خود برسیم و دو مورد مقاومت‌های خطی اکتیو و پسیو را باهم در نظر میگیریم. پاسخ‌های ورودی صفر مدارهای RLC موازی را میتوان به دسته تقسیم نمود.

«حالت اول» فرکانس‌های طبیعی در «نیمه چپ صفحه» قرار دارند، یعنی هر دو فرکانس طبیعی s_1 و s_2 «جزء‌های حقیقی منفی» دارند و این امروالتهای میرای شدید، میرای بحرانی و میرای ضعیف بخش ۱ را شامل میشود. بعلت وجود عامل نمایی میرا

۲۷۹

مداوهای مرتبه دوم



شکل ۳-۴- منحنی‌های i_L و v_C برای مدار RLC موازی شکل (۲-۴). به مقاومت اکتیو توجه کنید. فرض میشود که $|a| < \omega_0$ است

وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، پاسخ ورودی صفر به سمت صفر میل میکند. در فضای حالت وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، برای هر حالت اولیه مسیر حالت به سمت مبدأ میل میکند. چنین مداری را «پایدار مجانبی»^(۱) نامند. مسیرهای حالت شکل‌های (۳-۱) و (۳-۲) ب) مثالهای نوعی هستند. چون مفهوم پایداری مجانبی بی‌اندازه حایز اهمیت است یکبار دیگر آنرا تکرار

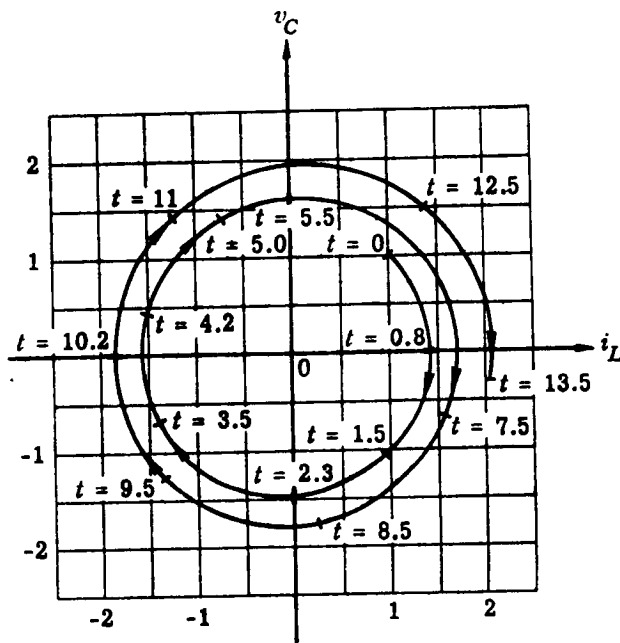
۱- Asymptotically stable

نظریه^۱ اساسی مدارها و شبکه‌ها

میکنیم. مداری را پایدار هجانبی گویند که مسیر فضایی حالت آن برای هر حالت اولیه و برای ورودی صفر، کراندار^(۱) بماند و وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، مسیر به سمت مبدأ میل کند. شرط کراندار بودن تنها برای پایداری مدارهای غیر خطی خاص حایز اهمیت است.

«حالت دوم» فرکانس‌های طبیعی روی «محور انگاری» قرار دارند، یعنی s_1 و s_2 دارای جزءهای حقیقی صفر میباشند. $s_1 = j2\pi f_0$ و $s_2 = -j2\pi f_0$. این حالت بی اتلاف است. پاسخ ورودی صفر یک سینوسی با فرکانس f_0 می باشد. در فضای حالت مسیر یک بیضی است که مرکز آن در مبدأ واقع است و مدار را «نوسانی» گویند.

«حالت سوم» فرکانس‌های طبیعی در «نیمه راست صفحه» قرار دارند، یعنی s_1 و s_2 دارای جزءهای حقیقی مثبت میباشند. این وضع متناظر با حالت مقاوت منفی است و وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، پاسخ ورودی صفر پیکران^(۲) میگردد. در فضای حالت وقتی که $t \rightarrow \infty$ ، مسیر به سمت بینهایت میل میکند و مدار را «ناپایدار» گویند. یک مثال نمونه‌ای مسیر شکل (۴-۱) می باشد. شکل موجهای متناظر i_L و v_C در شکل (۳-۴) نشان داده شده‌اند.



شکل ۴-۱ - مسیر حالت مدار RLC شکل (۳-۴)

۵- مدارهای غیر خطی و تغییر پذیر با زمان

هنگامیکه در فصل چهارم مدارهای مرتبه اول غیر خطی و تغییر پذیر با زمان را بررسی می‌کردیم متوجه شدیم که گاهی میتوان این مسائل را بطور تحلیلی نیز حل نمود. علاوه بر نشان دادن راه حل های ساده تحلیلی در فصل چهارم تأکید اصلی ما نشان دادن این واقعیت بود که در مدارهای غیر خطی خاصیت خطی بودن برقرار نبوده و در مدارهای تغییر پذیر با زمان نیز خاصیت تغییر ناپذیری با زمان برقرار نمیباشد. در مدارهای غیر خطی و تغییر پذیر با زمان مرتبه دوم نیز برای پاره‌ای از مدارهای بسیار خاص، روشهای تحلیلی وجود دارد. همچنین روش های ترسیمی گوناگونی موجود است که برای انواع زیادی از شبکه ها میتوان آنها را با مزایای بیشتری بکار برد. در کتاب ها، معادلات و روشهای خاص زیادی مانند معادله ون در پل^(۱)، معادله ساتیو^(۲)، معادله دافین^(۳)، روش خطوط هم شیب^(۴) و روش لینارد^(۵) وجود دارند، ولی ما این روش های مرسوم را ارائه نخواهیم کرد، زیرا اولاً، آنها موضوع های تخصصی ویژه ای بوده و پروشنی از حدود مطالب این کتاب خارج هستند، ثانیاً، در عصر کامپیوترهای دیجیتال، اینگونه معادلات و روش های خاص اهمیت خود را از دست داده اند، زیرا بجای در نظر گرفتن یک تقریب ناقص که بکمک آن مسأله را در قالب مسأله دیگری که حل آن معلوم است در آوریم، حل بهترین مدل معلوم هم ارزانتر بوده و هم مفهوم مهندسی بیشتری دارد.

در این بخش منظور ما ابتدا بیان رفتار فیزیکی پاره ای از مدارهای غیر خطی و سپس تشریح دقیق نوشتن معادلات دیفرانسیل اینگونه مدارهای غیر خطی میباشد. معادلاتی که از لحاظ محاسبات عددی راحت ترین شکل را دارند دستگاه های دو معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می باشند (بجای یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم معمولی). در مورد مدارهای خطی، این معادلات را معادلات حالت گویند، درحالیکه در مورد مدارهای غیر خطی آنها را

۱- van der Pol

۲- Mathieu

۳- Duffin

۴- Isocline

۵- Liénard

«معادلات بصورت نرمال^(۱) می‌نامند. یعنی :

$$(۵-۱) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, w)$$

که در آن $\mathbf{x}$ نمایشگر برداری است که مولفه‌های آن متغیرهای انتخاب شده شبکه باشند (ولتاژها، جریان‌ها، بارها و شارها)، w نشان دهنده ورودی و $\mathbf{f}$ تابعی با مقدار برداری^(۲) است. معادله (۵-۱) تعمیم معادله حالت خطی زیر است :

$$(۵-۲) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}w$$

که در بخش ۲ درباره آن بحث شد. چنانکه قبلاً گفته شد، برای کارهای عددی می‌توان روش انتگرال‌گیری مرحله به مرحله را بکار برد. دو مثال زیر این نکات را روشن می‌سازند.

مثال ۱- مدار RLC موازی نشان داده شده در شکل (۵-۱) که در آن سلف و خازن، خطی و تغییر ناپذیر با زمان بوده ولی مقاومت یک عنصر غیر خطی با مشخصه نشان داده شده در شکل می‌باشد را در نظر بگیرید. ممکن است در بعضی موارد مشخصه غیر خطی با یک چند جمله‌ای بصورت زیر تقریب گردد :

$$(۵-۳) \quad g(v) \approx -\alpha v + \beta v^3$$

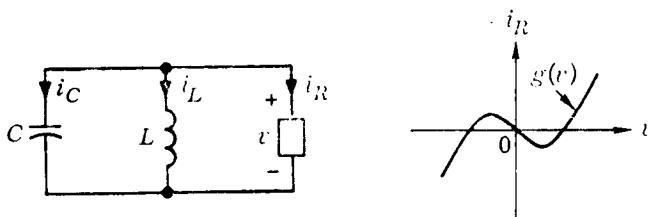
که در آن α و β ثابت‌هایی هستند که برای برازاندن^(۳) منحنی شکل (۵-۱) انتخاب می‌شوند. ابتدا می‌توان ولتاژ v را به جریان سلف بصورت زیر ارتباط داد :

$$(۵-۴) \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{v}{L} \quad i_L(0) = I_0$$

پس با نوشتن معادله KCL برای مدار داریم :

$$i_C = -i_L - i_R$$

و یا :



شکل ۵-۱- نوسان ساز غیر خطی با یک مقاومت غیر خطی که مشخصه‌اش در صفحه $v i_R$

نشان داده شده است

$$(۵-۵) \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{i_L}{C} - \frac{g(v)}{C} \quad v(0) = V_0$$

با ترکیب معادلات (۵-۴) و (۵-۵) معادله‌ای بصورت نرمال خواهیم داشت :

$$(۵-۶) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{v}{L} \\ -\frac{i_L}{C} - \frac{g(v)}{C} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

با حالت اولیه :

$$(۵-۷) \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} i_L(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_0$$

بامعلوم بودن حالت اولیه $\mathbf{x}_0$ ، اعداد L و C و مشخصه $g(\cdot)$ ، میتوان جواب را بوسیله روش مرحله بمرحله گفته شده در بخش ۳ بدست آورد. در این روش باحالت اولیه داده شده $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ در (۵-۷) شروع کرده و حالت $\mathbf{x}(\Delta t)$ در زمان Δt را بوسیله معادله (۲-۱۷) محاسبه میکنیم. بنابراین :

$$\mathbf{x}(\Delta t) \approx \mathbf{x}(0) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \Delta t$$

و سپس چنین ادامه میدهیم :

$$\mathbf{x}(2\Delta t) \approx \mathbf{x}(\Delta t) + \mathbf{f}[\mathbf{x}(\Delta t)] \Delta t$$

بنابراین میتوان مسیر را در فضای حالت یعنی صفحه $i_L v$ رسم نمود. دو نمونه از این مسیرها در شکل (۲-۵) ارائه شده است. مسیر اول که در شکل (۲-۵ الف) نشان داده شده است حالت اولیه زیر را دارد:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

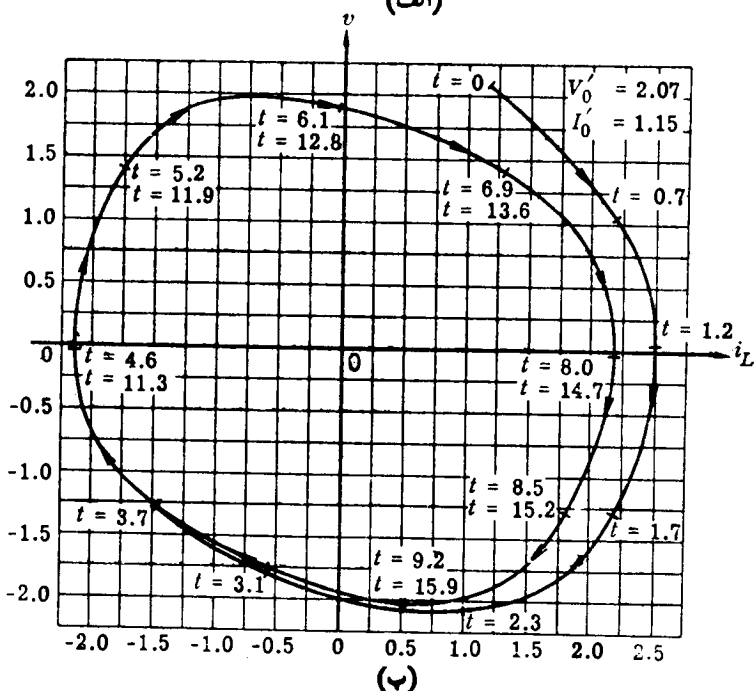
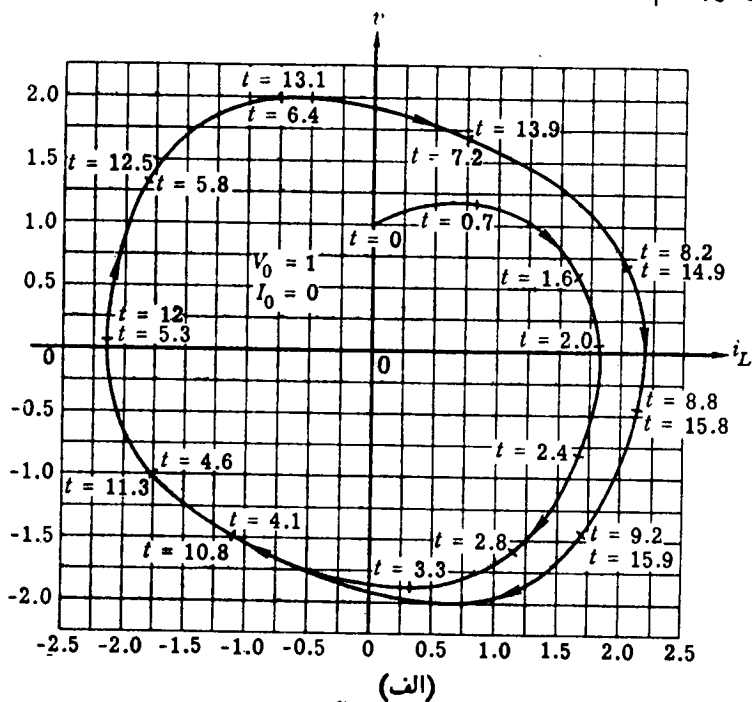
توجه کنید که با افزایش t مسیر بسمت منحنی بسته‌ای که «سیکل حد^(۱)» خوانده میشود میل میکند و این امر لازم میدارد که پس از مدتی، پاسخ ورودی صفر مدار غیرخطی، فوق‌العاده بیک حرکت تناوبی نزدیک شود یعنی بالاخره هردو شکل موج $i_L(0)$ و $v(0)$ بصورت توابع تناوبی از زمان درمیآیند. در شکل (۲-۵ ب)، از یک حالت اولیه متفاوت شروع میکنیم:

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} I_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.15 \\ 2.07 \end{bmatrix}$$

مشاهده این نکته قابل توجه است که در این حالت با افزایش t مسیر از بیرون بسمت «همان» سیکل حد میل میکند.

تبصره ۵ - باید خاطر نشان ساخت که تفاوت‌های مشخصی بین پاسخ ورودی صفر یک مدار خطی و پاسخ ورودی صفر یک مدار غیرخطی وجود دارد. مدار LC موازی خطی (حالت بی‌اتلاف) که با حالت اولیه دلخواهی شروع میشود بلافاصله به نوسان سینوسی میرسد و بعلاوه دامنه‌های نوسان i_L و v به حالت اولیه بستگی دارند. مدار غیرخطی پس از یک حالت گذرا به حالت نوسانی میرسد و در این مثال بنظر نمیآید که دامنه نوسان به حالت اولیه بستگی داشته باشد.

«تقریب خطی تکه‌ای» اکنون رفتار فیزیکی مدار را بر مبنای تقریب خطی تکه‌ای مشخصه مقاومت غیر خطی بیان میکنیم. دامنه تغییرات ولتاژ در دوسر مقاومت در شکل (۲-۵ الف) رابه سه ناحیه تقسیم میکنیم. در ناحیه ۱، یعنی آنجائیکه $-E_1 \leq v < -\infty$ است مشخصه مقاومت غیر خطی را با خط مستقیمی با شیب مثبت $\frac{1}{R_1}$ که محور i_R را



شکل ۲-۵- مسیرهای نوسان ساز غیر خطی شکل (۱-۵) . برای هردو شرایط اولیه میکل حد یکسانی بدست میآید

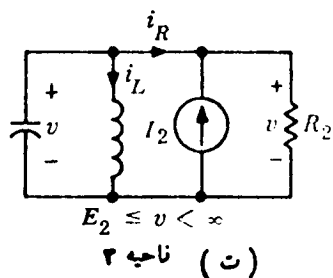
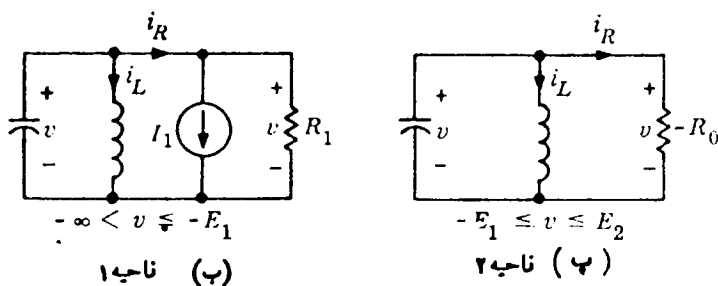
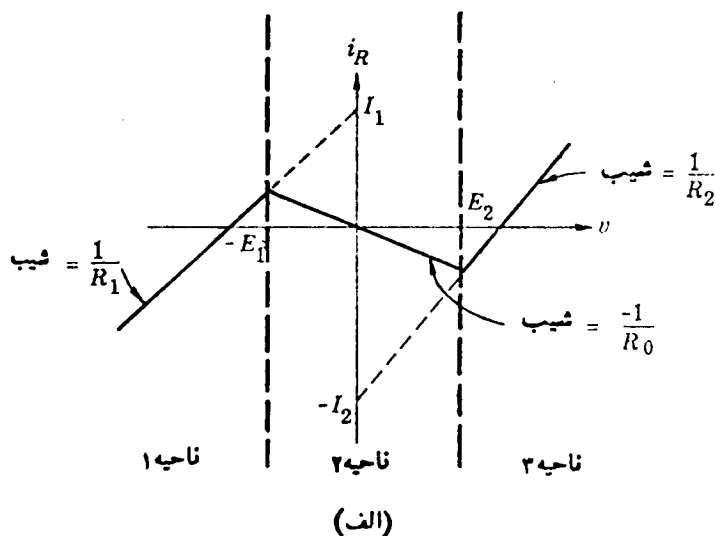
نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

در نقطه‌ی بعرض I_1 قطع میکند تقریب میکنیم. بنابراین مقاومت غیر خطی در ناحیه ۱ را میتوان با اتصال موازی یک مقاومت خطی با مقاومت مثبت R_1 و یک منبع جریان ثابت I_1 جایگزین کرد. این جایگزینی در مدار معادل شکل (۳-هـ) نشان داده شده است. در ناحیه ۲، یعنی آنجائیکه $E_1 < v < E_2$ است مشخصه مقاومت غیر خطی را با خط مستقیمی که از مبدأ گذشته و شیب منفی $-\frac{1}{R_0}$ دارد مطابق شکل (۳-الف) تقریب میکنیم (توجه کنید که $R_0 > 0$). بنابراین مقاومت «اکتیو» غیرخطی در ناحیه ۲ را میتوان با یک مقاومت خطی با مقاومت «منفی» R_0 جایگزین کرد. این جایگزینی در مدار معادل شکل (۳-پ) نشان داده شده است. در ناحیه ۳، یعنی آنجائیکه $E_2 < v < \infty$ است مشخصه مقاومت غیر خطی را با خط مستقیمی با شیب مثبت $\frac{1}{R_2}$ که محور i_R را در نقطه‌ای بعرض $-I_2$ قطع میکند (توجه کنید $I_2 > 0$ است) تقریب میکنیم. بنابراین مقاومت غیر خطی در ناحیه ۳ را میتوان با اتصال موازی یک مقاومت خطی با مقاومت مثبت R_2 و یک منبع جریان ثابت I_2 جایگزین کرد. این جایگزینی در مدار معادل شکل (۳-ت) نشان داده شده است. بسته به ولتاژ دوسر مقاومت غیر خطی، یکی از سه مدار معادل تقریبی شکل (۳-هـ) را بایستی بکار برد.

با آشنایی که به تجزیه و تحلیل مدارهای RLC «خطی» موازی مرتبه دوم داریم، میتوان بهسولت مشخصه‌های مدار را در هر یک از سه ناحیه مقاومت غیر خطی تعیین نمود. مسأله بعدی ما تعیین رفتار مدار در مرزهای^(۱) دو ناحیه خواهد بود. گیریم که حالت اولیه مدار $i_L = 2$ و $v = 0$ باشد که فرض میشود در ناحیه ۲ قرار گیرد. مدار RLC خطی موازی را که در آن مقاومت خطی و اکتیو است میتوان (مانند بخش قبل) تجزیه و تحلیل نمود. مسیر، برای این مدار خطی از (۲، ۰) شروع شده و از مبدأ دور میشود و وقتی که $t \rightarrow \infty$ چون مدار ناپایدار است، مسیر باید به بینهایت برسد. معه‌ذا در لحظه t_1 مسیر به نقطه‌ای میرسد که در آن E_2 یا $-E_1 = v(t_1)$ بوده و تقریب مقاومت منفی دیگر معتبر نخواهد بود. پس از اینکه مسیر از نقطه $[v(t_1), i_L(t_1)]$ میگذرد، در ناحیه ۱ و یا در ناحیه ۳ خواهیم بود و برای نمایش دستگاه لازم است ترکیب مقاومت پسو خطی و منبع جریان ثابت بکار برده شود. بنابراین، بسته

باینکه $v(t_1)$ مساوی $-E_1$ یا $+E_2$ باشد، مدار از تقریب خطی تکه‌ای شکل (۳-ه) به شکل (۳-ب) یا شکل (۳-ت) برمیگردد.

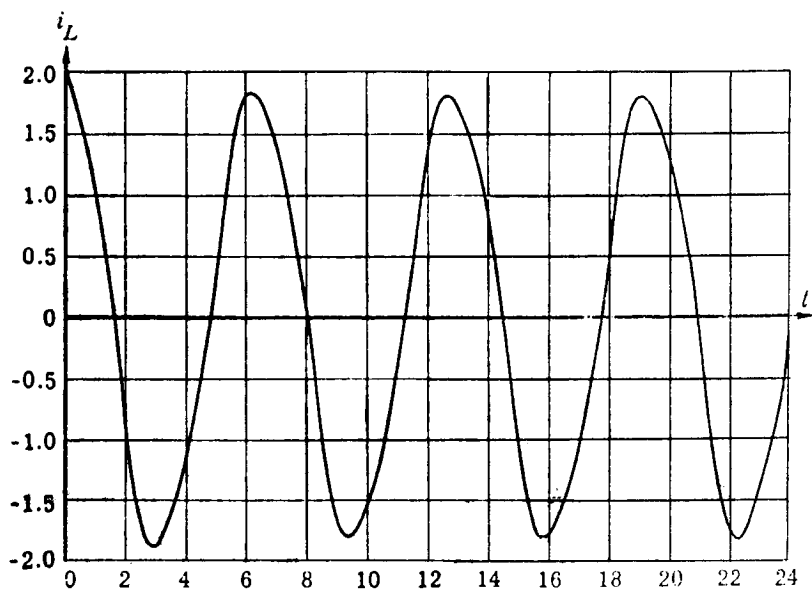
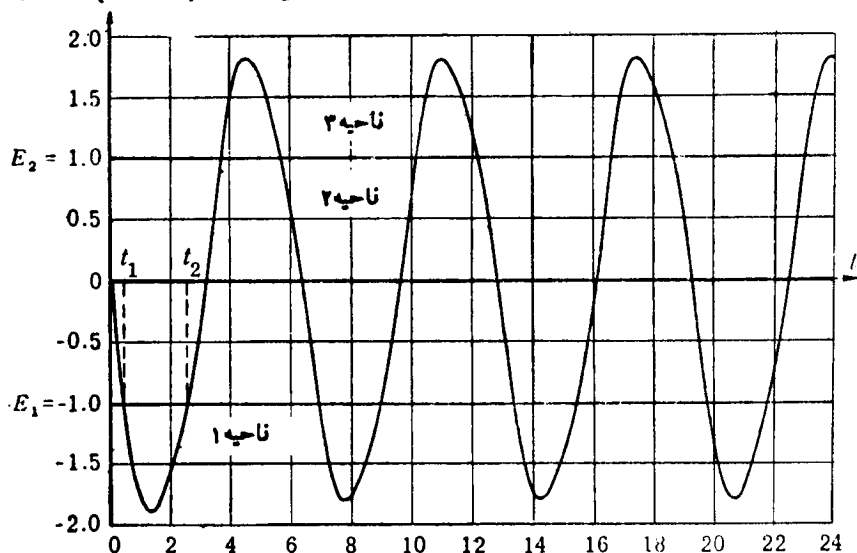
فرض کنید شکل موج واقعی ولتاژ مطابق شکل (۳-ه) باشد. در زمان $t=0$ دستگاه در ناحیه ۲ است و در $t=t_1$ ولتاژ بمقدار $-E_1$ میرسد. بنابراین برای $t > t_1$ دستگاه در ناحیه ۱ است و بایستی مدار شکل (۳-ب) را بکاربرد و پاسخ کامل را



شکل ۳-۵- تقریب خطی تکه‌ای نومان ساز غیر خطی

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

برای حالت اولیه داده شده $(v(t_1), i_L(t_1))$ ، که در آن $v(t_1) = -E_1$ است محاسبه نمود. پاسخ را میتوان به‌سهولت با مدار معادل خطی شکل (۳-۵) ب محاسبه



شکل ۴-۵- شکل موجهای v و i_L برای تقریب نشان داده شده در شکل (۳-۵)،

در اینجا $E_1 = E_2 = 1$ ولت است

مداوهای مرتبه دوم

۲۸۹

کرد. این پاسخ در شکل (۵-۴) که در آن v و i_L بر حسب زمان رسم شده‌اند نشان داده شده است. در $t = t_p$ مجدداً ولتاژ $v(t_p) = -E_1$ است و برای $t > t_p$ به عمل در ناحیه ۲ برمیگردد، پس باید مدار معادل شکل (۵-۳ پ) را بکار برد. بنابراین پاسخ مدار اکتیو شکل (۵-۳ پ) با حالت اولیه داده شده $(i_L(t_p), v(t_p))$ را که در آن $v(t_p) = -E_1$ است محاسبه میکنیم. دستگاه سپس در ناحیه ۳ کار کرده و پس از آن مجدداً به ناحیه ۲ برمیگردد. با ادامه این عمل، شکل موجهای ولتاژ و جریان بالاخره بیک حالت دائمی، یعنی یک رفتار تناوبی همچنانکه در شکل نشان داده شده است میرسند. در فضای حالت قسمتی از مسیر را که یک منحنی بسته باشد سیکل حد نامند.

مثال ۲- مدار LC موازی خطی شکل (۵-۵) را در نظر بگیرید که در آن خازن تغییر ناپذیر با زمان، ولی سلف تغییر پذیر با زمان است معادله KCL چنین است:

$$(۵-۸) \quad i_L + i_C = i_s$$

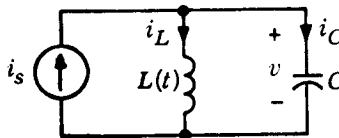
گیریم شار بعنوان متغیر شبکه بکار رود، در اینصورت:

$$(۵-۹) \quad i_L(t) = \frac{\Phi(t)}{L(t)}$$

$$(۵-۱۰) \quad v = \frac{d\Phi}{dt}$$

برای خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان داریم:

$$(۵-۱۱) \quad i_C = C \frac{dv}{dt}$$



شکل ۵-۵- مدار خطی تغییر پذیر با زمان، خازن C تغییر ناپذیر با زمان است ولی سلف

$L(t)$ با زمان تغییر میکند

نظریه^{*} اساسی مدارها و شبکه‌ها

از ترکیب این چهار معادله، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم که در آن Φ متغیر وابسته است بدست می‌آید. بنابراین:

$$(۵-۱۲) \quad C \frac{d^2 \Phi}{dt^2} + \frac{\Phi}{L(t)} = i_s(t)$$

اگر $L(t)$ یک تابع تناوبی بصورت زیر باشد:

$$(۵-۱۳) \quad L(t) = \frac{1}{a + b \cos \omega_1 t}$$

که در آن a و b هردو ثابت بوده و $b < a$ است، معادله (۵-۱۲) بصورت معادله معروف ماتیو درسی‌آید و چنانچه ω_1 بطور مناسبی انتخاب گردد میتوان نشان داد که نوسالی با دامنه افزایشی نامایی در مدار حاصل میشود. این پدیده را «نوسان پارامتری»^(۱) گویند. انرژی نوسان افزایشی توسط عاملی که موجب تغییر اندوکتانس میشود فراهم میگردد. در دوره‌های اولیه رادیو برای فراهم کردن اندوکتانس تغییر پذیر نوسان ساز از آلترناتورها^(۲) استفاده میشد. بحث درباره جزئیات این مطلب در فصل نوزدهم داده شده است.

اکنون همان مدار را از نقطه نظر فضای حالت در نظر میگیریم و بار q خازن و شار Φ سلف را بعنوان متغیرهای وابسته بکار می‌بریم. از ترکیب معادلات (۵-۸) و (۵-۹) داریم:

$$(۵-۱۴) \quad \frac{dq}{dt} = -\frac{\Phi}{L(t)} + i_s(t)$$

از ترکیب معادلات (۵-۱۰) و (۵-۱۱) داریم:

$$(۵-۱۵) \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{q}{C}$$

و بصورت ماتریسی داریم:

$$(۵-۱۶) \quad \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L(t)} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \Phi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} i_s(t)$$

با حالت اولیه :

$$(۱۷-۰) \quad \begin{bmatrix} q(0) \\ \Phi(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ \Phi \end{bmatrix}$$

میتوان مجدداً معادلات را با بکار بردن روش انتگرال گیری مرحله به مرحله بطور عددی حل نمود.

۶- مدارهای دوگانه و تشابهی

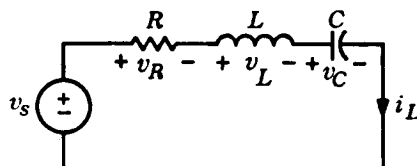
۶-۱- دوگانی

تاکنون مدارهای مرتبه دوم خطی، غیرخطی، تغییرناپذیر و تغییرپذیر با زمان را در نظر گرفتیم ولی خود رابه مدارهای RLC موازی محدود ساختیم. فرض کنید مثال ساده دیگری مانند مدار RLC سری را در نظر بگیریم. رفتار این مدار بطور دقیقی با رفتار مدار RLC موازی مربوط میشود.

مدار شکل (۶-۱) را که در آن اتصال سری یک مقاومت، سلف و خازن خطی تغییرناپذیر با زمان توسط یک منبع ولتاژ تحریک میشود در نظر بگیرید. تجزیه و تحلیل این مدار مشابه تجزیه و تحلیل مدار RLC موازی است. میخواهیم پاسخ کامل مدار یعنی پاسخی که ناشی از ورودی و حالت اولیه میباشد را تعیین کنیم. ابتدا لازم است معادله دیفرانسیلی برحسب یکی از سادهترین متغیرهای شبکه بدست آوریم. برای هر یک از سه شاخه، ولتاژ و جریان شاخه توسط معادله آن شاخه بهم مربوط میشوند. متغیرهای جریان بایستی در محدودیت های KCL صدق کنند یعنی :

$$(۱-۶) \quad i_L = i_R = i_C$$

در حالیکه متغیرهای ولتاژ بایستی محدودیت های KVL را برآورند :



شکل ۶-۱- مدار RLC با ورودی منبع ولتاژ

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$(۱-۲) \quad v_L + v_R + v_C = v_s$$

بنابراین معادله انتگرال دیفرانسیل زیر برحسب جریان حلقه (که با i_L مشخص شده) خواهیم داشت:

$$(۱-۳) \quad L \frac{di_L}{dt} + Ri_L + V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i_L(t') dt' = v_s$$

با شرط:

$$(۱-۴) \quad i_L(0) = I_0$$

اکنون میتوان معادلات (۱-۳) و (۱-۴) را برحسب i_L حل نمود. معادله اگر ولتاژ v_C متغیر مورد توجه باشد، معادله فوق بیک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم تبدیل میشود و تنها لازم است که معادلات شاخه‌ها:

$$(۱-۵) \quad v_C = V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i_L(t') dt' \quad i_L = C \frac{dv_C}{dt}$$

در (۱-۳) جایگزین گردد. معادله دیفرانسیل مرتبه دوم چنین است:

$$(۱-۶) \quad LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = v_s$$

با شرایط اولیه:

$$(۱-۷) \quad v_C(0) = V_0$$

و:

$$(۱-۸) \quad \frac{dv_C(0)}{dt} = \frac{i_L(0)}{C} = \frac{I_0}{C}$$

معادلات (۱-۶) تا (۱-۸) برای تمام مقادیر $t \geq 0$ ولتاژ خازن را کاملاً معین میکنند.

میتوان به‌سهولت تشابه میان تجزیه و تحلیل مدار RLC «مری» و مدار RLC «سوازی» را تشخیص داد. در واقع اگر تغییرات سازگاری در طرز نمایش معرفی کنیم، میتوان به معادلات همانندی رسید. شاید از معادلات (۱-۶) تا (۱-۸) تاکنون متوجه شده باشیم که ولتاژ خازن در مدار RLC «مری» همان نقش جریان سلف در مدار RLC

موازی را ایفا میکند [معادلات (۷-۱) تا (۹-۱) را ببینید] ، بنابراین چنانچه تغییر و تبدیل مناسبی بکار رود حل مدار RLC سری را میتوان از روی حل مدار RLC موازی بدست آورد. این مفهوم را که معمولاً «دوگانی^(۱)» نامند در مثالهای زیر تشریح میکنیم. بحث جزئیات آن در فصل دهم داده خواهد شد.

مثال ۱- مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان شکل (۲-۶) را در نظر بگیرید. میخواهیم آنرا با مدار RLC سری شکل (۱-۶) مقایسه کنیم. برای تعایز میان طرز نمایش و سیمبلیهای مدارهای سری و موازی علامت «کلاه^(۲)» ($\hat{\cdot}$) را برای مشخص کردن تمام پارامترها و متغیرهای مدار موازی بکار می‌بریم. مثلاً با نوشتن معادله KVL برای مدار سری بدست می‌آید:

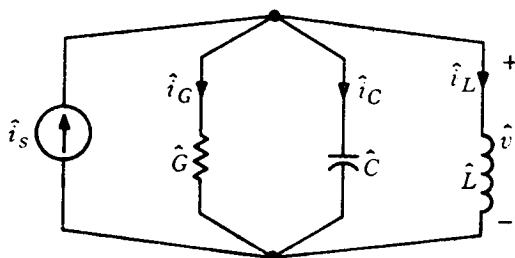
$$v_s = v_L + v_R + v_C$$

$$v_s = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' + v_C(0)$$

بطریق مشابه، با نوشتن معادله KCL برای مدار موازی بدست می‌آید:

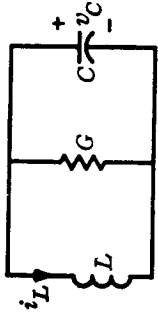
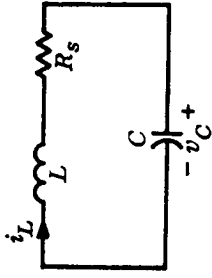
$$\hat{i}_s = \hat{i}_C + \hat{i}_G + \hat{i}_L$$

$$\hat{i}_s = \hat{C} \frac{d\hat{v}}{dt} + \hat{G} \hat{v} + \frac{1}{\hat{L}} \int_0^t \hat{v}(t') dt' + \hat{i}_L(0)$$



شکل ۲-۶- مدار RLC موازی با ورودی منبع جریان

جدول ۵-۱- پاسخ ورودی صفر يك مدار مرتبه دوم

 $i_L(0) = I_0$ $v_C(0) = V_0$ $\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{G}{C} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = 0$	 $i_L(0) = I_0$ $v_C(0) = V_0$ $\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R_s}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{1}{LC} v_C = 0$
مردم داده نرم يكسان ω_0 و α را دارند. رادمان $\frac{dx}{dt} + \alpha x = \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ $Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha}$ $\left. \begin{aligned} \omega_0 &\triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \alpha &\triangleq \frac{G}{2C} \end{aligned} \right\} \quad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{C/L}}{G} = \omega_0 CR$	$\left. \begin{aligned} \omega_0 &\triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \alpha &\triangleq \frac{R_s}{2L} \end{aligned} \right\} \quad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\sqrt{L/C}}{R_s} = \frac{\omega_0 L}{R_s}$
حالت ۱ $\alpha > \omega_0$ یا $Q < 1/2$. حالات میرای شدید $(s_1 = -\alpha + \alpha_d, s_2 = -\alpha - \alpha_d)$ $i_L(t) = \frac{I_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) + \frac{V_0}{(s_1 - s_2)L} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t})$ $v_C(t) = I_0 \frac{s_1 s_2 L}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) + \frac{V_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t})$	حالت ۲ $\alpha < \omega_0$ یا $Q > 1/2$. حالات میرای ضعیف $(s_1 = -\alpha + j\omega_d, s_2 = -\alpha - j\omega_d)$ $i_L(t) = \frac{I_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) + \frac{V_0}{(s_1 - s_2)L} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t})$ $v_C(t) = I_0 \frac{s_1 s_2 L}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) + \frac{V_0}{s_1 - s_2} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t})$

۲ حالت $\alpha = \omega_0$ or $Q = \frac{1}{2}$. حالت میرای بحرانی ($s_1 = s_2 = -\alpha$)

$$i_L(t) = I_0(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t} + \frac{V_0}{\omega_0 L} \omega_0 t e^{-\omega_0 t}$$

$$v_C(t) = -I_0 \omega_0^2 L t e^{-\omega_0 t} + V_0(1 - \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$$

$$v_C(t) = V_0(1 + \omega_0 t)e^{-\omega_0 t} + \frac{I_0}{\omega_0 C} \omega_0 t e^{-\omega_0 t}$$

$$i_L(t) = -V_0 \omega_0^2 C t e^{-\omega_0 t} + I_0(1 - \omega_0 t)e^{-\omega_0 t}$$

۳ حالت $\alpha < \omega_0$ or $Q > \frac{1}{2}$. حالت میرای قسیف که $\omega_d \triangleq \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$ و $\sin \phi = \frac{\alpha}{\omega_0}$

$$i_L(t) = I_0 \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \phi) + \frac{V_0}{\omega_0 L} \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

$$v_C(t) = -I_0 \frac{\omega_0^2 L}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + V_0 \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \phi)$$

$$v_C(t) = V_0 \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \phi) + \frac{I_0}{\omega_0 C} \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t$$

$$i_L(t) = -V_0 \frac{\omega_0^2 C}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + I_0 \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \phi)$$

۴ حالت $\alpha = 0$ or $Q = \infty$. حالت بدون اتلاف ($s_1 = j\omega_0$, $s_2 = -j\omega_0$)

$$i_L(t) = I_0 \cos \omega_0 t + \frac{V_0}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t$$

$$v_C(t) = -I_0 \omega_0 L \sin \omega_0 t + V_0 \cos \omega_0 t$$

$$v_C(t) = V_0 \cos \omega_0 t + \frac{I_0}{\omega_0 C} \sin \omega_0 t$$

$$i_L(t) = -V_0 \omega_0 C \sin \omega_0 t + I_0 \cos \omega_0 t$$

اکنون فرض کنید که $L=\hat{C}$ و $R=\hat{G}$ و $C=\hat{L}$ و $v_C(0)=\hat{i}_L(0)$ باشد. در این صورت دو معادله دارای ضرایب یکسان بوده و تنها از لحاظ طرز نمایش باهم متفاوت اند. بالتجیه اگر برای تمام مقادیر $t \geq 0$ ، روابط $i(0)=\hat{v}(0)$ و $v_s(t)=\hat{i}_s(t)$ نیز برقرار باشد، پاسخ‌ها یکسان خواهند بود، یعنی برای تمام مقادیر $t \geq 0$ ، $i(t)=\hat{v}(t)$ است. این دو مدار را «دوگان»^(۱) نامند. بویژه هر دو مدار پاسخ‌های ضربه و پله همانند خواهند داشت. لیست پاسخ‌های ورودی صفر هر مدار در جدول (۱-۵) داده شده است.

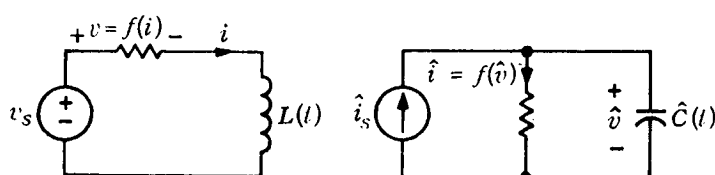
مثال ۲- برای اینکه دو مدار دوگان باشند، لازم نیست که حتماً «خطی» و «تغییر ناپذیر با زمان» باشند. دو مدار شکل (۶-۳) را در نظر بگیرید. سلف خطی تغییر پذیر با زمان مدار اول برای هر مقدار t با شیب مشخصه $L(t)$ آن مشخص میشود. بطریق مشابه خازن خطی تغییر پذیر با زمان مدار دوم با $\hat{C}(t)$ مشخص میگردد. مقاومت غیر خطی مدار اول با تابع $f(\cdot)$ مشخص میشود که منحنی آن همان مشخصه مقاومت است که در آن v برحسب i رسم میشود. مقاومت غیر خطی مدار دوم بوسیله همان منحنی مشخص میشود، بشرطیکه در مشخصه آن $\hat{i}$ برحسب $\hat{v}$ رسم گردد (به تعویض جریان و ولتاژ توجه کنید). بعبارت دیگر، هر دو مقاومت دارای مشخصه‌هایی هستند که با یک منحنی توصیف میگردد بشرطیکه مشخصه اول در صفحه $i\hat{v}$ و مشخصه دوم در صفحه $\hat{i}\hat{v}$ رسم شده باشند. اگر جریان داخل مقاومت اول i باشد ولتاژ دوسر آن $f(i)$ بوده، و اگر ولتاژ دوسر مقاومت دوم $\hat{v}$ باشد جریان داخل آن $f(\hat{v})$ است. برای مدار سری با استفاده از KVL داریم:

$$v_s(t) = \frac{d}{dt} [L(t)i(t)] + f(i(t))$$

برای مدار موازی با استفاده از KCL داریم:

$$\hat{i}_s(t) = \frac{d}{dt} [\hat{C}(t)\hat{v}(t)] + f(\hat{v}(t))$$

فرض کنید که برای هر مقدار $t \geq 0$ ، $L(t)=\hat{C}(t)$ باشد. در این صورت دو معادله



شکل ۳-۶= دو مدار دوگان، توجه کنید که مقاومت ها غیر خطی هستند

بالا دارای شکل یکسان بوده و این دو مدار، «دوگان» خوانده میشوند. بالنتیجه چنانچه حالت‌های اولیه یکسان بوده $[i(0) = \hat{v}(0)]$ و ورودی‌ها نیز دارای شکل موج مشابه باشند [برای همه مقادیر $t \geq 0$ ، $v_s(t) = \hat{v}_s(t)$ ، پاسخ‌ها همانند خواهند بود، یعنی شکل موج $i(0)$ که برای $t \geq 0$ تعریف میشود همانند شکل موج $\hat{v}(0)$ است که برای $t \geq 0$ تعریف میگردد.

اکنون این دو مثال را بررسی نموده و مشاهده میکنیم که میان آنها تناظرهای یک‌یک زیادی وجود دارد. معادله KVL یک مدار، متناظر با معادله KCL مدار دیگر است. حلقه یکی از مدارها متناظر با گرهی از مدار دیگر است. جدول زیر اصطلاحات دوگان نوعی را نشان میدهد.

KVL	KCL
جریان	ولتاژ
حلقه	گره همراه با دسته شاخه‌هایی که بان گره وصل اند
اجزاء بطور سری	اجزاء بطور موازی
سلف	خازن
مقاومت	مقاومت
منبع ولتاژ	منبع جریان

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

توجه باین نکته حایز اهمیت است که پاره‌ای از این تناظرها به «خواص گراف»^(۱) مربوط بوده درحالیکه برخی دیگر به «ماهیت شاخه‌ها» مربوط است. بنابراین در وجود آوردن دوگانی باید مفهوم گراف‌های دوگان نیز معرفی شود. بحث کامل این موضوع در فصل دهم داده خواهد شد. در حال حاضر می‌خواهیم تنها روی این حقیقت تأکید کنیم که مفهوم دوگانی در نظریه مدارها اهمیت زیادی دارد و میتوان جزئیات بسیاری از مدارها را بشرطیکه خصوصیات مدار دوگان معلوم باشد بدون تجزیه و تحلیل بخوبی درک کرد. در ضمن درس، گاه‌آ از مفهوم دوگانی استفاده خواهیم کرد.

۶-۲- تشابه‌های الکتریکی و مکانیکی

ما در مکانیک کلاسیک با حرکت‌های هارمونیک ساده، نوسانی میرا و نمایی میرا برخورد کرده‌ایم که کاملاً مشابه آنچه که تا بحال در این درس مطالعه کرده‌ایم می‌باشند. اکنون اجزاء اساسی مکانیکی و طرز تشکیل معادلات در سیستم‌های مکانیکی را مرور نموده و تشابه آنها را با مدارهای الکتریکی بررسی می‌کنیم.

مثال ۳- سیستم مکانیکی شکل (۶-۴) را در نظر بگیرید که در آن جسمی بجرم M بوسیله فنری با ضریب فنریته^(۲) K بدیوار بسته شده است. این جسم توسط نیرویی که با f_s مشخص می‌شود کشیده می‌شود. سطح تماس میان جسم و زمین دارای نیروی مالشی است که حرکت جسم را کند می‌نماید و در هر لحظه از زمان در خلاف جهت سرعت اثر میکند. میتوان معادله حرکت جسم را با استفاده از دیاگرام جسم آزاد^(۳) مطابق شکل (۶-۴) نوشت. فرض کنید f_K نیرویی باشد که فنر روی جسم اعمال میکند و گیریم f_B نیروی مالشی باشد، در این صورت نیروی کل که روی جسم اثر میکند مساوی $f_s - f_K - f_B$ است و این نیرو بموجب قانون نیوتن^(۴) مساوی مشتق مقدار حرکت است. بنابراین:

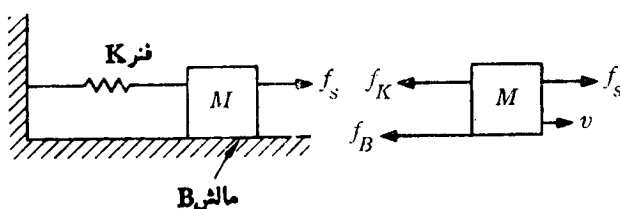
$$(۶-۹) \quad f_s - f_K - f_B = \frac{d}{dt} Mv$$

۱- Graph

۲- Spring Constant

۳- Free - body

۴- Newton



شکل ۴-۶- سیستم مکانیکی و دیاگرام جسم آزاد آن

که در آن v سرعت در جهت نیروی f_s است. این حقیقت بسیار معروف است که نیروی مالش تابعی از سرعت بوده و بصورت $f_B(v)$ مشخص میگردد، درحالیکه نیروی الاستیکی^(۱) تابعی از تغییر مکان^(۲) x است که با $f_K(x)$ بیان میشود. گیریم معادله (۶-۹) را مجدداً بصورت زیر بنویسیم:

$$(۶-۱۰) \quad f_s = f_K(x) + f_B(v) + \frac{d}{dt} Mv$$

اکنون اتصال سوازی یک مقاومت، یک سلف، یک خازن و یک منبع جریان i_s را در نظر میگیریم. میتوان معادله KCL را چنین نوشت:

$$(۶-۱۱) \quad i_s = i_L(\Phi) + i_R(\hat{v}) + \frac{d}{dt} C\hat{v}$$

که در آنجا $C\hat{v}$ بار خازن خطی است و

$$\Phi(t) = \Phi(0) + \int_0^t \hat{v}(t') dt'$$

شار سلف غیر خطی است. $i_L(0)$ و $i_R(0)$ بترتیب جریان داخل سلف بصورت تابعی از شار و جریان داخل مقاومت بصورت تابعی از ولتاژ را نشان میدهند. در سیستم

مکانیکی $v = \frac{dx}{dt}$ سرعت است و

$$x = x(0) + \int_0^t v(t') dt'$$

تغییر مکان می‌باشد. بعلاوه، اگر $f_s = i_s$ ، $f_K = i_L$ ، $f_B = i_R$ و $M = C$ باشد دو معادله همانند بوده و مدار RLC سوازی را مشابه الکتریکی^(۱) می‌ستیم مکانیکی نامند. متغیر $\hat{v}$ (ولتاژ) در مدار تشابهی مانند متغیر مکانیکی v (سرعت) رفتار می‌نماید. "مفهوم تشابهی نظیر مفهوم دوگانی است بجز اینکه تشابه معمولاً"، تنها معادل بودن دینامیکی دو سیستم را لازم می‌دارد درحالی‌که دوگانی بودن، علاوه بر این تشابه، ارتباط توپولوژیکی را نیز ایجاب می‌کند. برای بیان و درک بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، اغلب استفاده از ایده تشابهی مفید است زیرا افراد بسته به آموزش و تجربه خود همواره با نوعی از این سیستم‌ها آشنایی بیشتری دارند. چنانکه گفته شد مفهوم تشابهی تنها به سیستم‌های خطی تغییر ناپذیر با زمان محدود نمی‌شود. متغیرها و اجزاء مشابه در جدول‌های زیر خلاصه شده‌اند.

سیستم‌های مکانیکی	مدارهای الکتریکی
نیرو f_s	جریان i_s
سرعت v	ولتاژ $\hat{v}$
تغییر مکان x	شار Φ
قعر	سلف
مالش	مقاومت
جرم	خازن

۳۰۱

مدارهای مرتبه دوم

بعلاوه، چنانچه سه جزء اصلی خطی و تغییر ناپذیر با زمان باشند، روابط تشابهی آشنای زیر بدست می‌آیند:

سیستم‌های مکانیکی	مدارهای الکتریکی
جرم $f = M \frac{dv}{dt}$	خازن $i = C \frac{d\hat{v}}{dt}$
مالش $f = Bv$	رسانا $i = G\hat{v}$
فنر $f(t) = f(0) + K \int_0^t v(t') dt'$	سلف $i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t \hat{v}(t') dt'$

این دسته از کمیت‌های تشابهی تنها دسته ممکن نمیباشند و بخصوص اگر بجای ارتباط دادن سیستم مکانیکی به مدار RLC «سوازی»، آنرا به مدار RLC «سری» مربوط می‌کردیم، دسته متفاوت دیگری از کمیت‌های مشابه بدست می‌آوردیم. مثلاً می‌توانستیم ولتاژ v_s را متناظر با نیروی f_s و جریان i_s را متناظر با سرعت v در نظر بگیریم.

خلاصه

● پاسخ‌های ورودی صفر مدارهای RLC پسوی خطی تغییر ناپذیر با زمان مرتبه دوم، مطابق جدول (۵-۱) (صفحه‌های ۲۹۴ و ۲۹۵) به چهار دسته طبقه‌بندی میشوند.

● پاسخ‌های ورودی صفر یک مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان را میتوان برحسب مسیرهای حالت که در صفحه $i_L v_C$ برحسب پارامتر t رسم میشوند بیان نمود. حالت مدار در زمان t ، بردار $\mathbf{x}(t) \triangleq \begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix}$ و حالت اولیه آن بردار

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} i_L(0) \\ v_C(0) \end{bmatrix} \text{ است.}$$

● مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان مرتبه دوم (پسوی یا اکتیو) را میتوان نسبت به محل فرکانس‌های طبیعی و مساهیت مسیرهای حالت آن مطابق جدول (۵-۲) نیز طبقه‌بندی کرد.

جدول ۲-۵- طبقه بندی مدارهای RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان

پسیو	بی اتلاف	آکتیو
$G = \frac{1}{R} > 0$	$G = \frac{1}{R} = 0$	$G = \frac{1}{R} < 0$
مدار RLC موازی		
محل فرکانس‌های طبیعی	نیمه چپ صفحه s	محل فرکانس‌های طبیعی
مسیرهای حالت	پایدار مجانبی	نوسانی
	ناپایدار	نیمه راست صفحه s

- روش فضای حالت در تجزیه و تحلیل مدارهای غیر خطی و تغییر پذیر با زمان بسیار مفید است. معادلات بصورت $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, w, t)$ هستند که در آن $\mathbf{x}$ حالت و w ورودی است و میتوان جواب را با محاسبه مرحله به مرحله بدست آورد.
- مفهوم مدارهای دوگان براین حقیقت استوار است که معادلات توصیف کننده مدارهای دوگان شکل یکسانی دارند
- اگر یک سیستم مکانیکی مشابه یک مدار الکتریکی باشد، در اینصورت هر دو با معادلاتی که شکل یکسانی دارند توصیف میگردند.

مسائل

- ۱- محاسبه عبارت‌های نمایی با بکار بردن طرز نمایش بخش ۱ نشان دهید که :

$$\frac{d}{dt} e^{-\alpha t} \cos \omega_d t = -\omega_0 e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \Phi)$$

$$\frac{d}{dt} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t = \omega_0 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \Phi)$$

- ۲- فرکانس‌های طبیعی فرض کنید که فرکانس‌های طبیعی یک مدار خطی

تغییر ناپذیر با زمان یکی از صورت‌های زیر باشد:

الف - $s_1 = -2$ و $s_2 = 2$

ب - $s_1 = s_2 = -2$

پ - $s_1 = j2$ و $s_2 = -j2$

ت - $s_1 = 2 + j2$ و $s_2 = 2 - j2$

برای پاسخ های ورودی صفر، عبارتهای کلی بصورت توابع زمانی با مقدار حقیقی بیان کنید.

۳- ضریب Q برای یک مدار RLC داده شده با $Q = 0.0$ چند پریود لازم است صبر شود تا پوش پاسخ ورودی صفر به مقدار ۱۰ درصد، ۱ درصد، ۰.۱ درصد حداکثر مقدار آن در پریود اول برسد (در هر مورد جوابی با تقریب حداکثر نیم پریود بدست آورید).

۴- ضریب Q دو مدار RLC خطی تغییر ناپذیر با زمان را در نظر بگیرید که اولی یک مدار موازی با مقادیر اجزاء C و L ، R' و دومی یک مدار سری با مقادیر اجزاء R و L و C میباشد. اگر قرار باشد دو مدار Q یکسان داشته باشند چه رابطه ای بین R' و R وجود دارد؟ و تئیکه $Q \rightarrow \infty$ ، چه اتفاق می افتد؟

۵- تعیین ثابت های دلخواه از روی شرایط اولیه با داشتن یک مدار RLC موازی خطی تغییر ناپذیر با زمان با $\omega_0 = 10$ رادیان بر ثانیه و $Q = \frac{1}{4}$ و $C = 1$ فاراد، معادله دیفرانسیل را بنویسید. پاسخ ورودی صفر برای ولتاژ و دوسر خازن را تعیین کنید. شرایط اولیه $v_C(0) = 2$ ولت و $i_L(0) = 0$ آمپر میباشد.

۶- پاسخ های پله و ضربه برای مدار RLC موازی مسأله ه فرض کنید ورودی یک منبع جریان i_s باشد که بطور موازی بآن وصل شده است. پاسخ پله و پاسخ ضربه برای ولتاژ v_C را تعیین کنید.

۷- پاسخ کامل منبع جریان i_s رابطه موازی با مدار RLC مسأله ه وصل میکنیم و گیریم $i_s(t) = u(t) \cos 2t$ باشد. پاسخ حالت صفر و پاسخ گذرا را تعیین کنید.

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

۸- پاسخ حالت دائمی سینوسی، پاسخ گذرا و پاسخ کامل برای مدار RLC موازی مسأله ه گیریم که ورودی منبع جریان $i_s(t) = u(t) \cos 2t$ باشد که بطور موازی بان وصل شده است. برای شرایط اولیه $v_C(0) = 2$ ولت و $i_L(0) = 0$ آمپر پاسخ کامل را تعیین کنید. جزء گذرا و جزء حالت دائمی را صریحاً مشخص سازید و نشان دهید که پاسخ کامل، مجموع پاسخ ورودی صفر مسأله ه و پاسخ حالت صفر مسأله و میباید.

۹- حذف حالت گذرا منبع جریان i_s را بطور موازی با مدار RLC مسأله ه وصل میکنیم و گیریم $i_s(t) = u(t) \cos 2t$ باشد. آیا ممکن است شرایط اولیه را چنان انتخاب نمود که حالت گذرای موجود نباشد؟ در چنین صورتی شرایط اولیه لازم را تعیین کنید، در غیر اینصورت جواب خود را توجیه نمایید.

۱۰- حل معادلات دیفرانسیل معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

الف - $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + x = e^{-2t}$, $x(0) = 1$, $\frac{dx}{dt}(0) = -1$

ب - $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = 0$, $x(0) = 1$, $\frac{dx}{dt}(0) = 0$

پ - $\frac{d^2x}{dt^2} + x = \cos t$, $x(0) = 0$, $\frac{dx}{dt}(0) = 1$

ت - $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = tu(t)$, $x(0) = 0$, $\frac{dx}{dt}(0) = 0$

۱۱- حل معادلات دیفرانسیل ماتریسی و مسیرهای حالت معادلات

دیفرانسیل ماتریسی زیر را باروش تقریب متوالی حل کنید و مسیرهای حالت را رسم نمایید:

(الف) $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ب) $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

۱۲- پاسخ ضربه و تعویض منبع مدار RLC موازی خطی تغییرناپذیر با زمان با $\omega_0 = 1$ رادیان بر ثانیه و $Q = 10$ داده شده است. ورودی منبع ولتاژی است که بطور سری با سلف وصل شده است. برای ولتاژ v_C دو سر خازن، پاسخ ضربه را تعیین کنید (راهنمایی: از مدار معادل نرتن استفاده نمائید).

۱۳- پاسخ پله و پاسخ شیب برای مدار مسأله ۱۲، پاسخ پله و پاسخ شیب را تعیین کنید.

۱۴- خطی بودن پاسخ حالت صفر یک مدار RLC موازی خطی تغییرناپذیر با زمان داده شده است. پاسخ حالت صفر به ورودی سینوسی $i_1(t) = u(t) \cos 2t$ چنین است:

$$v_1(t) = e^{-t} + 2e^{-2t} + \cos(2t + 60^\circ) \quad t \geq 0$$

پاسخ کامل این مدار برای ورودی سینوسی $i_2(t) = 2u(t) \cos 2t$ ، و تئیکه مدار از حالت اولیه معینی شروع میکند چنین است:

$$v_2(t) = -e^{-t} + 2e^{-2t} + 2 \cos(2t + 60^\circ) \quad t \geq 0$$

اگر مدار با همان حالت اولیه شروع کند، پاسخ کامل را به ورودی سینوسی:

$$i_3(t) = u(t) \cos 2t$$

تعیین کنید.

۱۵- پاسخ ورودی صفر، معادله دیفرانسیل و مسیر حالت مدار شکل (مسأله ۱۰-۵) خطی و تغییرناپذیر با زمان است.

الف - معادله دیفرانسیلی با متغیر وابسته v_C بنویسید و شرایط اولیه مناسب را برحسب توابعی از $i_L(0)$ و $v_C(0)$ بیان کنید (راهنمایی: با بکار بردن متغیرهای v_C و i_L معادله گره را در گره ① و معادله حلقه برای i_L را بنویسید).

ب - پاسخ ورودی صفر $i_L(0)$ و $v_C(0)$ را محاسبه کنید.

پ - پاسخ ورودی صفر را بصورت یک بردار حالت، $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} i_L(0) \\ v_C(0) \end{bmatrix}$ بنویسید،

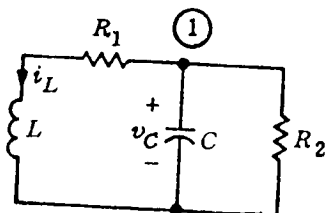
و مسیرهای حالت $\mathbf{x}_1(0)$ و $\mathbf{x}_2(0)$ متناظر با $\mathbf{x}_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\mathbf{x}_2(0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

را که در آن i_L در امتداد محور طول ها و v_C در امتداد محور عرضها باشد رسم کنید.

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

۳۰۹

ت- آیا مسیر $\mathbf{x}_1(0)$ خاصیت ویژه‌ای دارد؟ کدام مسیرهای دیگر، در صورتیکه وجود داشته باشند، این خاصیت مشابه را دارا می‌باشند؟



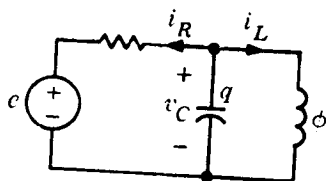
$$\begin{aligned} R_1 &= 4 \, \Omega & L &= 1 \, \text{H} \\ R_2 &= 2 \, \Omega & C &= \frac{1}{2} \, \text{F} \end{aligned}$$

شکل (مسئله ۵-۱۵)

۱۶- مسیر حالت مدار غیر خطی و انتگرال گیری تقریبی مدار RLC

غیر خطی تغییر ناپذیر با زمان شکل (مسئله ۵-۱۶) عناصری دارد که چنین توصیف می‌شوند. $i_R = \alpha v_R$ ، $q = \beta v_C + \gamma v_C^2$ که در آنجا $\alpha = 2$ مهو $\beta = 1$ فاراد، $\gamma = \frac{1}{4}$ فاراد بر ولت مربع و $\delta = \frac{1}{4}$ هانری است. منبعی که مدار را تحریک می‌کند ولتاژ $e(t) = \sin(0.2t)$ ولت را دارد و در زمان $t=0$ ولتاژ دو-ر خازن $v_C(0) = 2$ ولت و جریان داخل ملف $i_L(0) = -2$ آمپر است. با بکار بردن $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$ بعنوان بردار حالت، معادله حالت مدار را بنویسید و با استفاده از تقریب

خطی متوالی یعنی $\mathbf{x}[(n+1)\Delta t] \approx \mathbf{x}(n\Delta t) + \dot{\mathbf{x}}(n\Delta t)\Delta t$ با $\Delta t = 0.2$ ثانیه و $n = 0, 1, 2, \dots, 10$ ، مسیر فضای حالت را رسم کنید. i_L و v_C را بصورت توابعی از زمان رسم کنید.



شکل (مسئله ۵-۱۶)

۳۰۷

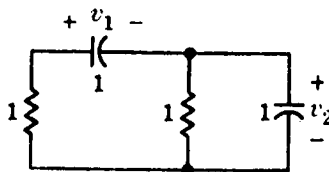
مدارهای مرتبه دوم

۱۷- تشکیل دادن معادلات دیفرانسیل و انرژی الف - در مدار شکل

(مسئله ۵-۱۷) معادلات دیفرانسیل را برای $v_1(t)$ و $v_2(t)$ تشکیل دهید.

ب- گیریم $g(t) = \frac{1}{\gamma} [v_1(t) + v_2(t)]$ باشد. ثابت کنید برای همه

مقادیر t ، $\frac{dg}{dt} \leq 0$ است.



شکل (مسئله ۵-۱۷)

۱۸- مدارهای غیر خطی، معادلات بصورت نرمال و انرژی الف -

برای مدار غیر خطی تغییر ناپذیر با زمان داده شده در شکل (مسئله ۵-۱۸) معادله دیفرانسیل

را بر حسب متغیرهای q و Φ بنویسید که در آن مشخصه سلف بصورت $i_L = \Phi + \Phi^2$

(Φ شار است) و مشخصه خازن بصورت $v_C = 2q$ (q بار است) داده شده است.

ب- گیریم در زمان t_0 مقادیر شار و بار ترتیب Φ_0 و q_0 باشند. انرژی ذخیره

شده در مدار چقدر است ؟

پ- گیریم در زمان t_0 ، $q=0$ و $\Phi=2$ باشد. برای $t \geq t_0$ حداکثر

مقدار $q(t)$ چقدر است ؟ (راهنمایی : آیا هیچ اتلاف انرژی در مدار وجود دارد؟)



شکل (مسئله ۵-۱۸)

۱۹- مشخص سازی حالت و مسیر حالت برای مدار RLC سری خطی

تغییر ناپذیر با زمان شکل (مسئله ۵-۱۹) ، $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$ را بعنوان بردار حالت بکاربرد

۳۰۸

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

تنها اطلاعاتی که از اندازه‌گیری انجام شده این مدار در دست است، مشتق زمانی بردار حالت در دو مورد متفاوت میباشد یعنی :

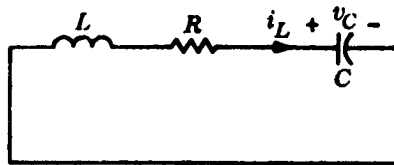
$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{در}$$

الف - مقادیر اجزاء R و L و C را تعیین کنید.

ب - مشتق بردار حالت در $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ را با دو روش محاسبه کنید. اول ،

از معادله $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ استفاده کنید. دوم ، مشتق نامعلوم را با ترکیب خطی مناسب مشتق‌های داده شده مساوی قرار دهید.

پ - شیب $\frac{dv_C}{di_L}$ مسیر فضایی حالت را در $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ حساب کنید.



شکل (مسأله ۵-۱۹)

۲۰- پاسخ ضربه ، پاسخ کامل و حالت دائمی سینوسی مدار نشان داده

شده در شکل (مسأله ۵-۲۰) از اجزاء خطی تغییر ناپذیر با زمان ساخته شده است. ولتاژ

e_s ورودی و ولتاژ v_C پاسخ آن است. مقادیر اجزاء $R_1 = 2$ اهم و $R_2 = 3$ اهم و $L = 1$ هنری و $C = 0.2$ فاراد میباشد.

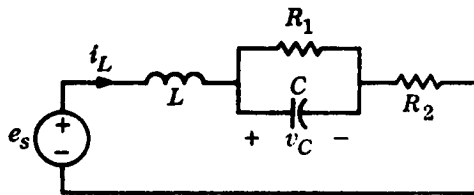
الف - پاسخ ضربه h را تعیین کنید.

ب - پاسخ کامل ناشی از ورودی $e_s(t) = 2$ و حالت اولیه $i_L(0) = 2$ آمپر

و $v_C(0) = 1$ ولت را محاسبه کنید.

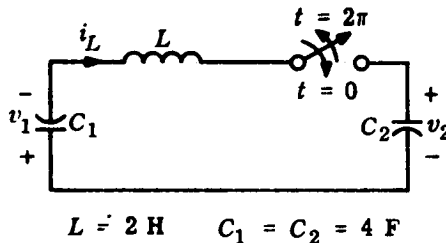
پ - برای ورودی $e_s = \cos 2t$ ، حالت دائمی سینوسی v_C ، i_L و v_{R_2} را

محاسبه و رسم نمایید. نتایج را بصورت توابع زمانی با مقدار حقیقی بیان کنید.



شکل (مسئله ۲۰-۵)

۲۰- مدار بی اتلاف و مسیر حالت مدار LC خطی تغییر ناپذیر با زمان شکل (مسئله ۲۰-۵) را در نظر بگیرید. قبل از زمان $t=0$ کلید باز بوده و ولتاژهای دوسر خازن ها بصورت $v_1=1$ ولت و $v_2=4$ ولت میباشند. در لحظه $t=0$ کلید را می بندیم و برای فاصله زمانی 2π ثانیه آنرا در این وضع نگاه میداریم و سپس در $t=2\pi$ ثانیه مجدداً آنرا باز کرده و پس از آن برای همیشه باز نگاه میداریم. برای $t > 2\pi$ ثانیه مقادیر v_1 و v_2 چقدر می باشد؟ مسیر حالت را در صفحه $i_L v_C$ رسم کنید $(v_C = v_1 + v_2)$. در مورد انرژی ذخیره شده در مدار پیش از زمان $t=0$ و پس از زمان $t=2\pi$ ثانیه چه میتوان گفت؟ (راهنمایی: نتایج انتخاب خاص این فاصله زمانی را تجزیه و تحلیل نمائید).



شکل (مسئله ۲۱-۵)

۲۲- مقاومت منفی و پاسخ ورودی صفر در مدار شکل (مسئله ۱۰-۵) مقاومت R_2 را به ۲ اهم تبدیل میکنیم.
الف - فرکانس های طبیعی مدار چیست؟
ب - چنانچه $i_L(0)=1$ آمپر و $v_C(0)=1$ ولت باشد پاسخ های ورودی صفر $i_L(0)$ و $v_C(0)$ را تعیین کنید.
پ - مسیر حالت را رسم کنید.

۳۹۰

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

۲۳- مدار دوسمان دوگان مدار شکل (مسأله ۱۰-۵) را رسم کنید و مقادیر

همه اجزاء آنرا مشخص سازید.

۲۴- تشابه مکانیکی و مدارهای دوسمان - برای سیستم مکانیکی شکل

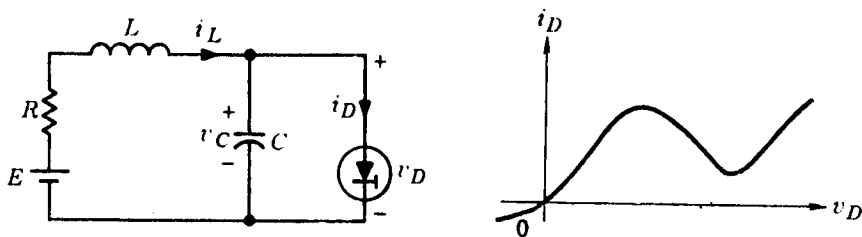
(۶-۴) دو مدار الکتریکی که مشابه‌های الکتریکی سیستم مکانیکی باشند رسم کنید.

۲۵- مدار غیر خطی و معادله دیفرانسیل بصورت نرمال مدار شکل

(مسأله ۲۰-۵) یک نمونه مدار نوسان ساز دیود تونلی است. این دیود را بصورت

مقاومتی که با مشخصه $i_D = g(v_D)$ معین میشود مدل میکنیم. معادله دیفرانسیل را

بصورت نرمال با متغیرهای v_C و i_L بنویسید :



شکل (مسأله ۲۵-۵)

فصل ششم

مبانی مدارهای خطی و تغییرناپذیر بازمان

در دو فصل پیش مدارهای مرتبه اول و مرتبه دوم را مطالعه کردیم و بسیاری از مفاهیم و تکنیک‌های اساسی را بدست آوردیم. در این فصل ابتدا برخی از نتایج مهم را خلاصه نموده و آنگاه به تعمیم بعضی از آنها می‌پردازیم. سپس به بررسی مقدماتی تجزیه و تحلیل گره و تجزیه و تحلیل مش در مورد مدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان خواهیم پرداخت و نشان خواهیم داد که نتایج این تجزیه و تحلیل منجر به توصیف ورودی - خروجی^(۱) بر مبنای یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام با ضرایب ثابت می‌گردد. همچنین روشی برای محاسبه پاسخ ضربه از معادله دیفرانسیل مرتبه n ام ارائه خواهد شد و آنگاه پاسخ‌های مربوط به ورودی‌های دلخواه را بررسی خواهیم کرد. بالاخره نمایش انتگرال کانولوشن^(۲) را دقیقاً بدست آورده و طرز محاسبه این انتگرال را با مثالهای متعدد روشن خواهیم ساخت.

۱- برخی تعاریف و خواص کلی

در فصل دوم سه جزء اصلی مدار یعنی، مقاوت، خازن و سلف را معرفی کردیم و یک طبقه بندی چهارگانه برای هر جزء قایل شدیم که عبارت بودند از: خطی بودن یا غیرخطی بودن، تغییرپذیر و یا تغییرناپذیر بازمان بودن.

برای تسهیل در بیان فرمول‌های آینده بازهم از این طبقه بندی چهارگانه یاد میکنیم. هر مدار با این خاصیت که هریک از اجزاء آن یک «عنصر خطی» و یا یک منبع ناپسته باشد یک مدار خطی نامیده میشود. به همین ترتیب هر مدار با این خاصیت که هریک از اجزاء آن یک «عنصر تغییرناپذیر بازمان» و یا یک منبع ناپسته باشد یک مدار تغییرناپذیر بازمان خواهد بود. بنابراین، یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان مداری است که هریک از اجزاء آن یک «عنصر خطی تغییرناپذیر بازمان» و یا یک منبع ناپسته

۱ - Input-Output description

۲ - Convolution integral

نظریه^۱ اساسی مدارها و شبکه‌ها

باشد. واضح است که اگر مداری خطی نباشد آنرا مدار غیر خطی و اگر مداری تغییرناپذیر با زمان نباشد، آنرا مدار تغییرپذیر با زمان نامند.

در این تعاریف، منابع ناپسته بایستی بطور جداگانه مورد بررسی قرار گیرند زیرا (۱) ولتاژ دوسر یک منبع ولتاژ و جریان یک منبع جریان در تجزیه و تحلیل مدار نقشی را بازی میکنند که بانقش سایر متغیرهای شبکه و یا اجزاء دیگر مدار تفاوت دارد، و (۲) تمام منابع ناپسته عناصر غیر خطی و تغییرپذیر با زمان هستند (مثلاً، یک منبع ولتاژ سینوسی میتواند بعنوان یک مقاومت غیر خطی تغییرپذیر با زمان مورد بررسی قرار گیرد زیرا مشخصه آن برای هر زمان i یک خط افقی در صفحه $i-v$ میباشد که عرض آن یک تابع سینوسی از زمان است، یعنی مشخصه آن خط راستی است که برای تمام زمانها از مبدأ «نمیگذرد»).

علاوه بر این بایستی تأکید نمود که مجموعه «تمام» ولتاژهای دوسر منابع ولتاژ ناپسته و «تمام» جریانهای داخل منابع جریان ناپسته بعنوان «ورودی‌های مدار» شناخته میشوند. بنابراین مداری که فقط شامل یک منبع ناپسته باشد «مدار با یک ورودی» خوانده میشود. در این فصل، تنها مدارهای با یک ورودی و با یک خروجی را مورد بررسی قرار خواهیم داد، یعنی مدارهایی که فقط شامل یک منبع ناپسته بوده و تنها یک متغیر (خروجی) است که باید محاسبه گردد. ورودی میتواند شکل موج ناشی از یک منبع ولتاژ ناپسته و یا یک منبع جریان ناپسته باشد. این شکل موج ممکن است بصورت یک ثابت، یک تابع پله، یک تابع ضربه، یک تابع سینوسی و یا هر تابع دلخواه دیگری از زمان باشد. خروجی که میتوان آنرا «پاسخ» مدار نیز نامید، میتواند بصورت ولتاژ یک شاخه بخصوص، جریان یک شاخه بخصوص و یا ترکیب خطی بعضی ولتاژ شاخه‌ها و جریان شاخه‌ها و یا بار روی یک خازن و یا شار^(۲) داخل یک سلف باشد.

برای تمام مدارهای فشرده که در این کتاب مورد بحث می‌باشند قادر خواهیم بود یک معادله دیفرانسیل و یا دستگاهی از معادلات دیفرانسیل را بطریقی بنویسیم که از حل آنها تمام ولتاژهای شاخه‌ها و جریانهای شاخه‌ها محاسبه گردند.

برای اینکه بتوانیم جواب منحصر بفرد دستگاه معادلات دیفرانسیل را بدست آوریم باید علاوه بر ورودی‌ها، شرایط اولیه^(۲) را نیز دقیقاً بدانیم. نحوه بیان این شرایط اولیه بستگی به طرز

نوشتن معادلات دیفرانسیل خواهد داشت. بهخصوص در فصل سیزدهم نشان خواهیم داد که اگر در لحظه اولیه، تمام ولتاژهای خازنها و جریانهای سلف‌ها معلوم باشند شرایط اولیه مطلوب بطور یکتا مشخص خواهند بود.

« هر مجموعه‌ی از شرایط اولیه که همراه با ورودی‌ها، برای تمام زمانهای $t \geq t_0$ ، تمام متغیرهای مدار را بطور یکتا مشخص سازد حالت مدار در زمان t_0 نامیده میشود ».

از بیان‌های فوق مشاهده میکنیم که حالت یک مدار در زمان t_0 همیشه میتواند مجموعه تمام ولتاژهای خازنها و جریانهای سلف‌ها در لحظه t_0 انتخاب شود. حالتی که در آن تمام شرایط اولیه صفر باشند حالت صفر^(۲) خوانده میشود. برای مدارهای خطی اگر تمام ورودی‌ها صفر بوده و مدار هم در حالت صفر باشد تمام متغیرهای شبکه از آن بعد برای همیشه صفر خواهند بود. وقتی ورودی در لحظه t_0 به مدار اعمال میشود، مجموعه شرایط اولیه در لحظه t_0 که برای یکتا مشخص نمودن متغیرهای شبکه لازم است، همانطور که قبلاً گفته شد، حالت مدار در لحظه t_0 خوانده میشود که بطور خلاصه آنرا « حالت اولیه^(۳) » میخوانیم. کلمه «اولیه» به حالت مدار در لحظه‌ای که ورودی اعمال میشود اشاره میکند.

پاسخ (خروجی) یک مدار را پاسخ حالت صفر^(۴) مینامیم اگر این پاسخ مربوط به مداری باشد که ورودی در لحظه دلخواه t_0 بآن اعمال شده و مدار قبل از اعمال این ورودی در حالت صفر بوده است (یعنی در لحظه t_0). همچنین پاسخ مداری را که ورودی آن بطور متحد، مساوی صفر باشد پاسخ ورودی صفر^(۵) خواهیم نامید. واضح است که پاسخ حالت صفر، تنها ناشی از ورودی آن است و بطریق مشابه، پاسخ ورودی صفر، تنها ناشی از شرایط اولیه می‌باشد. این پاسخ ناشی از انرژی ذخیره شده اولیه در مدار خواهد بود. پاسخ کامل^(۶) عبارت از پاسخ مدار به مجموع ورودی و شرایط اولیه خواهد بود.

در فصل‌های پیشی خواص مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان مرتبه اول و دوم را بررسی کردیم. بعداً خواهیم دید که این خواص برای هر مدار خطی تغییرناپذیر با زمان و یا تغییرپذیر با زمان نیز صادق است. برای مدارهای خطی (تغییرناپذیر یا تغییرپذیر با زمان) :

۱ - State of a circuit at time t_0

۲ - Zero state

۳ - Initial state

۴ - Zero-state response

۵ - Zero-input response

۶ - Complete response

۱- «پاسخ کامل» مجموع پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر میباشد.

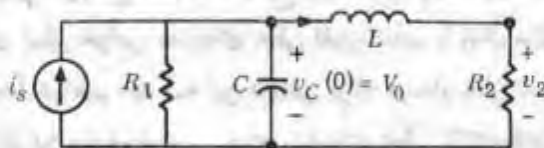
۲- «پاسخ حالت صفر» تابع خطی ورودی است.

۳- «پاسخ ورودی صفر» تابع خطی حالت اولیه میباشد.

۲- تجزیه و تحلیل گره و مش

درفصل سوم مدارهای ساده مقاومتی را که بصورت اتصال سری یا موازی عناصر بودند تجزیه و تحلیل نمودیم و برای آنها مدارهای معادلی بدست آوردیم. درفصل‌های چهارم و پنجم مدارهای شامل مقاومت، خازن و سلف را بررسی کردیم. این مدارها توپولوژی (۱) ساده‌یی داشتند بطوریکه یا مدار فقط شامل یک حلقه تنها بود که در اینصورت تنها یک معادله حلقه (KVL) رفتار مدار را مشخص میکرد و یا مدار فقط شامل دو گره بود که در اینصورت تنها یک معادله گره (KCL) رفتار مدار را مشخص مینمود. برای مدارهای با توپولوژی پیچیده لازم است روش‌های کلی و اصولی برای تجزیه و تحلیل آنها بدست آورد که این کار درفصل‌های نهم تا دوازدهم انجام شده است. در این بخش، مداری را که کمی مفصل‌تر از مداری است که درفصل پنجم مطالعه کردیم انتخاب میکنیم تا دو روش اساسی تجزیه و تحلیل مدار، یعنی تجزیه و تحلیل گره و تجزیه و تحلیل مش را تشریح نمائیم. برای شروع، مدار ساده شکل (۱-۲) را در نظر میگیریم که ورودی آن منبع جریان $i_L(t) = I_0$ و خروجی آن ولتاژ v_2 و دوسرمقاومت R_2 میباشد. حالت اولیه با $v_C(0) = V_0$ بیان شده و جهت‌های قرار دادی آنها در شکل نشان داده شده است.

$$i_L(t) = I_0$$



شکل ۱-۲- مثال ساده‌یی که تجزیه و تحلیل گره و تجزیه و تحلیل

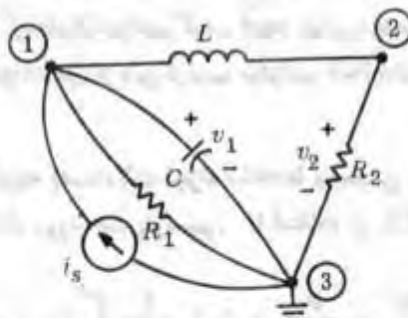
مش را تشریح میکند. منبع جریان i_s ، ورودی و

ولتاژ v_2 ، خروجی مدار میباشد.

۲-۱- تجزیه و تحلیل گره

اولین قدم در تجزیه و تحلیل گره شمارش تعداد گره‌های مدار می‌باشد. در این مورد سه گره وجود دارد که آنها را بصورت ① و ② و ③ علامت گذاری نموده ایم (به شکل (۲-۲) که تکرار شکل (۱-۲) بوده و برای تأکید گره‌ها می‌باشد مراجعه کنید).

واضح است که میتوان بین گره‌ها سه ولتاژ «جفت گره»^(۱) تعریف نمود که بترتیب v_{12} ، v_{23} ، v_{13} هستند. در اینجا این ولتاژها بترتیب ولتاژ شاخه‌هایی هستند که گره‌های ① و ②، ② و ③، ① و ③ را بهم وصل میکنند. از KVL میدانیم که مجموع ولتاژها در هر حلقه بایستی مساوی صفر باشد، بنابراین KVL یک محدودیت خطی میان ولتاژهای سه جفت گره ملزم می‌دارد. اگر $v_{13} = v_1$ و $v_{23} = v_2$ تعیین شود، $v_{12} = v_1 - v_2$ خواهد بود. معمولاً یک گره بنام «گره مبنا»^(۲) انتخاب میشود (بعضی اوقات گره مأخذ^(۳) و یا زمین هم خوانده شده و با علامت $\equiv$ مشخص میگردد). در اینصورت ولتاژ سایر گره‌ها نسبت باین گره مبنا را «ولتاژهای گره‌ها»^(۴) (یا ولتاژهای گره‌ها نسبت به مأخذ) مینامند. در مورد اخیر گره ③ بعنوان مبنا بوده و ولتاژهای گره‌ها v_1 و v_2 می‌باشند.



شکل ۲-۲- مدار شکل (۲-۱) مجدداً رسم شده است

تا علامت گذاری گره که اولین قدم تجزیه

و تحلیل گره است تأکید شود.

۱ - Node-pair

۲ - Reference node

۳ - Datum node

۴ - Node voltages

واضح است که سایر ولتاژهای جفت‌گره‌ها نیز برحسب ولتاژهای v_1 و v_2 با استفاده از قانون KVL قابل بیان هستند. بنابراین در حالت کلی اگر مداری دارای $n+1$ گره باشد، تعداد n ولتاژ گره بایستی مشخص گردد زیرا با دانستن آنها هر ولتاژ جفت‌گره و بویژه ولتاژهای شاخه‌ها بلافاصله تعیین میگردند. در بالا فقط از قانون ولتاژ کیرشف استفاده نمودیم ولی البته برای پیدا نمودن تمام ولتاژها و جریانهای شاخه‌ها و بخصوص پاسخ مطلوب، لازم است از قانون جریان کیرشف نیز استفاده شود.

حال استنباط‌های قانون جریان کیرشف را در این مدار بررسی میکنیم. البته برای اینکار میتوان سه معادله گره را برای گره‌های ① و ② و ③ نوشت، معهداً واضح است که یکی از سه معادله اضافی^(۱) خواهد بود، زیرا با افزودن هر دو معادله، معادله سوم نتیجه خواهد شد که ممکن است فقط در یک ضریب ۱- با آن اختلاف داشته باشد. بنابراین برای این مدار سه گره‌ی KCL، تنها دو معادله نایسته گره بما خواهد داد. با آسانی میتوان نشان داد که در مداری با $(n+1)$ گره، تنها n معادله نایسته گره وجود خواهد داشت (البته این مطلب در فصل دهم نشان داده خواهد شد). برای صرفه‌جویی در وقت، بجای اینکه معادلات گره‌ها صریحاً برحسب جریانهای شاخه‌ها بنویسیم، از معادلات شاخه‌ها استفاده نموده و جریانها را مستقیماً برحسب ولتاژهای شاخه‌ها بیان میکنیم. همچنین تمام ولتاژهای شاخه‌ها را نیز برحسب ولتاژهای گره‌ها بیان خواهیم کرد. نتیجه نهایی، بدست آوردن دو معادله برای دو ولتاژ نامعلوم گره‌ها خواهد بود و باین ترتیب میتوانیم ولتاژهای هر دو گره و یا هر یک از آنها را بدست آوریم.

حال بی‌خواهیم با توجه به معادلات اجزاء شاخه‌ها و همچنین رابطه $v_{12} = v_1 - v_2$ دو معادله گره را برای مثال مورد بحث بنویسیم. با استفاده از KCL برای گره ① داریم،

$$(۲-۱) \quad C \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{R_1} + I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t (v_1 - v_2) dt' = i_s(t)$$

و برای گره ②،

$$(۲-۲) \quad -I_0 + \frac{1}{L} \int_0^t (v_2 - v_1) dt' + \frac{v_2}{R_2} = 0$$

شرط اولیه اضافی داده شده چنین است :

$$(۲-۳) \quad v_1(0) = V_0$$

معادلات (۱-۲) و (۲-۲) دو معادله گره هستند که در آنها فقط دو ولتاژ گره v_1 و v_2 بعنوان متغیر ظاهر میشوند . معادله (۲-۳) یک شرط اولیه لازم برای مشخص نمودن یکتا جواب معادلات (۱-۲) و (۲-۲) میباشد .

هدف مسأله ما بدست آوردن یک معادله دیفرانسیل است که v_2 متغیر وابسته آن باشد . در فصل چهاردهم یک روش اصولی برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل از روی یک دستگاه معادلات انتگرال - دیفرانسیل^(۱) ارائه خواهد شد . در مورد مثال فوق ، ساده ترین روش اینست که ابتدا دو معادله (۱-۲) و (۲-۲) را با هم جمع کنیم تا داشته باشیم :

$$(۲-۴) \quad C \frac{dv_1}{dt} + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} = i_s$$

با مشتق گیری از معادله (۲-۲) بدست می آید :

$$\frac{1}{L} v_2 - \frac{1}{L} v_1 + \frac{1}{R_2} \frac{dv_2}{dt} = 0$$

و یا :

$$(۲-۵) \quad v_1 = v_2 + \frac{L}{R_2} \frac{dv_2}{dt}$$

با مشتق گیری از (۲-۵) داریم :

$$(۲-۶) \quad \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_2}{dt} + \frac{L}{R_2} \frac{d^2 v_2}{dt^2}$$

معادله دیفرانسیل برای v_2 از جایگذاری (۲-۵) و (۲-۶) در (۲-۴) بدست می آید . بنابراین ،

$$(۲-۷) \quad LC \frac{d^2 v_r}{dt^2} + \left(R_r C + \frac{L}{R_1} \right) \frac{dv_r}{dt} + \left(1 + \frac{R_r}{R_1} \right) v_r = R_r i_s$$

شرایط اولیه لازم برای یکتا مشخص نمودن جواب (۲-۷) را میتوان از معادله (۲-۳) و معادلات اصلی (یا معادل آنها) با قراردادن $t=0$ بدست آورد +. از (۲-۲) بدست می‌آوریم:

$$(۲-۸) \quad v_r(0) = R_r I_0$$

و از (۲-۵) داریم:

$$(۲-۹) \quad \frac{dv_r}{dt}(0) = \frac{R_r}{L} [v_1(0) - v_r(0)] = \frac{R_r}{L} (V_0 - R_r I_0)$$

تمرین - برای مدار شکل (۲-۲) معادله دیفرانسیلی که v_1 و v_2 را بهم ربط میدهد بدست آورید. شرایط اولیه لازم برای مشخص نمودن جواب یکتای معادله را نیز مشخص سازید.

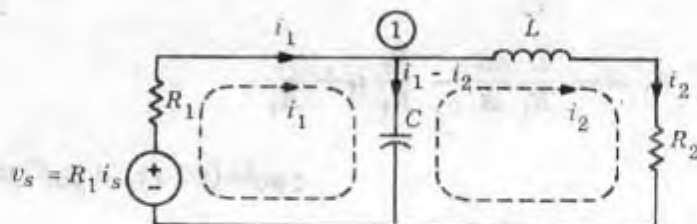
۲-۲- تجزیه و تحلیل مش

روش دیگری برای تجزیه و تحلیل یک شبکه کلی برپایه نوشتن معادلات مش^(۱) استوار است. مدار شکل (۲-۱) را که با استفاده از مدار معادل تونن ترکیب موازی i_s و مقاومت، در شکل (۲-۳) دوباره رسم شده است در نظر میگیریم. داریم:

$$(۲-۱۰) \quad v_s = R_1 i_s$$

جریان در مش ۱ را (که شامل v_s و R_1 و C میباشد) با i_1 و جریان در مش ۲ را (که شامل C و L و R_r میباشد) با i_2 مشخص میکنیم. جریان واقعی شاخه‌های منبع v_s و مقاومت R_1 برابر i_1 است و جریان شاخه‌های شامل سلف L و مقاومت R_r برابر i_2 میباشد. جریان شاخه شامل خازن C ، مجموع جبری دو جریان مش، یعنی $i_1 - i_2$ میباشد. این موضوع با بکار بردن KCL در گره ① نیز آشکار است.

+ فرض میشود که i_s تابع ضربه و یا تابع ویژه دیگری نمیشود. اگر i_s شامل ضربه در $t=0$ باشد بایستی دقت بیشتری نمود. در این مورد میتوان از معادلات، بین $t=0_-$ تا $t=0_+$ انتگرال گرفت تا شرایط اولیه جدیدی در $t=0_+$ بدست آید.



شکل ۲-۳ - مدار شکل (۱ - ۲) برای تجزیه و تحلیل مش مجدداً رسم

شده است. توجه کنید که منبع جریان شکل (۱ - ۲) با

استفاده از مدار معادل تونن با منبع ولتاژ تعویض شده است.

حال KVL را در مشها بکار میگیریم. در روابط KVL، ولتاژ شاخه‌ها را صریحاً

با استفاده از معادلات شاخه‌ها برحسب i_1 و i_2 بیان میداریم و بنابراین برای مش ۱ داریم:

$$(2-11) \quad R_1 i_1 + V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t (i_1 - i_2) dt' = v_s(t)$$

و برای مش ۲

$$(2-12) \quad L \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 - V_0 + \frac{1}{C} \int_0^t (i_2 - i_1) dt' = 0$$

شرط اولیه اضافی داده شده چنین است:

$$(2-13) \quad i_2(0) = I_0$$

معادلات (۲ - ۱۱) و (۲ - ۱۲) معادلات مش مدار میباشند که در آنها تنها دو جریان مش

i_1 و i_2 بعنوان متغیر داده میشوند. معادله (۲ - ۱۳) شرط اولیه لازم برای مشخص نمودن

جواب بطور یکتا میباشد. برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل با متغیر خروجی v_2 تنها

کافی است معادله دیفرانسیل مربوط به i_2 را بدست آوریم. ساده‌ترین راه، جمع کردن دو

معادله (۲ - ۱۱) و (۲ - ۱۲) است تا بدست آوریم:

$$R_1 i_1 + L \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 = v_s$$

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

۳۲۰

و یا :

$$(۲-۱۴) \quad i_1 = -\frac{L}{R_1} \frac{di_r}{dt} - \frac{R_r}{R_1} i_r + \frac{v_s}{R_1}$$

با مشتق‌گیری از (۲-۱۲) داریم :

$$(۲-۱۵) \quad L \frac{d^2 i_r}{dt^2} + R_r \frac{di_r}{dt} + \frac{i_r}{C} - \frac{i_1}{C} = 0$$

با جایگذاری (۲-۱۴) در (۲-۱۵) بدست می‌آید :

$$(۲-۱۶) \quad LC \frac{d^2 i_r}{dt^2} + \left(R_r C + \frac{L}{R_1}\right) \frac{di_r}{dt} + \left(1 + \frac{R_r}{R_1}\right) i_r = \frac{v_s}{R_1}$$

شرایط اولیه از رابطه (۲-۱۳) بدست می‌آید که چنین است :

$$(۲-۱۷) \quad i_r(0) = I_0$$

با قراردادن $t=0$ از (۲-۱۲) بدست می‌آید :

$$(۲-۱۸) \quad \frac{di_r}{dt}(0) = \frac{1}{L} (V_0 - R_r I_0)$$

چون $v_r = R_r i_r$ و $v_s = R_1 i_s$ ، معادله برحسب v_r و i_s چنین است :

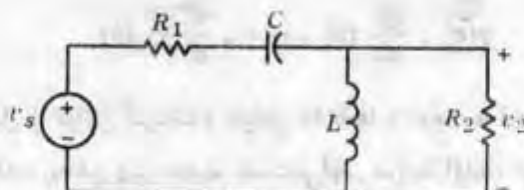
$$(۲-۱۹) \quad LC \frac{d^2 v_r}{dt^2} + \left(R_r C + \frac{L}{R_1}\right) \frac{dv_r}{dt} + \left(1 + \frac{R_r}{R_1}\right) v_r = R_r i_s$$

وشرایط اولیه چنین می‌باشند :

$$(۲-۲۰) \quad v_r(0) = R_r I_0$$

$$(۲-۲۱) \quad \frac{dv_r}{dt}(0) = \frac{R_r}{L} (V_0 - R_r I_0)$$

مثال فوق این حقیقت کلی را نشان می‌دهد که برای هر مدار خطی تغییرناپذیر با زمان



شکل ۴-۲- مدار برای تمرین تجزیه و تحلیل مش و تجزیه و تحلیل گره

که در آن ورودی و خروجی و پاسخ می باشد.

که دارای یک ورودی و یک خروجی باشد همیشه میتوان یک معادله دیفرانسیل بطریقی نوشت که خروجی را به ورودی ارتباط دهد. البته هرچه مدار پیچیده تر باشد، کار بیشتری لازم خواهد بود. اما همانطور که در فصل های دهم و سیزدهم خواهیم دید برای این نوع مدارها روش های منظمی وجود دارد که ساده ترین معادله دیفرانسیلی که خروجی را به ورودی ارتباط میدهد به ما خواهد داد.

تمرین- با بکاربردن تجزیه و تحلیل مش و تجزیه و تحلیل گره، معادله دیفرانسیلی برای ولتاژ v_2 را در مدار شکل (۴-۲) بنویسید.

۳- نمایش ورودی - خروجی (معادله دیفرانسیل مرتبه n)

بطور کلی، برای مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان با یک ورودی و یک خروجی، رابطه بین خروجی و ورودی میتواند با یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام با ضرایب ثابت بیان شود، بنابراین،

$$(3-1) \quad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^m w}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} w}{dt^{m-1}} + \dots + b_m w$$

که در آنجا y نمایشگر خروجی و w نماینده ورودی می باشد. ثابت های $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $b_0, b_1, \dots, b_m$ به مقادیر عناصر و توپولوژی مدار بستگی دارند. شرایط اولیه چنین میباشند⁺:

+ چنانکه بعداً خواهیم دید، این مطلب صرفاً وقتی صحیح است که جمله $\frac{d^m w}{dt^m}$ شامل

تابع ضربه $\delta(t)$ و یا هیچیک از مشتقهای آن نباشد.

$$y(0), \frac{dy}{dt}(0), \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0)$$

معادله دیفرانسیل از قوانین کیرشف و خواص شاخه‌ها با توجه به تجزیه و تحلیل‌های گره و مش همانطور که در بخش پیش دیدیم بدست می‌آید. شرایط اولیه، از حالت اولیه داده شده مدار و همچنین معادلات مدار تعیین میشوند. روش کلی برای نوشتن معادلات دیفرانسیل مرتبه n ام و تعیین شرایط اولیه در فصل‌های دهم و یازدهم و سیزدهم مورد بحث قرار خواهد گرفت. در حال حاضر فرض میکنیم که ارتباط بین ورودی و خروجی بصورت معادله (۳-۱) بیان شده و میخواهیم انواع پاسخ‌ها را مورد مطالعه قرار دهیم.

۳-۱- پاسخ ورودی صفر

پاسخ ورودی صفر عبارتست از پاسخ مدار وقتی که ورودی آن بطور متحد برابر صفر باشد. بنابراین سمت راست معادله (۳-۱) بطور متحد برابر صفر خواهد بود و عبارت دیگر، معادله دیفرانسیل همگن میباشد. چند جمله‌ای مشخصه^(۱) این معادله دیفرانسیل یک چند جمله‌ای از درجه n برحسب s میباشد:

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

و صفرهای^(۲) این چند جمله‌ای، s_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، «فرکانس‌های طبیعی متغیر شبکه y » نامیده میشوند. بخوبی معلوم است که اگر تمام فرکانس‌های طبیعی متمایز باشند، جواب معادله همگن چنین خواهد بود:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} \quad (3-2)$$

که در آنجا ثابت‌های k_i از شرایط اولیه داده شده تعیین میشوند. هرگاه بعضی از فرکانس‌های طبیعی مکرر شوند، معادله (۳-۲) را بایستی بطریقی اصلاح نمود تا توانهای t نیز چنانکه در ضمیمه ب بیان شده است در آن وارد گردد. بعنوان مثال، اگر s_1 ، صفر مرتبه سوم چند

۳۳۳

مبانی مدارهای خطی و تغییرناپذیر با زمان

جمله‌ی مشخصه معادله دیفرانسیل باشد، معادله (۳-۲) شامل:

$$k_1 e^{s_1 t} + k_2 t e^{s_1 t} + k_3 t^2 e^{s_1 t}$$

خواهد بود.

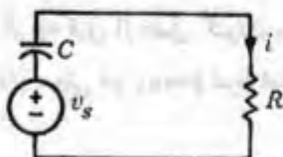
۳-۲- پاسخ حالت صفر

بطور کلی، پاسخ حالت صفر برای متغیر y در معادله (۳-۱) به شکل زیر می‌باشد (مجدداً فرض می‌شود تمام فرکانس‌های طبیعی متمایز باشند).

$$(۳-۳) \quad y(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} + y_p(t)$$

که در آن $y_p(t)$ «یک» پاسخ خصوصی معادله (۳-۱) بوده و تنها به ورودی w بستگی خواهد داشت. n ثابت k_i با این شرط مشخص می‌شوند که تمام شرایط اولیه $y(0_-)$ ، $\frac{dy}{dt}(0_-)$ ، $\dots$ ، $\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0_-)$ صفر باشند، یعنی مدار درست در لحظه قبل از اعمال ورودی در حالت صفر باشد.

مثال - مدار RC شکل (۳-۱) را در نظر بگیرید که در آن v_s ورودی و جریانی که از مقاومت می‌گذرد، یعنی i ، خروجی است. درست در لحظه قبل از اعمال ورودی خازن بی‌بار می‌باشد. از لحظه $t=0$ بعد، ورودی $v_s(t) = V_m \cos t$ به مدار اعمال می‌شود. عبارت دیگر، می‌توان از تابع پله $u(\cdot)$ استفاده کرده و برای تمام زمانهای t ، $v_s(t) = u(t)V_m \cos t$ قرار داد. از قانون KVL بدست می‌آوریم:



شکل ۳-۱- یک مدار ساده RC

$$(۳-۴) \quad Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt' = v_s(t) = u(t) V_m \cos t$$

و یا :

$$(۳-۵) \quad R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dv_s}{dt}$$

توجه شود که (۳-۵) بصورت (۳-۱) میباشد. حال سمت راست (۳-۵) را محاسبه می‌کنیم. از اینرو،

$$\frac{dv_s}{dt} = V_m \frac{du}{dt} \cos t + V_m u(t) \frac{d}{dt} \cos t = V_m \delta(t) - V_m u(t) \sin t$$

وجود $V_m \delta(t)$ در سمت راست (۳-۵) موجب میشود که جریان i در لحظه $t=0$ نا پیوسته^(۱) گردد. درحقیقت برای اینکه مقدار سمت چپ معادله (۳-۵) ضربه $V_m \delta(t)$ سمت راست را متعادل کند، $R \left(\frac{di}{dt} \right)$ بایستی شامل ضربه $V_m \delta(t)$ باشد و بدین جهت i شامل $\left(\frac{V_m}{R} \right) u(t)$ خواهد بود که یک تابع پله‌است. از نظر فیزیکی، این مطلب بسهولت تشریح میگردد، چون شکل موج ولتاژ $v_s(t)$ کراندار است، ولتاژ دوسرخازن C و مقاومت R کراندار بوده و در نتیجه جریان i کراندار خواهد بود و بالاخره بار و ولتاژ دوسرخازن C پیوسته میباشد. از اینرو، $v_C(0_-) = v_C(0_+)$ و با استفاده از KVL داریم که :

$$v_R(0_+) = v_s(0_+) - v_C(0_+) = V_m$$

بعبارت دیگر،

$$i(0_+) = \frac{v_R(0_+)}{R} = \frac{V_m}{R}$$

بنابراین مشاهده میشود که اگر چه قبل از وصل کردن منبع ولتاژ v_s (یعنی در $t=0_-$) شرط اولیه صفر است، $i(0_-) = 0$ ، ولی در $t=0_+$ شرط اولیه صفر نبوده و به‌ورودی پستی خواهد داشت !

لازم است متذکر شویم که جمله m در (۳-۳) میتواند «هر» پاسخ خصوصی باشد، یعنی بموجب تعریف، هر جوابی که در معادله دیفرانسیل ناهمگن (۳-۱) صدق نماید. بعضی پاسخ‌های خصوصی خیلی راحت‌تر از سایرین هستند. برای ورودی پله، m برابر یک ثابت اختیار میشود+. برای ورودی سینوسی، m بصورت یک سینوسی با همان فرکانس انتخاب میشود، و برای یک ورودی که یک چندجمله‌یی از t باشد، m بصورت یک چندجمله‌یی از t با همان درجه انتخاب میشود (به ضمیمه پ مراجعه گردد). در فصل بعد برای حالتی که ورودی سینوسی است، بطور مفصل بحث خواهیم نمود.

۳-۳- پاسخ ضربه

محاسبه پاسخ ضربه تا اندازه‌ی ظریف‌تر میباشد زیرا سمت راست (۳-۱) شامل ضربه‌ها و مشتق‌های ضربه‌ها خواهد بود. در این زیر بخش با استفاده از مثالی، محاسبه مستقیم پاسخ ضربه از معادله دیفرانسیل را تشریح خواهیم کرد. در بخش ۱ نشان خواهیم داد که تعیین پاسخ حالت صفر برای یک ورودی دلخواه، تنها به اطلاع از پاسخ ضربه بستگی دارد و بدین جهت بسیار مهم است که از پاسخ ضربه آسودگی خیال پیدا کرده و روش محاسبه آنرا بخوبی فراگیریم.

حال میخواهیم نشان دهیم که چگونه میتوان پاسخ ضربه را مستقیماً از روی معادله دیفرانسیل (۳-۱) بدست آورد:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 w^{(m)} + b_1 w^{(m-1)} + \dots + b_m w$$

با شرایط اولیه:

$$(۳-۶) \quad y(0_-) = y^{(1)}(0_-) = y^{(2)}(0_-) = \dots = y^{(n-1)}(0_-) = 0$$

برای سهولت طرز نمایش، بالانویس (1) (n) را برای نمایش $\frac{d^n}{dt^n}$ بکار برده‌ایم. واضح است

+ اگر در معادله دیفرانسیل، درجه m از درجه n بزرگتر باشد، آنگاه برای ورودی پله، m علاوه بر یک مقدار ثابت، بایستی شامل ضربه و بعضی مشتق‌های آن نیز باشد. این موضوع را بعداً بررسی خواهیم کرد.

نظریه^۱ اساسی مدارها و شبکه‌ها

که اگر ورودی w یک ضربه واحد باشد، سمت راست معادله شامل تابع ضربه و مشتقهای متوالی آن خواهد بود. مشتقهای متوالی تابع ضربه را گاه «توابع ویژه^(۱)» نیز میخوانند. از نظر نمایش داریم:

$$\frac{du}{dt} = \delta \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^t \delta(t') dt' = u(t)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \delta^{(1)} \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^t \delta^{(1)}(t') dt' = \delta(t)$$

$$\frac{d\delta^{(1)}}{dt} = \delta^{(2)} \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^t \delta^{(2)}(t') dt' = \delta^{(1)}(t)$$

$$\frac{d\delta^{(n)}}{dt} = \delta^{(n+1)} \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^t \delta^{(n+1)}(t') dt' = \delta^{(n)}(t)$$

تعیین مستقیم پاسخ ضربه h براین پایه قرار گرفته است که توابع ویژه سمت راست باید با توابع ویژه سمت چپ معادله (۳-۱) متعادل باشند. چون در (۳-۱)، $w(t) = \delta(t)$ میباشد، بالاترین مرتبه تابع ویژه درست سمت راست برابر $\delta^{(m)}$ بوده و چگونگی پاسخ ضربه h ، به مقدار نسبی m و n بستگی خواهد داشت.

۱- $n > m$ (حالت مناسب^(۲)). پاسخ ضربه h شامل هیچ نوع تابع ویژه‌ای نیست، اما چنانکه (۳-۱) لازم میدارد $\frac{d^n h}{dt^n}$ شامل $\delta^{(m)}$ میباشد.

۲- $n = m$. پاسخ ضربه h شامل یک ضربه $b_0 \delta$ خواهد بود (در اینجا، b_0 ضریب $w^{(m)}$ در معادله (۳-۱) میباشد).

۳- $n < m$. پاسخ ضربه h بیش از یک تابع ویژه را شامل می‌گردد و ضربی که برای هر تابع ویژه تعیین می‌شود به‌سبب از متعادل نمودن دوطرف معادله حاصل می‌گردد . در بحث جاری، خود را برای حالتی که $n > m$ می‌باشد محدود خواهیم کرد (حالت مناسب) . یادآوری می‌کنیم که بموجب تعریف، تابع ضربه $\delta(t)$ برای تمام زمانهای $t > 0$ بطور متحد مساوی صفر است و در نتیجه مشتقهای متوالی ضربه، یعنی توابع ویژه نیز دارای همین خاصیت خواهند بود . بنابراین برای ورودی ضربه واحد، سمت راست معادله (۳-۱) برای $t > 0$ بطور متحد مساوی صفر است و در نتیجه تا زمانی که $t > 0$ موردنظر می‌باشد، پاسخ ضربه، معادل پاسخ ورودی صفر خواهد بود. توابع ویژه درست راست (۱-۳) اساساً شرایط اولیه در $t = 0_+$ را مشخص می‌کنند، یعنی شرایطی، درست لحظه‌ای پس از اعمال ضربه می‌باشند. این شرایط چنین هستند:

$$h(0_+), h^{(1)}(0_+), \dots, h^{(n-1)}(0_+)$$

بنابراین، تا زمانی که $t > 0$ موردنظر می‌باشد، می‌توان پاسخ ضربه h را بهمان صورت جواب معادله همگن برحسب n ثابت اختیاری k_i بیان نمود. با فرض اینکه تمام ریشه‌های معادله مشخصه (۳-۱) متمایز باشند، خواهیم داشت:

$$(۳-۷) \quad h(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} \quad t > 0$$

چون بموجب قرارداد، برای $t < 0$ ، $h(t) = 0$ می‌باشد و چون h هیچ تابع ویژه‌ای را شامل نمی‌گردد می‌توان نوشت (برای تمام t):

$$(۳-۸) \quad h(t) = \left(\sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} \right) u(t)$$

کاری که باقی می‌ماند، گذاشتن (۳-۸) در معادله دیفرانسیل (۳-۱) و محاسبه n ثابت k_i می‌باشد. البته بایستی در مشتق‌گیری توابع ویژه دقت کافی مبذول گردد.

مثال - فرض کنید که معادله دیفرانسیل ارتباط دهنده پاسخ y به ورودی w برای یک مدار داده شده بصورت زیر باشد:

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$(۳-۹) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{dy}{dt} + 3y = \frac{dw}{dt} + 2w$$

میخواهیم پاسخ ضربه h این مدار را بدست آوریم. توجه کنید در معادله $(۳-۹)$ ، $n=2$ و $m=1$ میباشد، از اینرو این حالت یک حالت متناوب میباشد و در نتیجه پاسخ ضربه هیچ نوع تابع ویژه‌ی را شامل نمیکردد. ریشه‌های معادله مشخصه معادله دیفرانسیل $(۳-۹)$ برابر، $s_1 = -1$ و $s_2 = -3$ است. بنابراین میتوان پاسخ ضربه را بصورت زیر نشان داد:

$$(۳-۱۰) \quad h(t) = (k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t}) u(t)$$

با یکمرتبه مشتق گیری از h بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} h^{(1)}(t) &= (k_1 e^{-t} + k_2 e^{-3t}) \delta(t) + (-k_1 e^{-t} - 3k_2 e^{-3t}) u(t) \\ &= (k_1 + k_2) \delta(t) + (-k_1 e^{-t} - 3k_2 e^{-3t}) u(t) \end{aligned}$$

با یکمرتبه دیگر مشتق گیری بدست می‌آید:

$$h^{(2)}(t) = (k_1 + k_2) \delta^{(1)}(t) + (-k_1 - 3k_2) \delta(t) + (k_1 e^{-t} + 9k_2 e^{-3t}) u(t)$$

با گذاشتن $w = \delta(t)$ و $y = h(t)$ در معادله $(۳-۹)$ بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} h^{(2)}(t) + 4h^{(1)}(t) + 3h(t) &= (k_1 + k_2) \delta^{(1)}(t) + (3k_1 + k_2) \delta(t) \\ &= \delta^{(1)}(t) + 2\delta(t) \end{aligned}$$

حال ضرایب $\delta^{(1)}(t)$ و $\delta(t)$ را در دو طرف مساوی هم قرار میدهیم:

$$k_1 + k_2 = 1$$

$$3k_1 + k_2 = 2$$

بنابراین ضرایب k_1 و k_2 چنین خواهند بود:

$$k_1 = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad k_2 = \frac{1}{2}$$

در نتیجه پاسخ ضربه از معادله (۳-۱۰) بصورت زیر بدست می‌آید :

$$h(t) = \frac{1}{\gamma} (e^{-t} + e^{-\gamma t}) u(t)$$

تمرین = پاسخ ضربه برای متغیر γ را که با معادلات دیفرانسیل زیر مشخص شده است بدست آورید :

$$\frac{dy}{dt} + \gamma y = w$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = \frac{dw}{dt} + w$$

$$\frac{d^3 y}{dt^3} + \gamma \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{dy}{dt} + \gamma y = \frac{d^2 w}{dt^2} + w$$

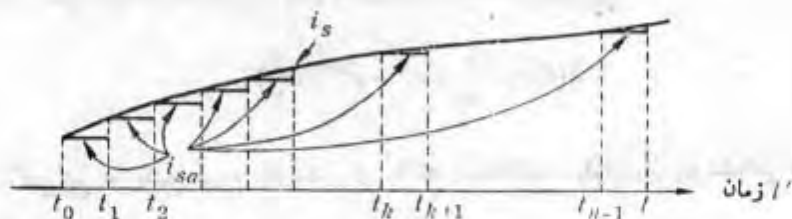
۴- پاسخ به یک ورودی دلخواه

اکنون میدانیم که چگونه میتوان پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان را محاسبه نمود. در این بخش نشان خواهیم داد که با استفاده از پاسخ ضربه این مدار میتوان پاسخ حالت صفر را برای هر نوع ورودی دلخواه بدست آورد. در این محاسبه «خطی بودن»^(۱) و تغییرناپذیری بازمان^(۲) «دو خاصیت بسیار اساسی برای بدست آوردن نتایج میباشند.

۴-۱- بدست آوردن انتگرال کانولوشن

در اینجا میخواهیم پاسخ حالت صفر $v(0)$ یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان را به یک ورودی $i_s(0)$ محاسبه کنیم. فرض میکنیم که ورودی در لحظه t_0 به مدار اعمال شود و مدار در زمان t_0 در حالت صفر قرار داشته باشد، و بنابراین میتوان برای $t < t_0$ ، $i_s(t) = 0$ را در نظر گرفت.

مسئله، محاسبه $v(t)$ ، یعنی پاسخ v در لحظه t برای هر زمان $t > t_0$ است، با فرض اینکه پاسخ ضربه h مدار برای ما معلوم است. بعنوان قدم اول، ورودی i_s را با تقریبی



شکل ۴-۱ = نمایش تقریبی i_s توسط i_{sa} که از پالسهای با عرض یکسان و متوالی تشکیل شده است.

بشرح زیر در نظر میگیریم. همانطور که در شکل (۴-۱) نشان داده شده است فاصله^(۱) (t_0, t) را به تعداد زیادی، مثلاً n فاصله کوچک با طول Δ تقسیم مینمائیم. نقاط این زیر قسمتها را $t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_r, t_n = t$ مینامیم. بنابراین:

$$t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \dots = t_{k+1} - t_k = \dots = \Delta$$

میباشد. توابع پله i_{sa} را با تقریب آنچنان به منحنی i_s ارتباط میدهم که عرض منحنی تقریبی $i_{sa}(t)$ در نقطه‌ای بطول t' مطابق روابط زیر باشد:

$$(4-1) \quad i_{sa}(t') = \begin{cases} i_s(t_0) & t_0 \leq t' < t_1 \\ i_s(t_1) & t_1 \leq t' < t_2 \\ \dots & \dots \\ i_s(t_k) & t_k \leq t' < t_{k+1} \\ \dots & \dots \\ i_s(t_{n-1}) & t_{n-1} \leq t' < t_n = t \end{cases}$$

بویژه توجه کنید که t' یک زمان دلخواه در فاصله $[t_0, t]$ میباشد. ارتباط شکل موج $i_{sa}(t)$ به شکل موج داده شده $i_s(t)$ در شکل (۴-۱) نشان داده شده است. واضح است که (برای بسیاری از انواع ورودی‌ها) وقتی $n \rightarrow \infty$ ، (بنابراین $\Delta \rightarrow 0$) اختلاف میان پاسخ مدار به $i_s(t)$ و $i_{sa}(t)$ نیز بسط صفر میل میکند (باسانی میتوان نشان

داد که این موضوع برای تمام i_s های پیوسته تکه‌ای^(۱) صادق است .
توجه کنید که تقریب پله‌ای i_{sa} را میتوان بصورت مجموعی از پالس‌های مستطیلی در نظر گرفت و این امر در شکل (۲-۴) نشان داده شده است . تمام پالسها دارای عرض یکسان Δ بوده ، ولی از لحاظ ارتفاع و محل قرار گرفتن در روی محور زمان متفاوت میباشند .
بیادآورید که در فصل دوم تابع پالس p_{Δ} را بصورت زیر تعریف نمودیم .

$$p_{\Delta}(t') = \begin{cases} 0 & t' \leq 0 \\ \frac{1}{\Delta} & 0 < t' < \Delta \\ 0 & \Delta \leq t' \end{cases}$$

هرگاه این تابع پالس p_{Δ} را به میزان t_k به سمت «راست» انتقال دهیم، تابع پالس منتقل شده‌ای با نمایش زیر بدست می‌آید :

$$p_{\Delta}(t' - t_k) = \begin{cases} 0 & t' \leq t_k \\ \frac{1}{\Delta} & t_k < t' < t_k + \Delta \\ 0 & t_k + \Delta \leq t' \end{cases}$$

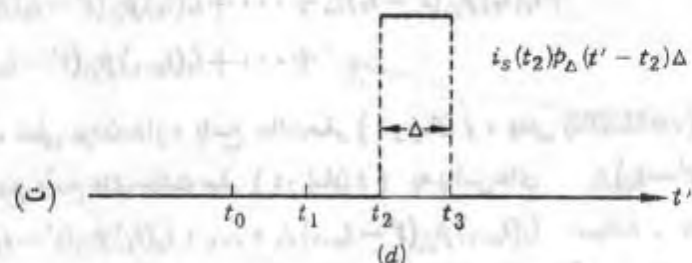
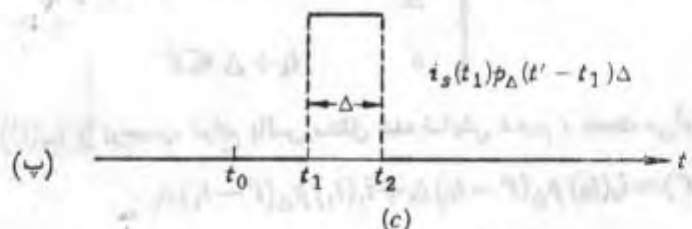
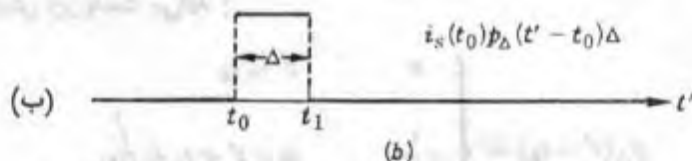
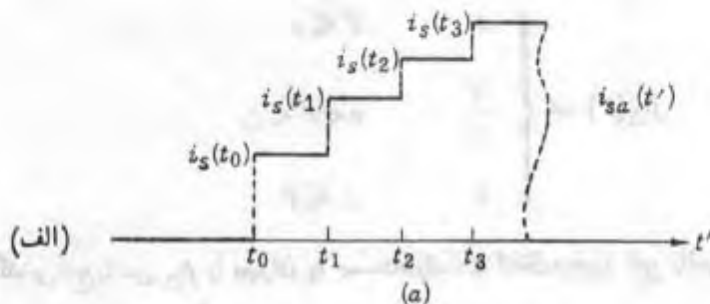
اگر $i_{sa}(t')$ را بر حسب توابع پالس منتقل شده نمایش دهیم ، بدست می‌آوریم :

$$\begin{aligned} i_{sa}(t') = & i_s(t_0) p_{\Delta}(t' - t_0) \Delta + i_s(t_1) p_{\Delta}(t' - t_1) \Delta \\ & + i_s(t_2) p_{\Delta}(t' - t_2) \Delta + \dots + i_s(t_k) p_{\Delta}(t' - t_k) \Delta \\ & + \dots + i_s(t_{n-1}) p_{\Delta}(t' - t_{n-1}) \Delta \end{aligned} \quad (2-4)$$

بعلت خطی بودن مدار ، پاسخ حالت صفر (در زمان t ، یعنی زمان مشاهده) به i_{sa} ، برابر مجموع پاسخ های حالت صفر (در زمان t) به پالس های $i_s(t_0) p_{\Delta}(t' - t_0) \Delta$ ، $i_s(t_1) p_{\Delta}(t' - t_1) \Delta$ ، $i_s(t_2) p_{\Delta}(t' - t_2) \Delta$ ، ... ، $i_s(t_{n-1}) p_{\Delta}(t' - t_{n-1}) \Delta$ میباشد . بنابراین ، مسأله به محاسبه پاسخ حالت صفر مدار (در زمان t) یکی از پالس ها مثلا پالس $(k+1)$ ام ، یعنی

نظریه^۲ اساسی مدارها و شبکه‌ها

هرگاه پاسخ حالت صفر مدار به $p_{\Delta}(0)$ را برابر $i_s(t_k)p_{\Delta}(t'-t_k)\Delta$ بنامیم، با استفاده از خواص خطی بودن و تغییرناپذیری بازمان نتیجه میشود که پاسخ حالت صفر مدار به پالس $i_s(t_k)p_{\Delta}(t'-t_k)\Delta$ در زمان مشاهده t ، برابر $i_s(t_k)h_{\Delta}(t-t_k)\Delta$ خواهد بود. آرگومان h_{Δ} برابر $t-t_k$ است، زیرا پالس $p_{\Delta}(t'-t_k)$ در زمان t_k بهمدار اعمال شده است. بنابراین در زمان مشاهده که آنرا t



شکل ۲-۴- تابع تقریبی i_{sa} شکل (الف) میتواند بعنوان مجموع پالسهای

مستطیلی شکلهای (ب) و (پ) و (ت) و غیره تعبیر شود.

۳۳۳

مبانی مدارهای خطی و تغییرناپذیر با زمان

مینامیم، تنها $t - t_k$ ثانیه از زمان اعمال پالس گذشته است. با تکرار این استدلال برای هریک از پالس های (۲-۱)، پاسخ حالت صفر برای $i_{sa}(0)$ چنین بدست می آید:

$$\begin{aligned} & i_s(t_0)h_{\Delta}(t-t_0)\Delta + i_s(t_1)h_{\Delta}(t-t_1)\Delta \\ & + \dots + i_s(t_k)h_{\Delta}(t-t_k)\Delta + \dots + i_s(t_{n-1})h_{\Delta}(t-t_{n-1})\Delta \\ & = \sum_{k=0}^{n-1} i_s(t_k)h_{\Delta}(t-t_k)\Delta \end{aligned} \quad (2-1)$$

قدم بعدی میل دادن $n \rightarrow \infty$ میباشد. چون $t - t_0$ ثابت بوده و $t - t_0 = n\Delta$ است وقتی $n \rightarrow \infty$ ، در نتیجه $\Delta \rightarrow 0$. وقتی $\Delta \rightarrow 0$ ، نتایج زیر حاصل میشوند:

- ۱- تقریب پله ای $i_{sa}(0)$ بصورت ورودی اصلی $i_s(0)$ درسی آید.
- ۲- پاسخ حالت صفر به $i_{sa}(0)$ همان پاسخ حالت صفر به $i_s(0)$ ، یعنی $v(0)$ ، میگردد.
- ۳- پاسخ حالت صفر $h_{\Delta}(0)$ به $p_{\Delta}(0)$ ، همان پاسخ ضربه h میشود.
- ۴- مجموع موجود در (۲-۱) تبدیل بانتهگرال میشود، بعبارت دیگر،

$$v(t) = \int_{t_0}^t i_s(t')h(t-t') dt' \quad \text{برای } t \geq t_0$$

این معادله برای هر زمان $t > t_0$ ، «ولتاژ خروجی حالت صفر» در زمان t را که ناشی از جریان ورودی i_s در زمان t_0 میباشد بدست میدهد.

«نتیجه» محاسبه «پاسخ حالت صفر» هر مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به یک ورودی «دلخواه» منجر میشود به:

- ۱- تعیین «پاسخ ضربه» h
- ۲- محاسبه انتگرال:

$$(2-2) \quad \int_{t_0}^t h(t-t') i_s(t') dt' = v(t) \quad \text{برای } t \geq t_0$$

نظریه^۱ اساسی مدارها و شبکه‌ها

که در آنجا t_0 لحظه‌ای است که ورودی v به مدار اعمال می‌شود. این چنین انتگرالی را **انتگرال کانولوشن** می‌نامند.

قضیه فرعی^(۱) - با نتیجه گیری مستقیم از (۴-۱) می‌توان گفت که شکل موج $v(t)$ ، یعنی «پاسخ حالت صفر یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان به یک ورودی «دلخواه»، تابع خطی شکل موج ورودی $v(t)$ می‌باشد». (به تعریف یک تابع خطی در ضمیمه الف و مثال ۱ بخش ۲-۳ در همان ضمیمه مراجعه شود).

تبصره ۱- هر مقدار جدید t که بخواهیم ولتاژ خروجی $v(t)$ را در آن حساب کنیم نیاز به یک انتگرال گیری جدید دارد زیرا، عبارت زیر انتگرال^(۲) نیز به t وابسته است.

تبصره ۲- توجه شود که حد پائین انتگرال، t_0 ، زمانی است که در آن مدار در حالت صفر می‌باشد، و همچنین توجه کنید که حد بالای انتگرال، t ، زمانی است که می‌خواهیم v را در آن حساب کنیم. نباید انتگرال را برای مقادیر بیش از t در حد بالا حساب نمود، زیرا مقادیری که جریان ورودی پس از زمان t دارا می‌شود، اثری روی پاسخ مدار در زمان t نخواهد داشت.

تبصره ۳- حال استدلال این بیان را، که پاسخ حالت صفر در زمان t ، ناشی از یک ضربه اعمال شده در لحظه t_k ، تابعی از $t - t_k$ می‌باشد، مجدداً بررسی می‌کنیم. در حالت کلی می‌توان نوشت، $h(t, t_k)$ ، یعنی پاسخ یک تابع دو متغیره است؛ t ، یعنی لحظه مشاهده و t_k ، یعنی لحظه‌ای که ضربه به مدار اعمال شده است. حال «تغییرناپذیر با زمان» بودن مدار را بخاطر می‌آوریم، بدین معنی که برای هر T ، نتایجی که از انجام آزمایشی در زمان حال بدست می‌آید، کاملاً مساوی همان نتایجی است که از انجام همان آزمایش در T ثانیه بعد بدست خواهد آمد، و بویژه پاسخ حالت صفر در زمان t ، ناشی از ضربه اعمال شده در زمان t_k ، معادل با پاسخ حالت صفر در زمان $t + T$ ، ناشی از ضربه اعمال شده در زمان $t_k + T$ خواهد بود و بنابراین:

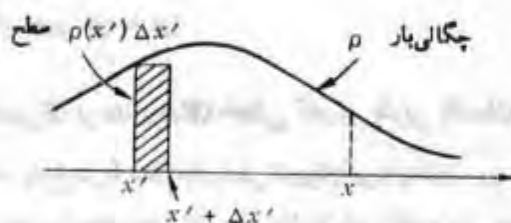
$$h(t, t_k) = h(t + T, t_k + T) \quad \text{برای تمام } T$$

چون این معادله برای تمام مقادیر T برقرار است، عدد $h(t, t_k)$ بطور یکتایی

با تفاضل $t - t_0$ مشخص می‌گردد و در نتیجه نوشتن آن بصورت $h(t - t_0)$ تصدیق می‌شود. تبصره ۴- = مطلب جالبی که از این بحث نتیجه می‌شود اینست که چون در محاسبه پاسخ حالت صفر توسط (۴-۱) هیچگونه استفاده‌یی از نمایش معادله دیفرانسیل مدارهای «فشرده» نشده است، بنابراین هرگاه بروشی، پاسخ ضربه یک مدار گسترده^(۱) خطی تغییرناپذیر با زمان را بدانیم، آنگاه با استفاده از (۴-۱) میتوان «پاسخ حالت صفر» آنرا به «هر» ورودی دلخواه محاسبه نمود.

۲-۴- مثالی از انتگرال کانولوشن در فیزیک

شاید تاکنون به انتگرال کانولوشن در فیزیک برخورد کرده‌اید. مثلاً فرض کنید که یک طناب ناپلونی محکم داریم که روی آن مقداری بار الکتریکی توزیع نموده‌ایم. این طناب میتواند تسمه مولدواندوگراف^(۲) باشد. فرض کنید میخواهیم پتانسیل الکتروستاتیکی را در نقطه x از این طناب، که ناشی از توزیع بار یکنواخت با چگالی ρ میباشد و در شکل (۳-۱) نشان داده شده است حساب کنیم. بار واقع در فاصله کوچک $(x' + \Delta x'$ و $x')$ مساوی $\rho(x') \Delta x'$ میباشد که در آن $\rho(x')$ ، چگالی بار در نقطه x' بر حسب کولمب بر متر و $\Delta x'$ ، طول فاصله بر حسب متر است. اگر این بار برابر ۱ کولمب می‌بود، پتانسیل در نقطه x مساوی $\frac{1}{4\pi\epsilon_0 |x - x'|}$ میشد (توجه کنید، بعلاوه اینکه فاصله بین دو نقطه یک عدد مثبت است، کاربرد قدر مطلق $x - x'$ ضروری میباشد). حال با توجه باین واقعیت که پتانسیل در یک نقطه، تابعی



شکل ۳-۴- تشریح پتانسیل الکتروستاتیک

مربوط به انتگرال کانولوشن

۳۳۹

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

خطی از بار می‌باشد و با استفاده از خاصیت همگنی، سهم پتانسیل نقطه x ناشی از بار $\rho(x')\Delta x'$ مساویست با:

$$\frac{\rho(x')\Delta x'}{4\pi\epsilon_0 |x-x'|}$$

با استفاده از خاصیت جمع پذیری و گذشتن به حد، پتانسیل زیر بدست می‌آید:

$$(4-5) \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(x') dx'}{4\pi\epsilon_0 |x-x'|}$$

هرگاه برای سهولت،

$$h(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |r|}$$

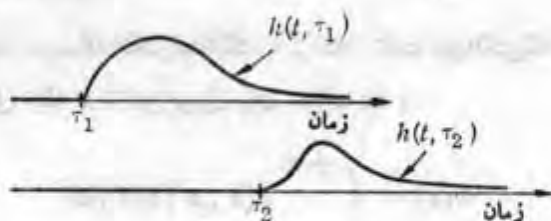
باشد، که در آن r مغرف فاصله است، رابطه (4-5) را میتوان بصورت زیر نوشت:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x-x') \rho(x') dx'$$

تعبیر تابع h چنین است: $h(r)$ پتانسیل ناشی از «واحد» بار الکتریکی در فاصله r از این بار می‌باشد. انتگرال کانولوشن بایستی از $-\infty$ تا $+\infty$ گرفته شود زیرا هرباری که روی این طناب محکم قرار گیرد، خواه درست راست و خواه درست چپ نقطه x واقع باشد، در پتانسیل نقطه x سهمیم خواهد بود.

۳-۴- تفسیری بر مدارهای خطی تغییرپذیر با زمان

تاکنون فقط پاسخ ضربه مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. مفهوم پاسخ ضربه برای مدارهای خطی تغییرپذیر با زمان نیز بکار میرود. بموجب تعریف، پاسخ حالت صفر به یک ضربه واحد، پاسخ ضربه نامیده میشود. بعنوان مثال مدارهای خطی تغییرپذیر با زمان، یک تقویت کننده خطی را که ضریب تقویت^(۱) آن به کندی با زمان تغییر



شکل ۴-۴ - پاسخ‌های ضربه برای مدار تغییرپذیر بازمان.

درمورد اول، یک ضربه واحد در زمان τ_1

و درمورد دوم، در زمان τ_2 به مدار اعمال

شده است.

میکنند در نظر میگیریم. برای چنین مداری پاسخ حالت صفر به ضربه واحدی که در زمان τ_1 اعمال میشود، یعنی $\delta(t - \tau_1)$ ، مساوی پاسخ حالت صفر برای ضربه واحد دیگری که در زمان τ_2 ، یعنی $\delta(t - \tau_2)$ به مدار اعمال میگردد نخواهد بود. علت این امر اینست که ضریب تقویت تقویت کننده در زمان τ_1 و لحظه‌یی بعد از آن، از ضریب تقویت آن در زمان τ_2 و لحظه‌یی بعد از آن متفاوت است. بالنتیجه در بیان پاسخ ضربه بایستی لحظه اعمال ضربه به مدار نیز بدقت تعیین شود. در حالت مورد بحث، پاسخ ضربه ممکن است مشابه شکل (۴-۴) باشد. بطور کلی $h(t, \tau)$ بیان کننده «پاسخ حالت صفر در زمان t ناشی از ضربه واحد اعمال شده در زمان τ » میباشد.

برای «مدارهای خطی تغییرپذیر بازمان» میتوان نشان داد که پاسخ حالت صفر تابع خطی ورودی است. درحقیقت با استفاده از خواص جمع پذیری و همگنی میتوان نشان داد که «پاسخ حالت صفر به یک ورودی «دلخواه» i_z که در زمان t_0 اعمال میشود برابر است» با:

$$(4-6) \quad v(t) = \int_{t_0}^t h(t, t') i_z(t') dt' \quad t \geq t_0$$

چنانچه فرمول فوق را با (۴-۴) مقایسه کنیم، مشاهده خواهیم کرد که تنها تفاوت

این دو آنست که اکنون پاسخ ضربه تابعی از دو متغیر t و t' میباشد درحالیکه در (۴-۴)

تابعی از تناضل $t - t'$ بود .

بطور مشابه، درمسأله الکتروستاتیک، اگر مثلاً ثابت دی‌الکتریک^(۱) ϵ ، تابعی از x' باشد، پتانسیل نقطه x با این فرمول بیان خواهد شد :

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, x') \rho(x') dx'$$

که درآنجا $g(x, x')$ ، پتانسیل نقطه x ، ناشی از یک بار نقطه‌یی واحد در x' میباشد.

۴-۴ پاسخ کامل

درفصل چهارم ثابت کردیم که برای یک مدار RC خطی تغییرناپذیر بازمان و از مرتبه اول، پاسخ کامل مساوی مجموع پاسخ حالت صفر و پاسخ ورودی صفر میباشد. در حقیقت برای هرمدار خطی، تغییرپذیر یا تغییرناپذیر بازمان، بیان فوق صحیح میباشد. اثبات کلی وکامل این بیان درفصل سیزدهم داده خواهد شد. فعلاً این حقیقت را بصورت معادله زیر بیان میکنیم :

$$y(t) = z(t) + v(t)$$

یا :

$$(t-v) \quad y(t) = z(t) + \int_{t_0}^t h(t, t') w(t') dt' \quad t \geq t_0$$

که درآن z پاسخ ورودی صفر و v پاسخ حالت صفر، w ورودی و y پاسخ کامل میباشد. از معادله $(t-v)$ واضح است که « پاسخ کامل، تنها موقعی یک تابع خطی ورودی است که پاسخ ورودی صفر، بطور متحد برابر صفر باشد ».

تمرین ۱- فرض کنید که درمدار شکل $(۲-۱)$ ، سلف L و مقاومت R_2 را حذف کنیم. گیریم i_C ورودی و v_C پاسخ باشد. عبارتی برای $v_C(t)$ ، یعنی پاسخ کامل مدار، برحسب i_C و ولتاژ اولیه خازن V_0 پیدا نمائید.

۳۳۹

مبانی مدارهای خطی و تغییرناپذیر با زمان

تمرین ۴- خازن C را از مدار شکل (۲-۱) حذف کنید. با در نظر گرفتن i_L به عنوان پاسخ، عبارتی برای $i_L(t)$ ، یعنی پاسخ کامل مدار بر حسب i_s و جریان اولیه سلف I_0 ، بدست آورید.

۵- محاسبه انتگرال‌های کانولوشن

در بخش قبل نشان دادیم که پاسخ حالت صفر v یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، به یک ورودی دلخواه $i_s(\cdot)$ که در زمان t_0 بمدار اعمال میشود، با انتگرال کانولوشن،

$$(۵-۱) \quad v(t) = \int_{t_0}^t h(t-t') i_s(t') dt' \quad t \geq t_0 \quad \text{برای تمام}$$

بیان می‌گردد که در آن h پاسخ ضربه واحد می‌باشد. بنابراین با داشتن پاسخ ضربه h ، میتوان برای $t \geq t_0$ $v(t)$ ناشی از $i_s(\cdot)$ را که در لحظه t_0 بمدار اعمال میشود با انتگرال گیری رابطه (۵-۱) بدست آورد. در این بخش با استفاده از چند مثال، محاسبه انتگرال کانولوشن را تشریح خواهیم کرد. معه‌ذا ابتدا دو نتیجه ساده ولی مفید را بدست می‌آوریم.

۱- فرض کنید که ورودی i_s ، ضربه واحدی است که در $t_1 > t_0$ بمدار اعمال میشود، یعنی، $i_s(t) = \delta(t - t_1)$. می‌خواهیم بوسیله (۵-۱) نشان دهیم که پاسخ v توسط $h(t - t_1)$ بیان میشود. از رابطه (۵-۱) داریم:

$$(۵-۲) \quad v(t) = \int_{t_0}^t h(t-t') \delta(t' - t_1) dt' \quad t > t_0 \quad \text{برای}$$

از تعریف تابع ضربه میدانیم که $\delta(t' - t_1)$ برای تمام زمانها بجز $t' = t_1$ برابر صفر است. در نقطه $t' = t_1$ ، δ ویژه بوده و دارای خاصیت:

$$\int_{t_1-}^{t_1+} \delta(t' - t_1) dt' = 1$$

میباشد. بنابراین میتوان بجای (۵-۲) چنین نوشت:

$$v(t) = \int_{t_1-}^{t_1+} h(t-t') \delta(t'-t_1) dt'$$

که در آن t_1- و t_1+ بترتیب نمایشگر درست لحظه‌یی قبل، و درست لحظه‌یی بعد از t_1 میباشند. برای مدارهای فشرده خطی تغییرناپذیر بازمان، h درفاصله $(0, \infty)$ یک تابع پیوسته میباشد. بنابراین میتوان نوشت:

$$(5-3) \quad v(t) = h(t-t_1) \int_{t_1-}^{t_1+} \delta(t'-t_1) dt' = h(t-t_1) \quad t > 0$$

درنتیجه، انتگرال کانولوشن دارای این خاصیت مهم است که (برای $t > t_1 > t_0$):

$$(5-4) \quad \int_{t_0}^t h(t-t') \delta(t'-t_1) dt' = h(t-t_1)$$

معادله (۵-۴) را میتوان نتیجه مستقیم خطی بودن و تغییرناپذیری بازمان مدار دانست. زیرا بموجب تعریف، $h(t)$ پاسخ حالت صفر در زمان t به ضربه « اعمال شده در زمان ۰ » میباشد. تغییرناپذیری بازمان لازم میدارد که اگر ضربه در لحظه t_1 به مدار اعمال شده باشد، پاسخ حالت صفر همان شکل موج قبلی را داشته، اما با اندازه t_1 ثانیه انتقال یافته می‌باشد. عبارت دیگر، در این حالت پاسخ مساوی $h(t-t_1)$ خواهد بود [چنانکه توسط (۵-۴) پیش گویی شد].

۲- انتگرال کانولوشن (۵-۱) را میتوان با یک تغییر متغیر بصورت دیگری نوشت. اگریم $t-t' = \tau$ باشد که τ یک متغیر ساختگی^(۱) جدید است، آنگاه $t' = t - \tau$ و $dt' = -d\tau$ خواهد بود. حدپائین انتگرال برحسب متغیر جدید بصورت $\tau = t - t_0$ و حد بالای انتگرال بصورت $\tau = 0$ خواهد شد. بنابراین:

$$v(t) = \int_{t-t_0}^0 h(\tau) i_s(t-\tau) (-d\tau)$$

$$(5-5) \quad = \int_0^{t-t_0} h(\tau) i_s(t-\tau) d\tau$$

چون t و t' متغیرهای ساختگی انتگرال هستند، میتوان (۵-۵) را برای مقایسه با (۵-۱) مجدداً برحسب t' نوشت و بنابراین :

$$(5-6) \quad v(t) = \int_0^{t-t_0} h(t') i_s(t-t') dt' \quad \text{برای } t \geq t_0$$

در نتیجه، اگر $t_0 = 0$ باشد، (۵-۱) و (۵-۶) هر دو دارای حدود انتگرال گیری یکسان خواهند بود، یعنی بین 0 و t ،

$$(5-7) \quad \int_0^t h(t-t') i_s(t') dt' = \int_0^t h(t') i_s(t-t') dt' \quad \text{برای } t \geq 0$$

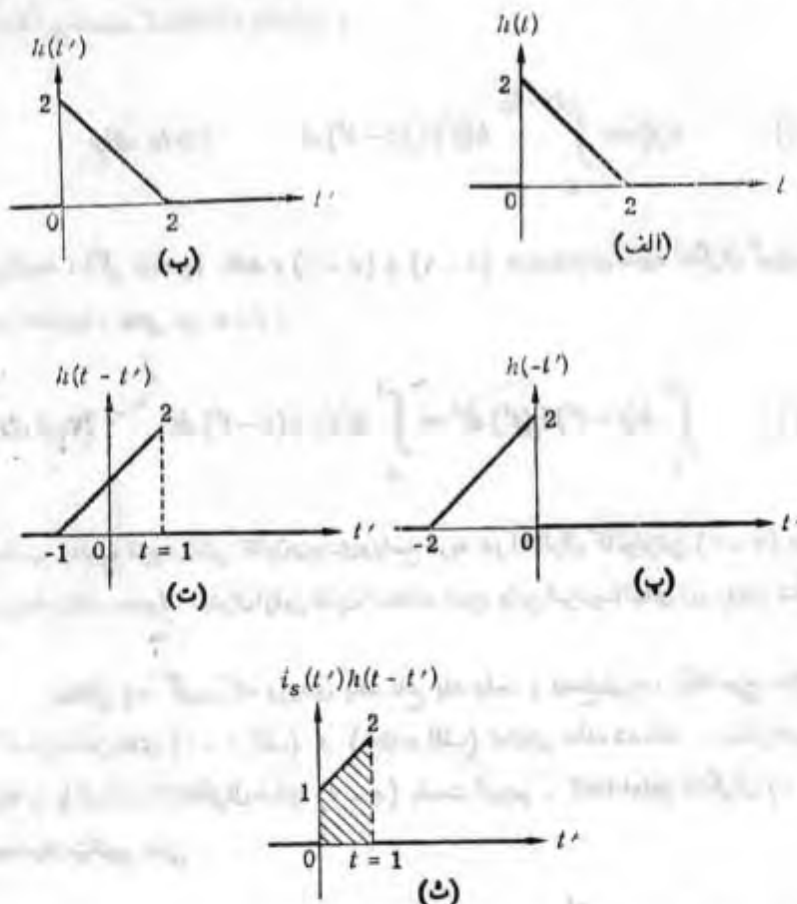
مطلب جالب توجه نقش تقارن ورودی و پاسخ ضربه در انتگرال کانولوشن (۵-۷) میباشد. در محاسبات، معمولاً میتوان از این تقارن استفاده نمود و این امر در مثالهای زیر روشن شده است.

مثال ۱- گیریم که ورودی یک تابع پله واحد و پاسخ ضربه، یک موج مثلثی باشد

که در شکل های (۱-الف) و (۲-الف) نمایش داده شده اند. میخواهیم پاسخ پله را با استفاده از انتگرال های (۵-۷) بدست آوریم. ابتدا اولین انتگرال (۵-۷) را محاسبه میکنیم یعنی :

$$(5-8) \quad v(t) = \int_0^t h(t-t') i_s(t') dt' \quad \text{برای } t \geq 0$$

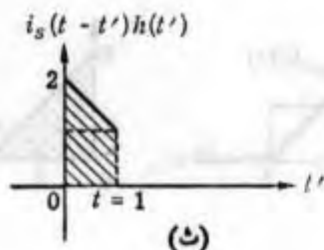
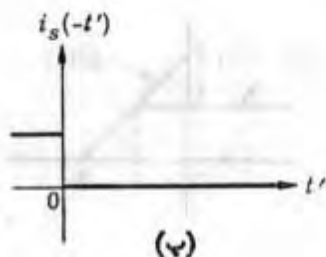
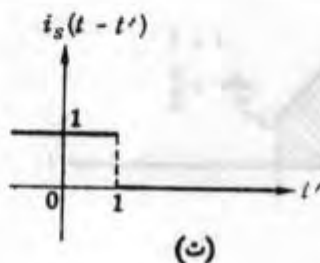
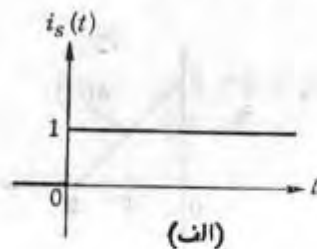
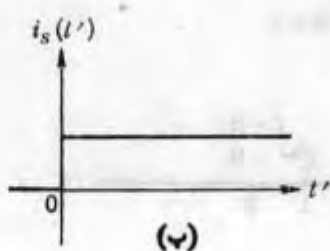
شکل (۱-۵ الف) نمایش هندسی پامخ ضربه را بیا میدهد. این شکل در (۱-۵ ب) تکرار شده است، که در آن بجای متغیر t ، متغیر t' بکار رفته است. شکل (۱-۵ پ)، $h(-t')$ را برحسب t' نشان میدهد. توجه شود که این شکل تصویر آینه‌یی نمایش شکل قبل نسبت به محور عرضها میباشد. شکل (۱-۵ ت)، تابع $h(t-t')$ را برحسب t' نشان میدهد. توجه کنید که t مقدار ثابتی است (در شکل $t=1$ میباشد). همچنین توجه کنید که نمایش شکل (۱-۵ ت)، از انتقال شکل (۱-۵ پ) بمقدار t ثانیه، بسمت راست حاصل شده است. شکل (۱-۵ ث) نمایش هندسی عبارت زیر انتگرال



شکل ۱-۵- مثالی برای تشریح محاسبه انتگرال کانولوشن با استفاده از معادله (۱-۵-۸). محاسبه برای $t=1$ انجام شده است.

۳۴۳

مبانی مدارهای خطی و تغییرناپذیر با زمان



شکل ۵-۲-۵- مثال برای تشریح محاسبه انتگرال کانولوشن

با استفاده از معادله (۹-۵)

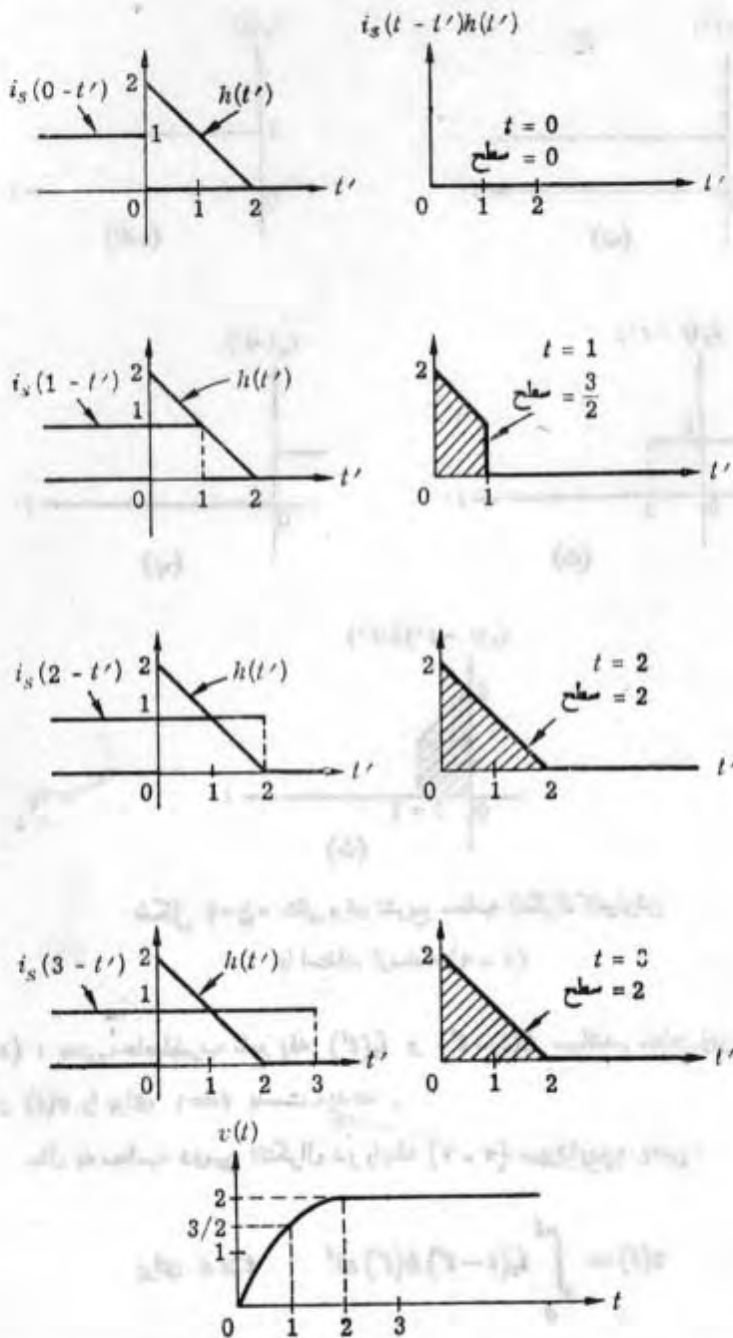
(۵-۸) ، یعنی، حاصلضرب تابع پله $i_s(t')$ و $h(t-t')$ میباشد. سطح زیر این شکل، مقدار $v(t)$ را برای $t=1$ بدست میدهد.

حال به محاسبه دومین انتگرال در رابطه (۷-۵) میپردازیم، یعنی:

$$(۵-۹) \quad v(t) = \int_0^t i_s(t-t') h(t') dt' \quad \text{برای } t \geq 0$$

ابتدا t' را برحسب t رسم میکنیم (شکل ۵-۲-۵ ب). آنگاه تصویر آینه‌ی آنرا نسبت

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها



شکل ۳-۵- مثال ۱: تشریح محاسبه کانولوشن

به محور عرضها یعنی $i_s(-t')$ را برحسب t' رسم میکنیم. سپس همه نمایش هندسی را بعیزان t ثانیه، بسمت راست انتقال داده و $i_s(t-t')$ را برحسب t' بدست میآوریم (شکل ۲-۵ ت). آنگاه حاصلضرب پاسخ ضربه $h(t')$ و $i_s(t-t')$ را رسم میکنیم (شکل ۲-۵ ث). سطح زیر این شکل، $v(t)$ را برای $t=1$ تعیین میکند. واضح است که نتایج بدست آمده از هردو حالت مساوی خواهند بود. در شکل (۳-۵) نمایش های هندسی را که برای محاسبه انتگرال (۹-۵) برای مقادیر ۳، ۲، ۱، ۰، $t=0$ بکار رفته، رسم نموده ایم.

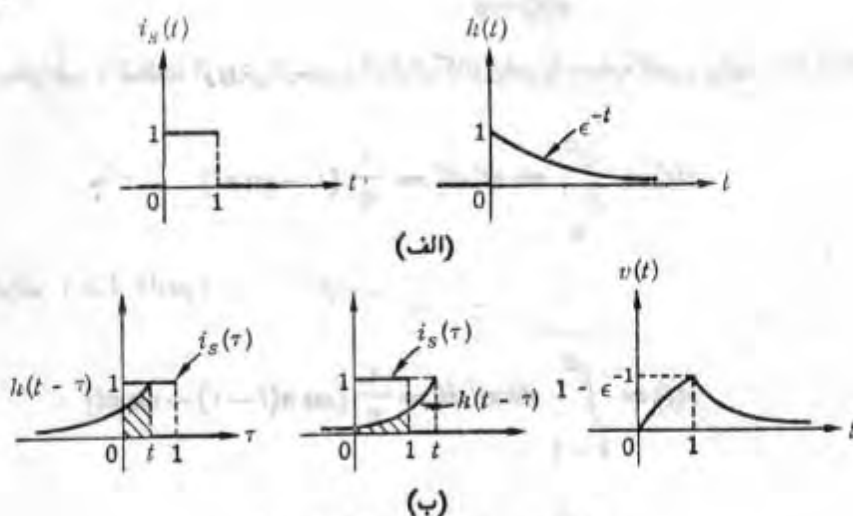
مثال ۲-۲ پاسخ حالت صفر را برای ورودی و پاسخ ضربه داده شده در شکل (۴-۵ الف) تعیین نموده و رسم کنید. داریم:

$$i_s(t) = u(t) - u(t-1)$$

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

واضح است که پاسخ $v(t)$ برای t منفی صفر میباشد. برای $t \geq 0$ از رابطه زیر استفاده میکنیم:

$$v(t) = \int_0^t h(t-t') i_s(t') dt'$$



شکل ۴-۵-۲ مثال ۲ انتگرال کانولوشن

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

برای $0 \leq t < 1$ ، چون $i_s(t) = 1$ است داریم:

$$v(t) = \int_0^t e^{-(t-t')} dt' = 1 - e^{-t}$$

برای $t \geq 1$ ، چون $i_s(t) = 0$ ، تنها کافی است تا $t = 1$ انتگرال گرفته شود. بنابراین:

$$v(t) = \int_0^1 e^{-(t-t')} dt' = (e-1)e^{-t}$$

تعبیر هندسی این دو مرحله و پاسخ مدار در شکل (۴-ب) نشان داده شده‌اند.

مثال ۳- پاسخ حالت صفر را برای ورودی و پاسخ ضربه نشان داده شده در شکل

(۵-ه) تعیین نمایید. داریم:

$$i_s(t) = u(t) \sin \pi t$$

$$h(t) = u(t) - u(t-1)$$

برای $t \leq 0$ داریم:

$$v(t) = 0$$

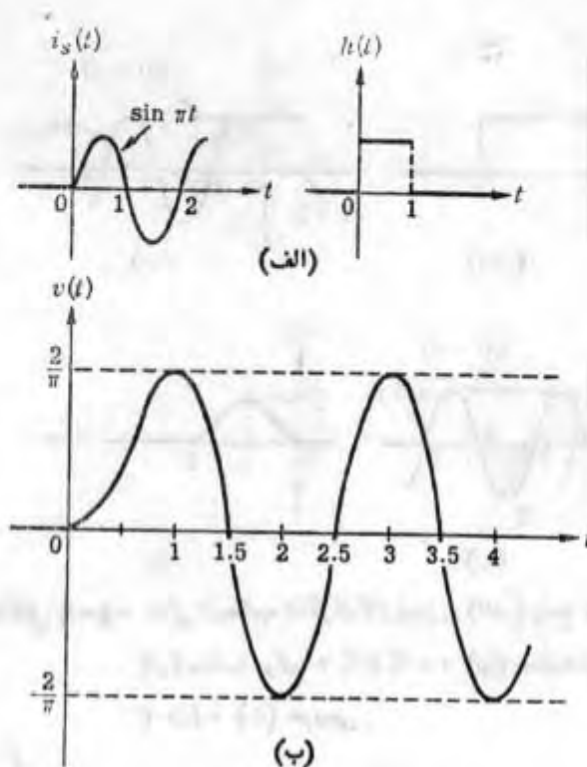
میخواهیم با استفاده از روش ترسیمی، انتگرال کانولوشن را حساب کنیم. برای $0 \leq t \leq 1$

$$v(t) = \int_0^t \sin \pi t' dt' = \frac{1}{\pi} (1 - \cos \pi t)$$

برای $t \geq 1$ داریم:

$$v(t) = \int_{t-1}^t \sin \pi t' dt' = \frac{1}{\pi} [\cos \pi(t-1) - \cos \pi t]$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cos \pi t$$



شکل ۵-۵- مثال ۳ انتگرال کانولوشن

نتیجه در شکل (ه - ه ب) نشان داده شده است. توجه کنید که پاسخ پس از گذشت زمان «گذرا»، که در فاصله $0 \leq t \leq 1$ می باشد، سینوسی خواهد بود.

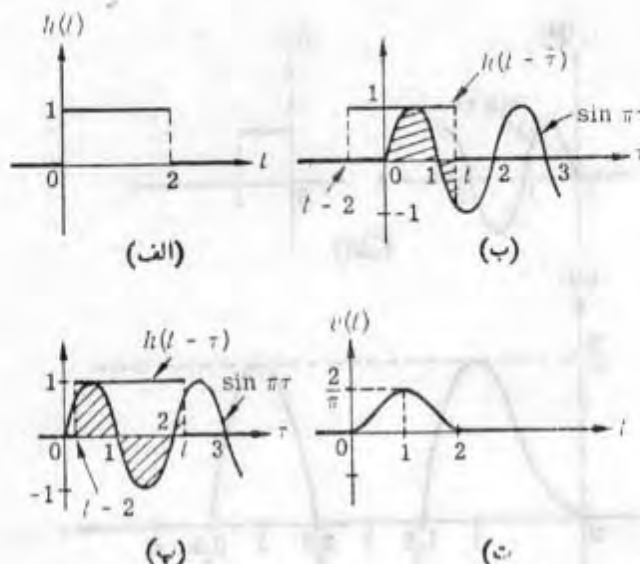
مثال ۴- برای همان ورودی مثال ۳ و پاسخ ضربه شکل (۶ - ه الف) که یک پالس مستطیلی با عرض ۲ ثانیه می باشد، پاسخ حالت صفر را تعیین کنید. بنابراین:

$$i(t) = (\sin \pi t)u(t) \quad h(t) = u(t) - u(t-2)$$

برای $t < 0$ داریم:

$$v(t) = 0$$

برای $0 \leq t \leq 2$ (شکل ۶ - ه ب را ببینید):



شکل ۶-۵- مثالی از محاسبه انتگرال کانولوشن. (الف) پاسخ ضربه،
(ب) محاسبه برای $0 \leq t \leq 2$ ، (پ) محاسبه برای
 $t \geq 2$ ، (ت) خروجی.

$$v(t) = \int_0^t \sin \pi t' dt' = \frac{1}{\pi} (1 - \cos \pi t)$$

برای $t \geq 2$ (شکل ۶-۵ ب را ببینید).

$$v(t) = \int_{t-2}^t \sin \pi t' dt' = \frac{1}{\pi} [\cos \pi(t-2) - \cos \pi t] = 0$$

پاسخ (۰) $v(t)$ در شکل (۶-۵ ت) نشان داده شده است. توجه کنید که برای $t \geq 2$ ، پاسخ بطور متحد مساوی صفر می‌باشد. درحقیقت، برای $t \geq 2$ ، پاسخ حالت صفر را می‌توان یک تابع میثوسی با دامنه صفر تعبیر نمود.

خلاصه

● در این فصل برخلاف فصل‌های قبل، اساساً با روش‌هایی برخورد می‌کنیم که در تجزیه و تحلیل مدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان مفید می‌باشند. سه روش عمده چنین است: (۱) تجزیه و تحلیل مش و گره، (۲) تعیین پاسخ ضربه یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام، (۳) محاسبه انتگرال‌های کانولوشن.

● تجزیه و تحلیل گره برای مداری با $n+1$ گره، برپایه نوشتن n معادله KCL در n گره، برحسب مجموعه‌ی از n ولتاژ جفت گره قرار دارد.

● تجزیه و تحلیل مش برای مداری با m مش، برپایه نوشتن m معادله KVL برای m مش، برحسب مجموعه‌ی از m جریان مش قرار دارد.

● برای یک مدار خطی تغییرناپذیر بازمان با یک ورودی و یک خروجی، با انجام عملیاتی در معادلات گره یا مش، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه n ام با ضرایب ثابت برای متغیر خروجی بدست می‌آید.

● پاسخ ضربه یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام مناسب، بصورت زیر می‌باشد:

$$h(t) = u(t) \left(\sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} \right)$$

که در آن، s_i ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، ریشه «متمايز» معادله مشخصه می‌باشند.

● برای مدارهای خطی تغییرناپذیر بازمان، پاسخ حالت صفر v ، به هرورودی i_s که در زمان t_0 بمدار اعمال می‌شود، مساوی کانولوشن ورودی i_s که در زمان t_0 اعمال شده، با پاسخ ضربه h می‌باشد. یعنی:

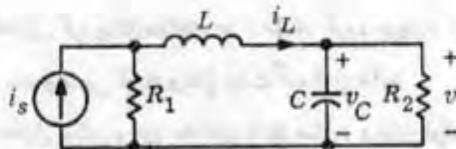
$$v(t) = \int_{t_0}^t h(t-t') i_s(t') dt' \quad \text{برای } t \geq t_0$$

● برای تمام $t \geq 0$ داریم:

$$\int_0^t h(t-t') i_s(t') dt' = \int_0^t i_s(t-t') h(t') dt'$$

مسائل

۱- تجزیه و تحلیل گره برای مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۱-۶) با بکار بردن تجزیه و تحلیل گره، معادله دیفرانسیلی بر حسب ولتاژ v بدست آورید. شرایط اولیه $v_C(0) = V_0$ و $i_L(0) = I_0$ داده شده‌اند.

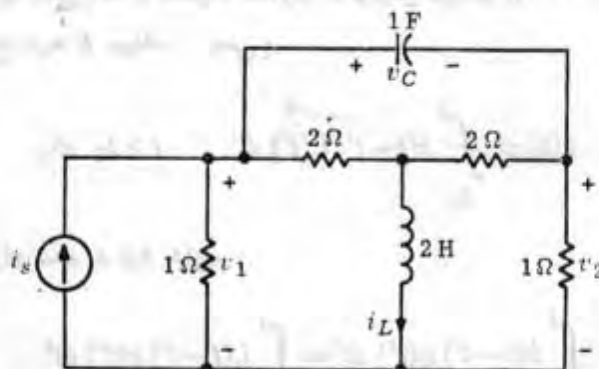


شکل (مسئله ۱-۶)

۲- تجزیه و تحلیل مش در مدار مسأله قبل، منبع جریان را به منبع ولتاژ معادل تبدیل نموده، آنگاه با بکار بردن تجزیه و تحلیل مش، معادله دیفرانسیلی بر حسب متغیر v بدست آورید.

۳- معادلات حالت معادلات حالت را برای مدار مسأله قبل بنویسید. v و i_L را بعنوان متغیرهای حالت بکار ببرید.

۴- تجزیه و تحلیل گره معادلات گره را برای مدار خطی تغییرناپذیر با زمان شکل (مسئله ۴-۶) بنویسید. معادلات دیفرانسیلی برای ولتاژهای v_1 و v_2 تعیین کنید. شرایط اولیه لازم برای هر مورد را بر حسب $v_C(0)$ و $i_L(0)$ بیان کنید.



شکل (مسئله ۴-۶)

۵- تجزیه و تحلیل مش مسأله قبل را بابکار بردن تجزیه و تحلیل مش حل کنید.

۶- معادلات حالت معادلات حالت را برای مدار شکل (مسأله ۴ - ۶) بنویسید.

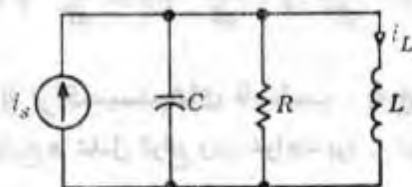
۷- شرایط اولیه و تحریک ضربه مدار خطی تغییرناپذیر بازمان RLC در شکل (مسأله ۶ - ۷) را در نظر بگیرید. گیریم که h ، جریان سلف ناشی از $i_s = \delta$ بوده و $h(0_-) = \frac{dh}{dt}(0_-) = 0$ باشد.

الف - مقادیر $h(0_+)$ و $\frac{dh}{dt}(0_+)$ را محاسبه کنید (بر حسب R ، L و C).

ب - مستقیماً نشان دهید که (با بررسی شرایط اولیه و گذاردن آنها در معادله دیفرانسیل):

$$i_L(t) = \int_0^t h(t-t') i_s(t') dt' \quad \text{برای } t \geq 0$$

پاسخ حالت صفر به ورودی i_s میباشد.



شکل (مسأله ۷ - ۶)

۸- پاسخ ورودی صفر، پاسخ ضربه و پاسخ پله معادله دیفرانسیل یک

مدار خطی تغییرناپذیر بازمان، بصورت زیر داده شده است:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4 \frac{d^2 y}{dt^2} + 5 \frac{dy}{dt} + 2y = \frac{d^2 w}{dt^2} + 2w$$

شرایط اولیه عبارتند از:

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$y(0_-) = 1 \quad \frac{dy}{dt}(0_-) = 2 \quad \frac{d^2y}{dt^2}(0_-) = -1$$

پاسخ ورودی صفر، پاسخ ضربه و پاسخ پله را بدست آورید.

۹- پاسخ حالت صفر و پاسخ کامل برای مسأله ۸، اگر w ورودی سینوسی، $w(t) = \cos t$ باشد، پاسخ حالت صفر را با دو روش مختلف بدست آورید. پاسخ کامل را برای شرایط اولیه داده شده محاسبه کنید.

۱۰- پاسخ ضربه پاسخ ضربه معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = w \quad \text{الف -}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = \frac{dw}{dt} + w \quad \text{ب -}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = \frac{dw}{dt} + 2w \quad \text{پ -}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = \frac{d^2w}{dt^2} + 2w \quad \text{ت -}$$

۱۱- پاسخ ضربه برای سیستم‌های نامناسب پاسخ ضربه معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید. پاسخ‌ها شامل توابع ویژه خواهند بود. توابع ویژه لازم را با معادل نمودن جملات متناظر دو طرف معادله بدست آورید.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + y = 2 \frac{d^2w}{dt^2} + 0 \frac{dw}{dt} + w \quad \text{الف -}$$

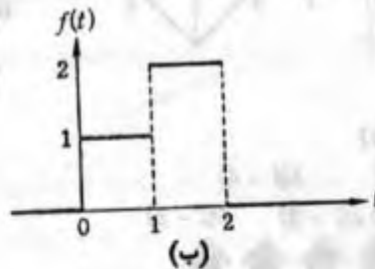
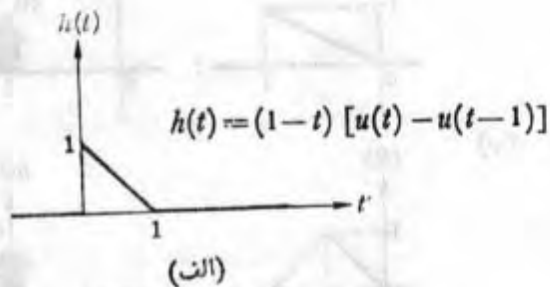
$$\frac{dy}{dt} + y = \frac{d^2w}{dt^2} + 2 \frac{dw}{dt} + 2w \quad \text{ب -}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0 \frac{dy}{dt} + y = 2 \frac{d^2w}{dt^2} + 2 \frac{d^2w}{dt^2} + w \quad \text{پ -}$$

مبانی مدارهای خطی و تغییرناپذیر با زمان

۳۵۳

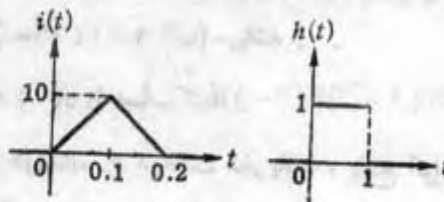
- ۱۲- پاسخ حالت صفر یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، دارای پاسخ ضربه $h(t)$ مطابق شکل (مسئله ۱۲ - الف) میباشد.
- الف - پاسخ پله $s(t)$ را حساب کنید.
- ب - اگر سیستم در زمان $t=0$ در حالت صفر باشد، پاسخ آنرا به شکل موج $f(t)$ نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۲ - ب) پیدا کنید.



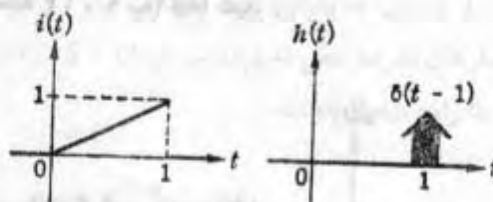
شکل (مسئله ۱۲ - ب)

- ۱۳- پاسخ حالت صفر پاسخ حالت صفر موارد زیر را بدون استفاده از انتگرال کانولوشن بدقت رسم کنید (شکل مسئله ۱۳ - ب). $h(t)$ نمایشده پاسخ ضربه مدار خطی تغییرناپذیر با زمان مورد بررسی و $f(t)$ نمایش ورودی آن است.

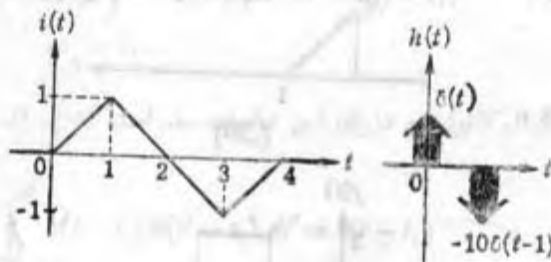
(الف)



(ب)

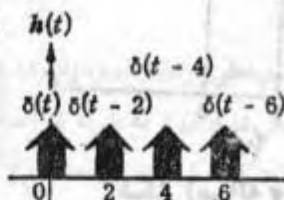


(پ)



مانند حالت

(پ)



(ت)

شکل (مسأله ۱۳ - ۶)

۱۴- انتگرال کانولوشن مسأله ۱۳ را با استفاده از انتگرال کانولوشن حل کنید.

۱۵- پاسخ پله و پاسخ ضربه به پاسخ حالت صفر $h(t)$ یک شبکه به جریان ورودی

ضربه واحد در شکل (مسأله ۱۵ - ۶) رسم شده است.

الف- پاسخ حالت صفر را به $i(t) = u(t)$ محاسبه و رسم کنید.

۳۵۵

مبانی مدارهای خطی و تغییرناپذیر با زمان

ب. پاسخ حالت صفر را برای پالس‌های $\Delta p \Delta(t)$ و $\Delta i(t)$ برای مقادیر $0, 1, 2, \Delta$ ثانیه، محاسبه و رسم کنید.

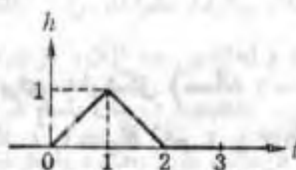
پ. فرض کنید که با تغییر طرح مدار توسط عناصر موجود، میتوان h را بهر صورت دلخواه درآورد بشرطیکه:

$$(1) \quad h(t) = 0 \quad t < 0 \quad \text{برای تمام}$$

$$(2) \quad 0 \leq |h(t)| \leq 1 \quad t \geq 0 \quad \text{برای تمام}$$

$$(3) \quad \int_0^{\infty} h(t) dt = 1$$

با این محدودیت‌های داده شده، اگر بخواهیم پاسخ پله مدار اصلاح شده در کوتاهترین مدت به حالت دائمی خود برسد، چه شکلی را برای h انتخاب خواهید نمود؟



شکل (مسئله ۱۵ - ۶)

۱۶- پاسخ پله شیب‌دار پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان بصورت زیر

مشخص می‌گردد:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{1+t} & \text{برای تمام } t \geq 0 \\ 0 & \text{برای تمام } t < 0 \end{cases}$$

پاسخ حالت صفر v را برای تابع شیب واحد r که در لحظه $t_0 = 1$ بمدار اعمال میشود محاسبه و رسم کنید.

۱۷- انتگرال کانولوشن اگر پاسخ ضربه یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان

بصورت زیر داده شده باشد:

$$h(t) = \begin{cases} 2e^{-t} & 0 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

پاسخ حالت صفر مدار را به ورودی زیر حساب کنید :

$$i_s(t) = \begin{cases} tu(t) & 0 \leq t < 2 \\ 0 & t \geq 2 \end{cases}$$

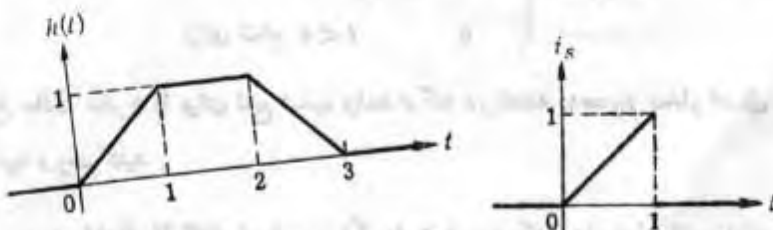
۱۸- مدار تغییرپذیر بازمان برای یک مدار خطی تغییرپذیر بازمان، اگر پاسخ در زمان t ناشی از ضربه واحد اعمال شده در لحظه τ بصورت زیر باشد :

$$h(t, \tau) = t - \tau^2$$

با استفاده از کانولوشن، پاسخ را برای ورودی $i_s(t) = tu(t) + 2u(t) - \delta(t)$ محاسبه نمائید.

۱۹- پاسخ کامل برای مدار شکل (مسئله ۱-۶) فرض کنید $R_1 = 1$ اهم، $L = 1$ هنری، $C = 2$ فاراد، $R_2 = 1$ اهم، $I_0 = 1$ آمپر و $V_0 = 1$ ولت باشد. پاسخ ضربه و پاسخ کامل را برای ولتاژ خروجی v ناشی از پالس $i_{s1}(t) = u(t) - u(t-1)$ حساب کنید. هرگاه ورودی به $i_{s2}(t) = 2i_{s1}(t)$ تبدیل شود پاسخ کامل بچه صورت خواهد بود ؟

۲۰- انتگرال کانولوشن پاسخ حالت صفر مدار خطی تغییرناپذیر بازمان را از روی پاسخ ضربه $h(t)$ و ورودی i_s که در شکل (مسئله ۲۰-۶) نشان داده شده‌اند حساب کنید.

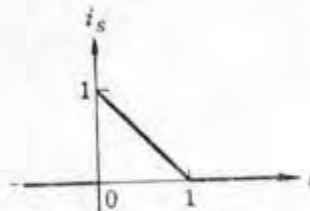


شکل (مسئله ۲۰-۶)

۳۵۷

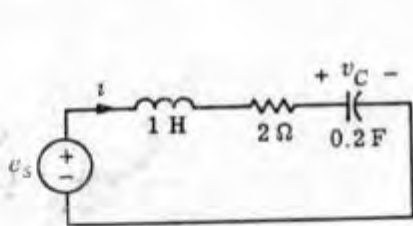
مبانی مدارهای خطی و تغییرناپذیر بازمان

۲۱- انتگرال کانولوشن مسأله ۲۰ را برای همان پاسخ ضربه ولی با ورودی دیگر i_s که در شکل (مسأله ۲۱ - ۶) نشان داده شده تکرار نمایید .

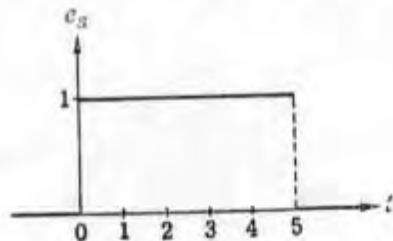


شکل (مسأله ۲۱ - ۶)

۲۲- پاسخ ضربه ، پاسخ کامل و کانولوشن مدار خطی تغییرناپذیر بازمان RLC سری نشان داده شده در شکل (مسأله ۲۲ - ۶ الف) را که دارای ورودی e_s و پاسخ i میباشد در نظر بگیرید .



(الف)



(ب)

شکل (مسأله ۲۲ - ۶)

الف - پاسخ ضربه را محاسبه و رسم کنید .

ب - عبارتی بنویسید که توسط آن بتوان پاسخ کامل را برای هرولتاژ ورودی e_s که در زمان $t=0$ بمدار اعمال میشود و برای هر حالت اولیه $i_L(0)=I_0$ و $v_C(0)=V_0$ بدست آورد .

پ - پاسخ کامل را برای $I_0=1$ آمپر ، $V_0=-1$ ولت و e_s مطابق شکل (مسأله ۲۲ - ۶ ب) بدست آورده و رسم نمایید .

فصل هفتم

تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

شکل موجهای سینوسی در علوم و مهندسی نقش مهمی را بازی میکنند. در مدارهای الکتریکی، فرکانس سینوسیهای مورد نظر میتواند از چند هرتز (سیکل در ثانیه) تا حدود کیلوهرتز، مگا هرتز و گیگاهرتز^(۱) تغییر کنند. همه ما با جریان سینوسی 50 Hz که برای انتقال قدرت و استفاده در منازل بکار می رود آشنا هستیم. در آزمایشگاه نیز از مولدهای سیگنال سینوسی و آشکارسازهایی^(۲) که دامنههای متعددی از فرکانس را دربردارند استفاده کرده ایم. بعنوان یک مهندس برق میدانیم که شکل موجهای سینوسی در زندگی حرفه ای ما بمنزله نان شب هستند، زیرا همانطور که بعداً خواهیم دید، اگر پاسخ یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان را به «هر تابع سینوسی» بدانیم، اصولاً پاسخ آنرا به «هر سیگنال» دیگر خواهیم دانست. بنابراین، یادگیری مؤثرترین روش کار با توابع سینوسی بسیار حایز اهمیت است. در فصل چهارم مثالهایی را بیان نمودیم که در خلال آنها پاسخ مدارهای ساده به ورودیهای سینوسی را بدست آوردیم. روش بکاررفته برای تعیین یک جواب خاص اگرچه سراسر بود ولی بسیار ناشیانه است. در این فصل روش بسیار ساده تر و ظریف تری را بدست خواهیم آورد که بر پایه نمایش یک سینوسی با فرکانس داده شده، توسط یک عدد مختلط قرارداد دارد.

۱- مرور اعداد مختلط

۱-۱- توصیف اعداد مختلط

ابتدا پاره ای حقایق اساسی در مورد اعداد مختلط را خلاصه میکنیم. گیریم z یک عدد مختلط باشد و x و y به ترتیب جزء حقیقی و جزء انگاری آن باشند. در این صورت:

$$z = x + jy \quad (1-1)$$

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

که در آن $j = \sqrt{-1}$. همچنین میتوان نوشت:

(۱-۲) $\text{Re}(z) = x$ $\text{Im}(z) = y$
 که در آن $\text{Re}(\dots)$ بمعنی «جزء حقیقی $\dots$ » و $\text{Im}(\dots)$ بمعنی «جزء انگاری $\dots$ » میباشد. سمت راست معادله (۱-۱) نمایش مختصات قائم^(۱) عدد مختلط z میباشد. نمایش قطبی عدد مختلط z چنین است:

(۱-۳) $z = |z| e^{j\theta}$
 که در آن $|z|$ اندازه و یا دامنه z نامیده میشود و مقدار آن چنین است:

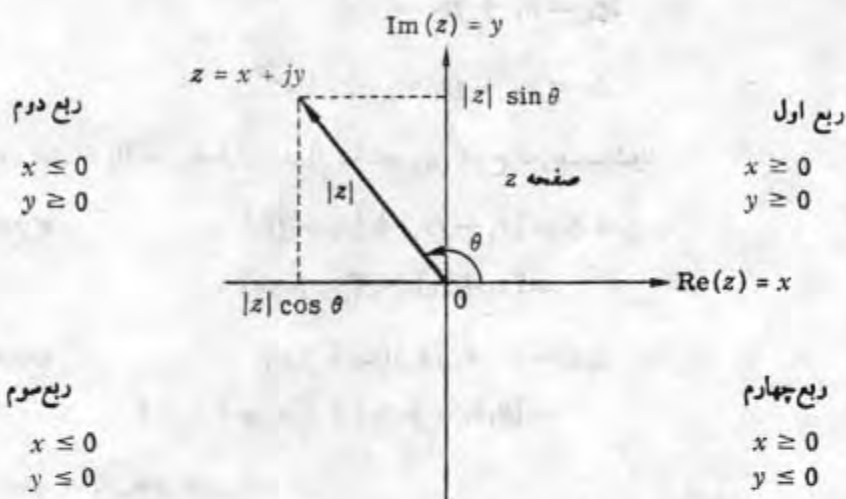
(۱-۴) $|z| = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$
 و θ زاویه و یا فاز z نامیده میشود و مقدار آن چنین میباشد:

(۱-۵) $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$
 گاهی زاویه θ را بصورت $\angle z$ مینویسیم. برحسب $|z|$ و θ داریم:

(۱-۶) $x = |z| \cos \theta$ $y = |z| \sin \theta$
 این حقایق در شکل (۱-۱) تشریح شده‌اند که در آنجا عدد مختلط z با نقطه‌ای که مختصات آن $\text{Re}(z)$ ، $\text{Im}(z)$ میباشد مربوط شده است. توجه کنید که فاز θ زاویه بین محور x و برداری است که از مبدأ شروع شده و به نقطه z ختم میگردد.

تبصره- زاویه θ محدودیه فاصله $[0, 2\pi]$ یا $(-\pi, \pi]$ می‌باشد، و بنابراین θ توسط x ، y بطور یکتا تعریف می‌شود. در محاسبه θ با استفاده از رابطه (۱-۵) بایستی بخاطر داشته باشیم که هرگاه $\tan \theta$ معلوم باشد، زاویه θ در فاصله $[0, 2\pi]$ بطور یکتا مشخص نخواهد بود. بعنوان مثال $\tan 26.6^\circ = 0.5$ است، ولی $\tan 206.6^\circ$ نیز مساوی ۰.۵ خواهد بود. برای یکتا مشخص نمودن θ بایستی علامت‌های $\text{Re}(z)$ ، $\text{Im}(z)$

$[0, 2\pi]$ نشان دهنده فاصله $0 \leq \theta < 2\pi$ ، $(-\pi, \pi]$ نمایشگر فاصله $-\pi < \theta \leq \pi$ می‌باشد.



شکل ۱-۱ - عدد مختلط و نمایش قطبی. هر عدد مختلط z متناظر با نقطه‌ای در صفحه z می‌باشد که می‌تواند توسط جزمه‌های حقیقی و انگاری خود و یا توسط اندازه و فازش مشخص شود

را در نظر گرفت که مشخص کننده ربعی^(۱) از صفحه مختلط می‌باشند که z در آن قرار دارد.

تمرین ۱ - $\tan \theta$ را برای $0 \leq \theta < 2\pi$ بر حسب θ رسم کنید.

تمرین ۲ - اعداد مختلط زیر را بصورت قطبی بیان کنید: $1 + j0$ ، $1 + j0.5$ ، $1 + j1$ ،

$1 - j1$ ، $1 + j2$ ، $-1 + j2$ و $-1 - j2$

تمرین ۳ - اعداد مختلط زیر را بصورت مختصات قائم بیان کنید (یعنی، $z = x + jy$):

30° ، 150° ، 240° ، 330° ، 180° ، 90° ، 0° و 270° .

۲-۱ عملیات با اعداد مختلط

قواعد عملیات اعداد مختلط همانند عملیات اعداد حقیقی است، بشرط اینکه از رابطه

$-1 = j^2$ استفاده شود. این قواعد همانند می‌باشند زیرا هم اعداد حقیقی و هم اعداد مختلط

هر دو از اصول یک میدان^(۲) پیروی می‌کنند (ضمیمه الف، بخش ۱-۲ را ببینید). گیریم:

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$z_1 = x_1 + jy_1 = |z_1| e^{j\theta_1}$$

$$z_2 = x_2 + jy_2 = |z_2| e^{j\theta_2}$$

دو عدد مختلط باشند. عملیات اعداد مختلط باین شرح تعریف میشوند:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) \quad \text{« جمع »}$$

$$= (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) \quad \text{« ضرب »}$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

و برحسب نمایش‌های قطبی آنها :

$$z_1 z_2 = |z_1| e^{j\theta_1} |z_2| e^{j\theta_2}$$

$$= |z_1| |z_2| e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

تمرین - نشان دهید :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2^2 + y_2^2}$$

و :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

« مزدوج مختلط » هرگاه عدد مختلط $z = x + jy$ را داشته باشیم، گوئیم که عدد

مختلط $x - jy$ که با $\bar{z}$ نشان داده می‌شود مزدوج مختلط^(۱) z است. باسانی

دیده می‌شود که هرگاه $z = |z| e^{j\theta}$ باشد آنگاه:

$$\bar{z} = |z| e^{-j\theta}$$

و:

$$z + \bar{z} = 2x$$

$$z - \bar{z} = 2jy$$

و بسیار مهم تر:

$$z \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$$

و:

$$x = \frac{1}{2} (z + \bar{z})$$

$$y = \frac{1}{2j} (z - \bar{z})$$

تمرین - مقادیر زیر را حساب نموده و نتایج را، هم بصورت مختصات قائم و هم بصورت مختصات قطبی بیان کنید.

$$\frac{(1+j1)(1+j2)}{j0(1-j1)} \quad \text{و} \quad 2e^{j30^\circ} - e^{-j45^\circ}$$

۲- فازورها و معادلات دیفرانسیل معمولی

۱-۲- نمایش یک سینوسی بوسیله یک فازور

یک « سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω » را بصورت هرتابی از t که درفاصله $(-\infty, \infty)$ تعریف شده و دارای شکل زیر باشد، تعریف کرده‌ایم:

$$(2-1) \quad A_m \cos(\omega t + \Phi)$$

که در آن ثابت‌های حقیقی A_m ، ω و Φ بترتیب دامنه، فرکانس زاویه‌ای^(۱) و فاز سینوسی نامیده می‌شوند.

منظور از آنچه که بیان خواهد شد، بدست آوردن قضیه مهم زیر است.

قضیه اصلی مجموعه جبری هرتعداد از سینوسی‌ها با « فرکانس زاویه‌ای یکسان »، مثلاً ω ، و هرتعداد از مشتق‌های آنها از هر مرتبه، خود یک سینوسی با « همان » فرکانس زاویه‌ای ω می‌باشد.

مثال ۱- تابع $f(t)$ را که برای تمام مقادیر t بصورت زیر تعریف میشود

در نظر بگیرید:

$$f(t) = 2 \cos(2t + 60^\circ) - t \sin 2t + \frac{d}{dt} 2 \sin 2t$$

توجه کنید که f مجموع دوسینوسی و مشتق سینوسی دیگر است که هریک از این سینوسی‌ها دارای فرکانس یکسان $\omega = 2$ رادیان بر ثانیه میباشند. قضیه اصلی بیان میدارد که تابع f را میتوان بصورت یک سینوسی تنها با «همان» فرکانس زاویه‌ای نشان داد. برای بررسی این حقیقت با بسط مستقیم جمله کسینوسی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2 \cos 2t \cos 60^\circ - 2 \sin 2t \sin 60^\circ - t \sin 2t + t \cos 2t \\ &= \cos 2t - \sqrt{3} \sin 2t - t \sin 2t + t \cos 2t \\ &= \cos 2t - (t + \sqrt{3}) \sin 2t \\ &= \sqrt{0^2 + (t + \sqrt{3})^2} \cos(2t + \tan^{-1} \frac{t + \sqrt{3}}{0}) \\ &= 7.6 \cos(2t + 48.8^\circ) \end{aligned}$$

که بصورت داده شده در معادله (۲-۱) میباشد.

اثبات قضیه اصلی در انتهای این زیربخش داده خواهد شد. ابتدا میخواهیم راجع به استنباطهای قضیه اصلی بحث کنیم. این قضیه بیان میدارد که میتوان روش‌های جبری را به سینوسی‌ها اعمال نمود. نخست توجه کنید که یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω ، با دامنه A_m و فاز Φ بطور کامل مشخص میشود، و بدینجهت فکر «نمایش» یک سینوسی بوسیله عدد مختلط $A \triangleq A_m e^{j\Phi}$ برای ما حاصل میگردد. توجه کنید که $A_m = |A|$ اندازه عدد مختلط A و $\Phi = \angle A$ فاز آن است. عبارت دقیق‌تر، سینوسی $x(t) \triangleq A_m \cos(\omega t + \Phi)$ توسط عدد مختلط $A \triangleq A_m e^{j\Phi}$ «نمایش» داده میشود و برعکس با داشتن عدد مختلط $A = A_m e^{j\Phi}$ و فرکانس زاویه‌ای ω ، سینوسی را میتوان چنین بدست آورد.

$$(2-2) \quad x(t) = \operatorname{Re} \{ A e^{j\omega t} \}$$

در واقع :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(Ae^{j\omega t}) &= \operatorname{Re}(A_m e^{j(\omega t + \Phi)}) \\
 &= \operatorname{Re}[A_m \cos(\omega t + \Phi) + jA_m \sin(\omega t + \Phi)] \\
 (2-2) \quad &= A_m \cos(\omega t + \Phi) = x(t)
 \end{aligned}$$

توجه کنید که در مرحله آخر از «حقیقی» بودن A_m ، ω ، t و Φ استفاده کرده ایم. برای راحتی، عدد مختلط A که سینوسی $A_m \cos(\omega t + \Phi)$ را نشان میدهد، فازور^(۱) نمایش دهنده سینوسی خوانده میشود. برحسب تعریف فازور A با $A = A_m e^{j\Phi}$ بیان میشود.

مثال ۲-۲ گیریم $v(t) = 110\sqrt{2} \cos(2\pi 60t + \frac{\pi}{3})$ ولت باشد. در اینصورت

فازور نمایش دهنده سینوسی چنین است :

$$A = 110\sqrt{2} e^{j(\frac{\pi}{3})}$$

یعنی :

$$v(t) = \operatorname{Re}(Ae^{j2\pi 60t})$$

تبصره ۱-۱ بایستی تأکید شود که دانستن نمایش فازوری یک سینوسی، تنها مقادیر دامنه و فاز آنرا مشخص میسازد و اطلاعاتی از فرکانس بدست نمیدهد. بنابراین هنگام محاسبات با فازورها، بایستی فرکانس فازورها را در نظر داشت.

تبصره ۲-۲ بطریقی دیگر، هرگاه یک سینوسی را بجای تابع کسینوس با تابع سینوس مشخص کنیم داریم :

$$y(t) = A_m \sin(\omega t + \Phi)$$

در اینصورت نیز نمایش فازوری $A \triangleq A_m e^{j\Phi}$ بقوت خود باقی است، معیاد خود سینوسی را بایستی از رابطه زیر دوباره بدست آورد :

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$y(t) = \text{Im}(Ae^{j\omega t})$$

در این کتاب منحصرآ از نمایش جزء حقیقی استفاده شده است.

تجرباً ۳۵- می‌خواهیم در صفحه مختصات مختلط، تابع $Ae^{j\omega t}$ را رسم کنیم. مختصات

عدد مختلط $Ae^{j\omega t}$ چنین اند:

$$x(t) = \text{Re}(Ae^{j\omega t}) \quad y(t) = \text{Im}(Ae^{j\omega t})$$

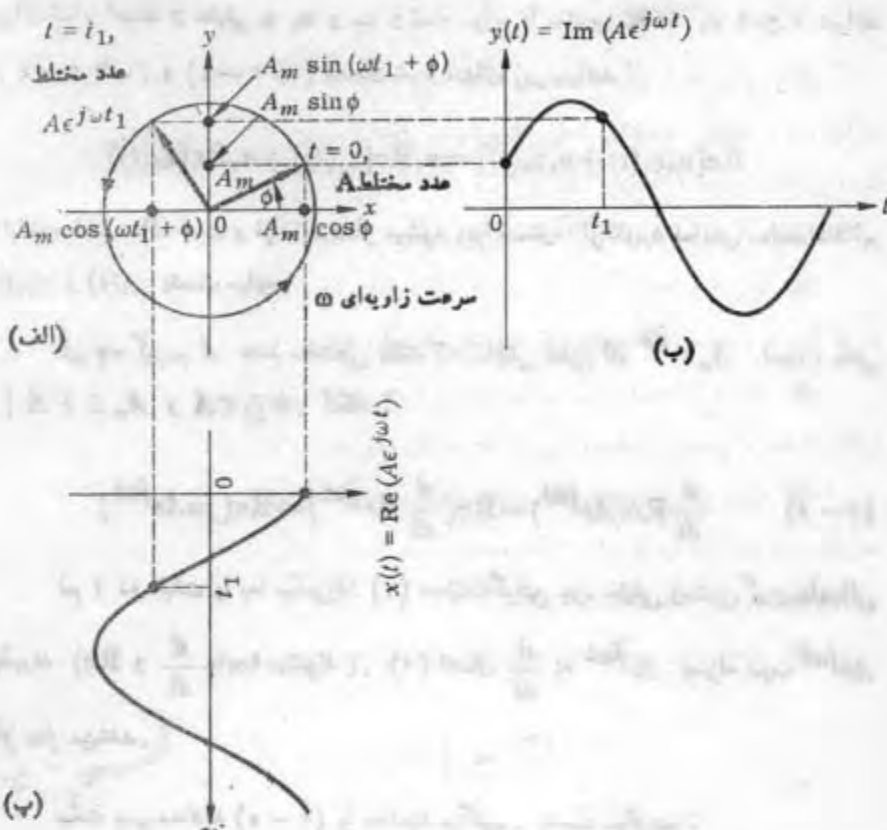
میتوان $x(t)$ را تصویر نقطه $Ae^{j\omega t}$ روی محور x دانست که این نقطه با سرعت زاویه‌ای ω رادیان بر ثانیه، روی دایره‌ی بشاع A_m در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، چنانکه در شکل (۱-۲) نشان داده شده است دوران میکند و بدینجهت $Ae^{j\omega t}$ را میتوان یک فازور دوار نامید. بهمین ترتیب تصویر نقطه $Ae^{j\omega t}$ روی محور y ، $y(t)$ را خواهد داد.

کاربرد عمده نمایش فازوری سینوسی‌ها در محاسبه «جواب خاص معادلات دیفرانسیل خطی معمولی با ضرایب حقیقی ثابت»، در حالتی که تابع تحریک یک سینوسی است، میباشد. بعبارت دیگر، معادله دیفرانسیل دارای چنین شکلی است:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = A_m \cos(\omega t + \Phi)$$

که در آن $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, A_m, \omega$ و Φ «ثابت‌های حقیقی» میباشند. در واقع بموجب قضیه‌ای که قبلاً بیان شد هرگاه بجای x یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ی ω را در سمت چپ جایگزین کنیم، آنگاه تمام سمت چپ نیز معادل یک سینوسی با فرکانس ω خواهد بود و این درست همان است که سمت راست معادله لازم میدارد. بنابراین، تنها مسأله واقعی، محاسبه دامنه و فاز سینوسی است که جواب خاص میباشد. برای این کار از فازورها استفاده میکنیم و این روش را، روش فازوری^(۱) مینامند.

بجای اینکه مستقیماً وارد محاسبات شویم، ابتدا سه لم^(۲) را که نشان دهنده کارایی روش فازوری میباشند بدقت بیان خواهیم کرد.



شکل ۱-۲- نمایش فازور دوار $A_m e^{j\omega t}$ ، (الف) میتوان $A_m e^{j\omega t}$ را بصورت یک

بردار دوار در خلاف جهت عقربه‌های ساعت با فرکانس زاویه‌ای ω در نظر گرفت.

(ب) تصویر آن روی محور x . (پ) تصویر آن روی محور y

لم ۱- $\text{Re}[\dots]$ «جمع پذیر» و «همگن» است. بعبارت دیگر، گیریم z_1 و z_2

توابع دلخواه با مقادیر مختلطی از متغیر حقیقی t باشند و گیریم α یک عدد «حقیقی» باشد. «جمع پذیری» بدین معنی است که برای تمام چنین توابع z_1 و z_2 و تمام مقادیر t :

$$\text{Re}[z_1(t) + z_2(t)] = \text{Re}[z_1(t)] + \text{Re}[z_2(t)] \quad (۱-۲ الف)$$

و «همگنی» بدین معنی است که برای تمام اعداد «حقیقی» α و تمام مقادیر t :

$$\text{Re}[\alpha z_1(t)] = \alpha \text{Re}[z_1(t)] \quad (۱-۲ ب)$$

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

برای تمام اعداد « حقیقی » α_1 و α_2 و تمام توابع با مقادیر مختلط z_1 و z_2 ، شرایط (۴-۲ الف) و (۴-۲ ب) معادل شرط تنهای زیر میباشد:

$$\operatorname{Re}[a_1 z_1(t) + a_2 z_2(t)] = a_1 \operatorname{Re}[z_1(t)] + a_2 \operatorname{Re}[z_2(t)]$$

اثبات مطلب ساده است و از آن صرفنظر میشود زیرا مستقیماً از کاربرد نمایش مختصات قائم $z_1(t)$ و $z_2(t)$ بدست میاید.

لم ۲-۲. گیریم A عدد مختلطی باشد که نمایش قطبی آن $A_m e^{j\Phi}$ است، یعنی $A_m \triangleq |A|$ و $\Phi \triangleq \angle A$. آنگاه:

$$(۲-۵) \quad \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(A e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}\left(\frac{d}{dt} A e^{j\omega t}\right) = \operatorname{Re}(j\omega A e^{j\omega t})$$

لم ۲. دو حقیقت را به ما میآموزد: (۱) عملیات گرفتن جزء حقیقی و مشتق گیری جابجائی

پذیرند Re و $\frac{d}{dt}$ جابجا میشوند). (۲) اعمال $\frac{d}{dt}$ به $A e^{j\omega t}$ بمنزله ضرب $A e^{j\omega t}$ در $j\omega$ میباشد.

سمت چپ معادله (۲-۵) را محاسبه میکنیم. بدست میآوریم:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(A e^{j\omega t}) = \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(A_m e^{j(\omega t + \Phi)})$$

$$= \frac{d}{dt} [A_m \cos(\omega t + \Phi)]$$

$$= -\omega A_m \sin(\omega t + \Phi)$$

$$= \operatorname{Re}(j\omega A_m e^{j(\omega t + \Phi)})$$

$$= \operatorname{Re}(j\omega A e^{j\omega t})$$

$$= \operatorname{Re}\left(\frac{d}{dt} A e^{j\omega t}\right)$$

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

اکنون حالت معکوس را اثبات میکنیم. در اینجا فرض چنین است که $A=B$ ، و باید نشان دهیم:

$$\operatorname{Re}(Ae^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(Be^{j\omega t}) \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

این نتیجه آنی است، چون $A=B$ لازم می‌دارد که:

$$Ae^{j\omega t} = Be^{j\omega t} \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

و بنابراین:

$$\operatorname{Re}(Ae^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(Be^{j\omega t}) \quad \text{برای تمام مقادیر } t$$

«اثبات قضیه اصلی» برای سهولت حالت خاصی از سه سینوسی را در نظر بگیرید:

$$x(t) \triangleq A_m \cos(\omega t + \Phi_1) = \operatorname{Re}(Ae^{j\omega t})$$

$$y(t) \triangleq B_m \cos(\omega t + \Phi_2) = \operatorname{Re}(Be^{j\omega t})$$

$$z(t) \triangleq C_m \cos(\omega t + \Phi_3) = \operatorname{Re}(Ce^{j\omega t})$$

بنابراین:

$$A \triangleq A_m e^{j\Phi_1} = A_r + jA_i$$

$$B \triangleq B_m e^{j\Phi_2} = B_r + jB_i$$

$$C \triangleq C_m e^{j\Phi_3} = C_r + jC_i$$

که A ، B و C سه فازوری هستند که به ترتیب سینوسی‌های x ، y و z را نشان می‌دهند.

می‌خواهیم $x(t) + y(t) + \frac{d}{dt} z(t)$ را محاسبه کنیم. این مجموع را $\Sigma(t)$ مینامیم. در اینجا به صورت:

$$\Sigma(t) = \operatorname{Re}(Ae^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(Be^{j\omega t}) + \frac{d}{dt} \operatorname{Re}(Ce^{j\omega t})$$

از لم ۲، جمله سوم را میتوان چنین نوشت :

$$\operatorname{Re}(j\omega C e^{j\omega t})$$

با بکاربردن لم ۱، بدست میآید :

$$\sum(t) = \operatorname{Re}[(A + B + j\omega C) e^{j\omega t}]$$

بنابراین $\sum(\cdot)$ یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω میباشد. همچنین $\sum(\cdot)$ بشکل

$\operatorname{Re}(S e^{j\omega t})$ است که در آن :

$$S = S_m e^{j\phi} = S_r + jS_i$$

S فازوری است که سینوسی $\sum(\cdot)$ را نشان میدهد. مطابق لم ۳، عدد مختلط S با

$S = A + B + j\omega C$ بیان میشود. معادله آخر چنین لازم میدارد : هرگاه جزءهای حقیقی و انکاری را در نظر بگیریم، بدست میآید :

$$S_r = A_r + B_r - \omega C_i$$

$$S_i = A_i + B_i + \omega C_r$$

$$S_m = \sqrt{(A_r + B_r - \omega C_i)^2 + (A_i + B_i + \omega C_r)^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{A_i + B_i + \omega C_r}{A_r + B_r - \omega C_i}$$

که در آن ϕ مطابق قاعده‌ای که قبلاً بیان شد در ربع انتخاب شده واقع است.

روشن است که میتوان استدلال را برای مجموع هرتعداد سینوسی با فرکانس یکسان

و هرتعداد مشتق آنها از هر مرتبه، تعمیم داد.

تمرین ۱ - با استفاده از فرمول‌های استاندارد مثلثاتی نشان دهید :

$$A_m \cos \omega t + B_m \sin \omega t = \sqrt{A_m^2 + B_m^2} \cos(\omega t - \Phi)$$

که در آن Φ با $\tan \Phi = \frac{B_m}{A_m}$ تعیین میگردد و ربعی که Φ در آن قرار دارد با روابط زیر

$$\cos \Phi = \frac{A_m}{\sqrt{A_m^2 + B_m^2}} \quad \sin \Phi = \frac{B_m}{\sqrt{A_m^2 + B_m^2}}$$

تمرین ۲- همین نتایج را با استفاده از فازورها بدست آورید.

۲-۲- کاربرد روش فازوری در معادلات دیفرانسیل

چنانکه در ابتدای این بخش گفته شد، روش فازوری راحت‌ترین روش برای بدست آوردن جواب خاص یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب حقیقی ثابت، وقتی که تابع تحریک سینوسی است، میباشد. معادله زیر را در نظر بگیرید:

(۱۰-۲)

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = A_m \cos(\omega t + \Phi)$$

که $a_0, a_1, \dots, a_n, A_m, \omega$ و Φ ثابت‌های حقیقی میباشند. با بکار بردن فازورها چنین قرار می‌دهیم:

$$(۱۱-۲) \quad A \triangleq A_m e^{j\Phi} \quad \text{و} \quad X \triangleq X_m e^{j\psi}$$

با جایگزین نمودن $\text{Re}(X e^{j\omega t})$ بجای $x(t)$ در معادله دیفرانسیل بدست می‌آوریم:

$$a_0 \frac{d^n}{dt^n} \text{Re}(X e^{j\omega t}) + \dots + a_n \text{Re}(X e^{j\omega t}) = \text{Re}(A e^{j\omega t})$$

از لم ۱، میتوان نوشت:

$$\frac{d^n}{dt^n} \text{Re}(a_0 X e^{j\omega t}) + \dots + \text{Re}(a_n X e^{j\omega t}) = \text{Re}(A e^{j\omega t})$$

با کاربرد مکرر لم ۲، بدست می‌آوریم:

$$\text{Re}[a_0 (j\omega)^n X e^{j\omega t}] + \dots + \text{Re}(a_n X e^{j\omega t}) = \text{Re}(A e^{j\omega t})$$

مجدداً با استفاده از لم ۱، داریم: 385

$$\operatorname{Re}\{[a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n]X e^{j\omega t}\} \\ = \operatorname{Re}(A e^{j\omega t})$$

لم ۳، معادله جبری برای X را چنین بدست میدهد.

$$(الف \ ۲-۱۲) \quad [a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n]X = A$$

یا :

$$(ب \ ۲-۱۲) \quad X = \frac{A}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n}$$

بنابراین انداز X چنین است :

$$(الف \ ۲-۱۲)$$

$$X_m = \frac{A_m}{\left[\underbrace{(a_n - a_{n-2}\omega^2 + \dots)^2}_{\text{توانهای زوج } \omega} + \underbrace{(a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots)^2}_{\text{توانهای فرد } \omega} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

و فاز نیز چنین خواهد بود :

$$(ب \ ۲-۱۲) \quad \psi = \Phi - \tan^{-1} \frac{a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots}{a_n - a_{n-2}\omega^2 + \dots}$$

که در آن زاویه نشان داده شده با $\tan^{-1}(\cdot)$ مطابق قاعده‌ای که قبلاً بیان شد در ربع انتخاب شده قرار دارد.

تبصره ۵ = معادله (۲-۱۲ الف) را میتوان برای X حل نمود و جوابی را که در معادله (۲-۱۲ ب) داده شده بدست آورد. با شرط اینکه ω چنان باشد که :

$$a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}j\omega + a_n \neq 0$$

اگر برای ω موردنظر این چند جمله‌ای صفر باشد، $j\omega$ یک فرکانس طبیعی بوده و در نتیجه یک جواب خاص بصورت $tA \cos(\omega t + \Phi)$ بایستی درنظر گرفت (بخش ۲-۳ ضمیمه پ را ببینید).

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

میتوان باسانی مطالب قبل را در مورد یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان با یک ورودی w و یک خروجی y چنانکه توسط معادله دیفرانسیل زیر توصیف میشود تعمیم داد.

$$(۲-۱۴) \quad \frac{d^n y}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_n y = b_0 \frac{d^m w}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} w}{dt^{m-1}} + \dots + b_m w$$

که در آن $a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ اعداد حقیقی هستند. اگر ورودی یک سینوسی بصورت داده شده زیر باشد:

$$(۲-۱۵) \quad w(t) = \operatorname{Re}(A e^{j\omega t}) = |A| \cos(\omega t + \Phi)$$

که در آن:

$$(۲-۱۵) \quad A \triangleq |A| e^{j\Phi}$$

آنگاه یک جواب خاص معادله (۲-۱۴) باینصورت است:

$$(۲-۱۶) \quad y(t) = \operatorname{Re}(B e^{j\omega t}) = |B| \cos(\omega t + \psi)$$

که در آن:

$$(۲-۱۶) \quad B \triangleq |B| e^{j\psi}$$

ارتباط میان ورودی که بر حسب فازور A بیان شده و قسمتی از خروجی (فقط جواب خاص) که با فازور B نشان داده شده را میتوان از معادله زیر بدست آورد.

$$(۲-۱۷) \quad [(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n]B = [b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m]A$$

معادله (۲-۱۷) با «تعویض مشتق k ام $w(t)$ توسط $(j\omega)^k A$ برای $k=0$ تا m ، و تعویض مشتق k ام $y(t)$ توسط $(j\omega)^k B$ برای $k=0$ تا n » از معادله (۲-۱۴) مستقیماً بدست آمده است. بنابراین دراصل، تعیین یک جواب خاص که بصورت معادله (۲-۱۶) بیان میشود بهسولت از معادله (۲-۱۷) انجام پذیر است. تنها کار لازم،

عملیاتی با اعداد مختلط است تا بتوان جواب را به شکل معادله (۱۶ - ۲ الف) درآورد.

مثال ۳ - مدار RLC سری خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل

(۲-۲) را در نظر بگیرید. گیریم ورودی، منبع ولتاژ سینوسی زیر باشد:

$$e_s(t) = \text{Re}(E e^{j\omega t}) = |E| \cos(\omega t + \Phi)$$

فرض کنید ولتاژ خروجی را ولتاژ دوسرخازن در نظر بگیریم. در این صورت معادله دیفرانسیل برای تمام مقادیر t چنین است:

$$(۲-۱۸) \quad LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = e_s(t)$$

ویک جواب خاص به شکل زیر است:

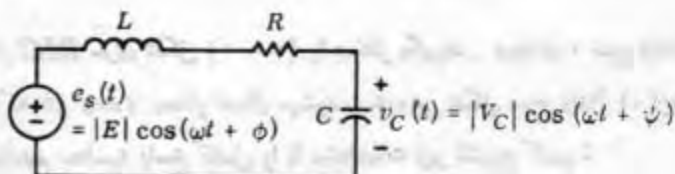
$$(۲-۱۹) \quad v_C(t) = \text{Re}(V_C e^{j\omega t}) = |V_C| \cos(\omega t + \psi)$$

رابطه میان فازور خروجی V_C که بایستی تعیین گردد و فازور ورودی E که معلوم است به شکل زیر می باشد:

$$(۲-۲۰) \quad [LC(j\omega)^2 + RC(j\omega) + 1] V_C = E$$

توجه کنید که معادله (۲-۲۰) با جایگذاری $e_s(t)$ با E و مشتق k ام $v_C(t)$ با $(j\omega)^k V_C$ در معادله (۲-۱۸) بدست می آید. بنابراین:

$$(۲-۲۱) \quad V_C = \frac{E}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$



شکل ۲-۲ مدار RLC سری در حالت دائمی سینوسی

و بنابراین اندازه و فاز V_C چنین است :

$$|V_C| = \frac{|E|}{[(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\psi = \Phi - \tan^{-1} \frac{\omega RC}{1 - \omega^2 LC}$$

جواب $v_C(t)$ که بصورت یک تابع حقیقی از زمان بیان میشود بهسولت از معادله (۱۹-۲) بدست میآید .

۳ پاسخ کامل و پاسخ حالت دائمی سینوسی

۳-۱ پاسخ کامل

یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، با ورودی سینوسی، پاسخ کاملی بشکل زیر دارد:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \quad \text{برای تمام مقادیر } t \quad (3-1)$$

که در آن جواب خاص انتخاب شده $y_p(t)$ یک سینوسی است که دارای همان فرکانس ورودی میباشد و $y_h(t)$ جواب معادله دیفرانسیل همگن میباشد. با فرض اینکه تمام فرکانس‌های طبیعی مدار متمایز باشند (یعنی معادله مشخصه ریشه‌های مکرر نداشته باشد) داریم:

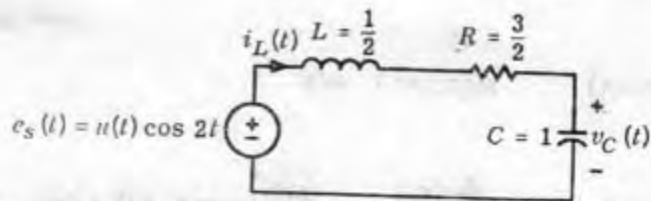
$$y_h(t) = \sum_{i=1}^n k_i e^{s_i t} \quad (3-2)$$

که در آن s_i ها فرکانس‌های طبیعی و k_i ها ثابت‌های دلخواه میباشند که بایستی از شرایط اولیه تعیین شوند. جواب خاص $y_p(t)$ از بکاربردن نمایش فازوری یک سینوسی مطابق روشی که در بخش قبل نشان داده شد بهسولت بدست میآید. این گونه تجزیه پاسخ کامل توسط مثال زیر تشریح میگردد.

مثال ۱- مدار RLC سری شکل (۱-۳) را در نظر بگیرید. ورودی، منبع ولتاژ

سینوسی $e_s(t)$ است که در $t=0$ بهمدار اعمال میشود. خروجی شکل موج ولتاژ $v_C(t)$ خازن میباشد. میخواهیم محاسبه پاسخ کامل را با مشخصات زیر تشریح کنیم:

$$e_s(t) = u(t) \cos \omega t$$



شکل ۳-۱ مدار RLC سری که محاسبه پاسخ کامل را تشریح میکند. حالت اولیه با $i_L(0_-) = 2$ و $v_C(0_-) = 1$ مشخص میشود

$$C = 1 \text{ فاراد} \quad R = \frac{3}{2} \text{ اهم} \quad L = \frac{1}{2} \text{ هانری}$$

$$i_L(0_-) = I_0 = 2 \text{ آمپر} \quad v_C(0_-) = V_0 = 1 \text{ ولت}$$

به تابع پله واحد $u(\cdot)$ که بصورت فاکتوری در رابطه e_s وجود دارد توجه کنید. این فاکتور برای توصیف اینکه ورودی e_s در لحظه $t=0$ به مدار اعمال میشود ضروری است، یعنی، برای $t < 0$ ، $e_s(t) = 0$ میباشد.

ابتدا طرز نوشتن معادله دیفرانسیل و تعیین شرایط اولیه لازم را مرور میکنیم.

KVL داریم:

$$(۳-۲) \quad L \frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) + v_C(t) = e_s(t)$$

چون جریان i_L ، همان جریان درون خازن نیز میباشد داریم:

$$(۳-۳) \quad i_L(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

بنابراین، معادله (۳-۲) چنین میشود:

$$LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = e_s(t)$$

و یا، با قراردادن مقادیر عددی،

$$(۳-۴) \quad \frac{1}{2} \frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{3}{2} \frac{dv_C}{dt} + v_C = u(t) \cos 2t$$

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

شرایط اولیه چنین است:

$$\text{وات (۶-۳ الف)} \quad v_C(0_-) = 1$$

و:

$$\text{ولت بر ثانیه (۶-۳ ب)} \quad \frac{dv_C(0_-)}{dt} = \frac{i_L(0_-)}{C} = 2$$

معادلات (۵-۳) و (۶-۳) خروجی v_C را کاملاً توصیف میکنند. پاسخ کامل نیز به سهولت بدست می‌آید. معادله مشخصه بصورت $s^2 + \frac{3}{2}s + 1$ می‌باشد و ریشه‌های طبیعی $s_1 = -1$ و $s_2 = -2$ خواهند بود. بنابراین جواب معادله همگن بشکل زیر است:

$$\text{(۷-۳)} \quad v_h(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t}$$

واحدترین جواب خاص چنین است:

$$\text{(۸-۳)} \quad v_p(t) = \text{Re}(V e^{j2t}) = |V| \cos(2t + \psi)$$

که در آن V نمایشگر فازور متغیر خروجی بوده و فازور ولتاژ خروجی ناسیده میشود. ورودی را نیز برحسب فازور ولتاژ E چنین نشان میدهم:

$$e_s(t) = \text{Re}(E e^{j2t}) = \cos 2t$$

که $E = 1 e^{j0}$ میباشد. فازور ولتاژ V ، مطابق قاعده‌ای که در بخش قبل بیان شد، به سهولت از معادله (۵-۳) بدست می‌آید [جایگزین کردن مشتق k ام v_C با $(j\omega)^k V$] بنابراین:

$$\left[\frac{1}{2} (j\omega)^2 + \frac{3}{2} (j\omega) + 1 \right] V = E$$

یا

$$\text{(۹-۳)} \quad V = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\omega^2 + j\frac{3}{2}\omega}$$

با $\omega = 2$ ،

$$V = \frac{1}{-1 + j3} = 0.316 e^{-j1.107} = 0.316 \angle -1.107$$

از معادله (۸-۳) جواب خاص بدست می‌آید

$$v_p(t) = 0.316 \cos(2t - 1.107) \quad (10-3)$$

جواب کامل چنین است:

$$v_C(t) = v_h(t) + v_p(t)$$

$$= k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} + 0.316 \cos(2t - 1.107) \quad (11-3)$$

ثابت‌های k_1 و k_2 از معادلات (۶-۲ الف) و (۶-۲ ب) بدست می‌آیند. از (۶-۲ الف) و (۱۱-۳) داریم:

$$v_C(0) = 1 = k_1 + k_2 + 0.316 \cos(-1.107)$$

یا

$$k_1 + k_2 = 0.684$$

از معادلات (۶-۲ ب) و (۱۱-۳) داریم

$$\frac{dv_C}{dt}(0) = 2 = -k_1 - 2k_2 - 0.316 \times 2 \sin(-1.107)$$

یا

$$k_1 + 2k_2 = -1.94$$

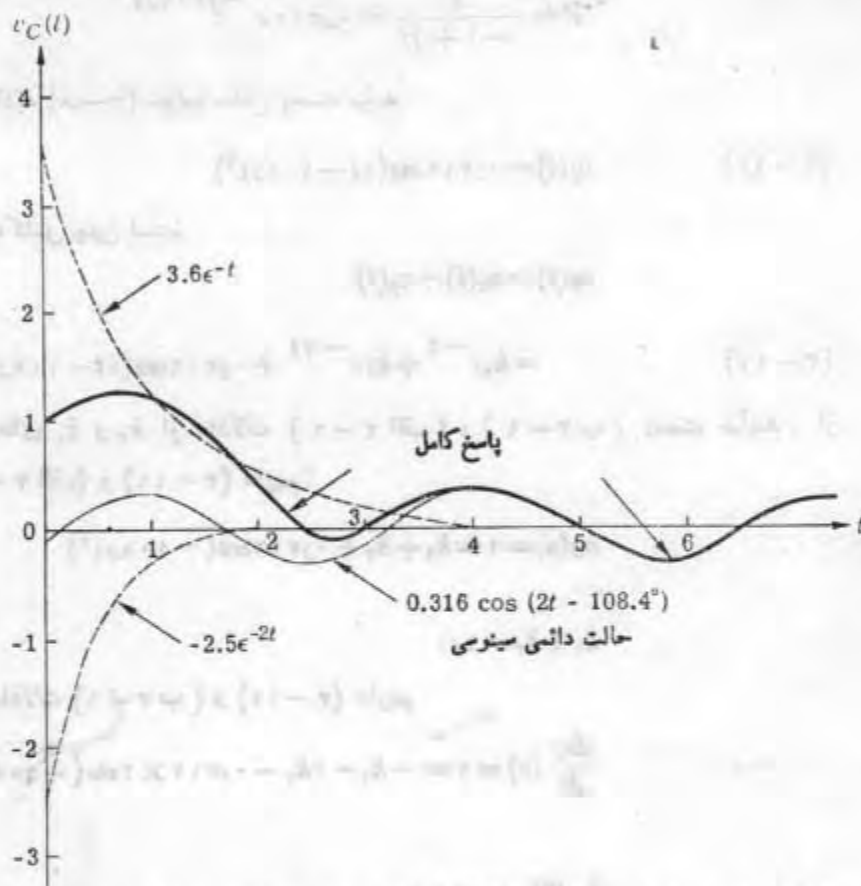
بنابراین:

$$k_1 = 2.96 \quad \text{و} \quad k_2 = -2.05$$

جواب کامل چنین است:

$$v_C(t) = 2.96 e^{-t} - 2.05 e^{-2t} + 0.316 \cos(2t - 1.107) \quad (12-3)$$

نمایش $v_C(t)$ در شکل (۲-۳) داده شده است. توجه کنید که پاسخ کامل را می‌توان بدو مولفه مجزای حالت گذرا و حالت دائمی تقسیم نمود. حالت گذرا همانند v_h از معادله (۷-۳) است و حالت دائمی همانند v_p از معادله (۱۰-۳) می‌باشد. همچنین توجه شود که برای $t > 0$ ، پاسخ کامل اساساً ۳۹۲ حالت دائمی سینوسی می‌باشد.



شکل ۳-۲- پاسخ کامل $v_C(0)$ (نشان داده شده توسط خط کلفت) برابر مجموع حالت دائمی سینوسی (خط نازک) و جملات حالت گذرا (خطوط نقطه چین) میباشد

تبصره ۵- در بعضی مدارهای ساده میتوان حالت اولیه را چنان انتخاب نمود که پاسخ حالت دائمی سینوسی بلافاصله پس از اعمال ورودی حاصل شود. بعبارت دیگر، جمله حالت گذرا متحد با صفر باشد. روش انتخاب حالت اولیه برای این مقصود برپایه دو واقعیت قرارداد (بخش‌های ۳ و ۴ فصل دوم را ببینید) : (۱) برای جریان کراندار، ولتاژ دو سر یک خازن نمیتواند بطور لحظه‌ای تغییر کند و (۲) برای ولتاژ کراندار جریان داخل یک سلف نمیتواند بطور لحظه‌ای تغییر کند.

تمرین ۱- گیریم در شکل (۱-۳) اندوکتانس L برابر صفر باشد و بنابراین یک مدار RC سری بدست می‌آید. ولتاژ اولیه $v_C(0_-)$ دوسرخازن را چنان انتخاب کنید که پس از اعمال ورودی e هیچ حالت گذرانی موجود نباشد.

تمرین ۲- مدار شکل (۱-۳) را با $L = \frac{1}{\gamma}$ هانری، مانند مثال ۱ در نظر بگیرید. آیا ممکن است حالت اولیه $i_L(0_-)$ و $v_C(0_-)$ را چنان انتخاب نمود که پس از اعمال ورودی e هیچ حالت گذرانی موجود نباشد؟ اگر چنین است، حالت اولیه را تعیین کنید.

۳-۲ پاسخ حالت دائمی سینوسی

مدار خطی تغییرناپذیر با زمان دلخواه را که با یک منبع سینوسی تنها تحریک میشود در نظر میگیریم. فرض کنید یکی از متغیرهای خاص شبکه مثلاً y مورد توجه ما میباشد. پاسخ y به ورودی سینوسی و حالت اولیه مشخص شده بشکل زیر است:

$$(۱۳-۳) \quad y(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} + \dots + k_n e^{s_n t} + A_m \cos(\omega t + \psi)$$

که در آن، بمنظور سهولت فرض کرده‌ایم که فرکانس‌های طبیعی ساده میباشند، و $k_1, k_2, \dots, k_n$ ثابت‌هایی هستند که به‌حالت اولیه بستگی دارند و دامنه A_m و زاویه ψ جواب خاص، بسادگی از روش فازوری بدست می‌آیند.

مشاهده نکته زیر بسیار حایز اهمیت است. فرض کنید که تمام فرکانس‌های طبیعی در نیم صفحه باز چپ + فرکانس‌های مختلط قرار دارند در این صورت وقتی $t \rightarrow \infty$ ، در معادله (۱۳-۳) جملات $k_1 e^{s_1 t}, k_2 e^{s_2 t}, \dots, k_n e^{s_n t}$ بسمت صفر میل میکنند. عبارت دیگر، وقتی $t \rightarrow \infty$ ، $y(t)$ بطور دلخواه به سینوسی $A_m \cos(\omega t + \psi)$ نزدیک میشود. این امر ما را مجاز میدارد که حقیقت بسیار مهم زیر را بیان کنیم:

+ نیم صفحه «باز» چپ، شامل نیم صفحه چپ مختصات مختلط میباشد که محور انگاری از آن «حذف شده» است. عبارت دیگر، نیم صفحه باز چپ، شامل تمام نقاطی است که جزء حقیقی آنها منفی میباشد.

«صرفنظر از حالت اولیه و مشروط بر اینکه تمام فرکانس‌های طبیعی در نیم صفحه بازچپ واقع باشند، وقتی $t \rightarrow \infty$ ، پاسخ سینوسی خواهد شد. این پاسخ سینوسی را پاسخ حالت دائمی سینوسی می‌نامند. پاسخ حالت دائمی سینوسی را میتوان به‌سبب از روش فازوری محاسبه نمود».

چنانکه در مثال ۱ دیده‌ایم، حالت دائمی سینوسی با فازور V در معادله $(9-3)$ توصیف میگردد و پاسخ حالت دائمی سینوسی توسط جواب خاص بدست آمده از روش فازوری، یعنی، $v_p(t) = \text{Re}(V e^{j\omega t})$ داده میشود.

بر مبنای ملاحظات فوق، میتوان مانند فصل پنجم، بیان زیر را پذیرفت. وقتی تمام فرکانس‌های طبیعی یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان در «نیم صفحه بازچپ» باشند، گوئیم مدار پایدار مجانبی^(۱) است. اگر یک یا چند فرکانس طبیعی آن در «نیم صفحه باز راست» واقع باشند گوئیم که مدار ناپایدار^(۲) است. بنابراین وقتی $t \rightarrow \infty$ ، هر پاسخ ورودی صفریک مدار پایدار مجانبی به سمت صفر میل میکند. برای مدارهای ناپایدار فقط میتوان بیان نمود که وقتی $t \rightarrow \infty$ ، برای بسیاری از حالت‌های اولیه، پاسخ ورودی صفر به سمت بینهایت میل میکند.

بنابراین، نتیجه مهم اینست که برای مدارهای «پایدار مجانبی» که توسط یک ورودی سینوسی تنها تحریک میشوند، حالت اولیه هرچه باشد وقتی $t \rightarrow \infty$ ، هر متغیر مدار به سمت حالت دائمی سینوسی متناظر میل میکند. این حقیقت را با این جمله بیان میکنیم «مدارهای پایدار مجانبی دارای پاسخ حالت دائمی سینوسی می‌باشند».

تبصره ۵- هرگاه مدار علاوه بر فرکانس‌های طبیعی واقع در نیم صفحه بازچپ، دارای فرکانس‌هایی از نوع انگاری خالص هم باشد، بازگاهی اوقات میتوان پاسخ حالت دائمی را تعریف نمود. برای درک این تبصره لازم است حل معادلات دیفرانسیلی را که ریشه‌های مشخصه انگاری خالص و یا ریشه‌های مکرر دارند مرور نمود. برای تشریح این دو حالت متفاوت دو مثال زیر را بررسی میکنیم:

مثال ۲- گیریم چند جمله‌ای مشخصه یک معادله دیفرانسیل بصورت زیر باشد.

۳۸۳

تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

$$(s^2 + \omega_0^2)^2 = s^4 + 2\omega_0^2 s^2 + \omega_0^4$$

ریشه های مشخصه $s_1 = s_2 = j\omega_0$ و $s_3 = s_4 = -j\omega_0$ میباشند. جواب معادله دیفرانسیل ممکن چنین است :

$$y_h(t) = (k_1 + k_2 t)e^{j\omega_0 t} + (k_3 + k_4 t)e^{-j\omega_0 t}$$

که میتوان برحسب کسینوس بصورت زیر نیز نوشت :

$$y_h(t) = K_1 \cos(\omega_0 t + \Phi_1) + K_2 t \cos(\omega_0 t + \Phi_2)$$

که در آن، K_1 ، K_2 ، Φ_1 و Φ_2 ثابت های حقیقی میباشند. واضح است که وقتی t زیاد میشود، $y_h(t)$ مقادیر دلخواه بزرگی بخود میگیرد که نشان میدهد مدار ناپایدار است. برای مقادیر بزرگ t ، در جواب کامل $y = y_h + y_p$ ، y_p در مقابل y_h قابل صرفنظر میباشد. از این مثال نتیجه میگیریم که هرگاه مداری دارای فرکانسهای طبیعی مکرر باشد که روی محور انگاری قرار گیرند، این مدار ناپایدار بوده و دارای پاسخ حالت دائمی سینوسی نیست.

مثال ۳- گیریم چند جمله ای مشخصه یک معادله دیفرانسیل بصورت $s^2 + \omega_0^2$

باشد. ریشه های مشخصه $s_1 = j\omega_0$ و $s_2 = -j\omega_0$ میباشند. فرض کنید تابع تحریک یک سینوسی با فرکانس زاویه ای ω باشد که $\omega \neq \omega_0$ است. آنگاه جواب کامل بصورت زیر است :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

که در آن :

$$y_h(t) = k_1 e^{j\omega_0 t} + k_2 e^{-j\omega_0 t} = K \cos(\omega_0 t + \Phi)$$

که K و Φ ثابت های حقیقی میباشند و جواب خاص که از روش فازوری بدست میآید بصورت زیر است :

$$y_p(t) = B \cos(\omega t + \psi)$$

B و ψ ثابت های حقیقی میباشند. توجه کنید که y_h نوسانی بوده و بنابراین نمیتواند

نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

به‌عنوان قسمت گذرای پاسخ کامل در نظر گرفته شود. اما با این حال، « γ یک سینوسی با همان فرکانس ورودی بوده و بنابراین می‌تواند بعنوان پاسخ حالت دائمی سینوسی تعریف شود، اگرچه پاسخ کامل شامل سینوسی دیگری با فرکانس متفاوت می‌باشد. این نوع پاسخ حالت دائمی سینوسی را می‌توان با یک گیرنده تطبیق شده^(۱) مناسب آشکار نمود.

از طرف دیگر، هرگاه فرکانس زاویه‌ای ω ورودی بر ω_0 منطبق گردد، پاسخ کامل دارای جمله $A \cos(\omega t + \theta)$ خواهد بود که با زیاد شدن t بطور دلخواه زیاد می‌شود، و بنابراین پاسخ حالت دائمی وجود نخواهد داشت. از این مثال نتیجه می‌گیریم که اگر مدار دارای یک فرکانس طبیعی انگاری مثلاً در ω_0 باشد که ریشه ساده معادله مشخصه است و اگر فرکانس زاویه‌ای ω ورودی سینوسی، مساوی ω_0 نباشد، آنگاه پاسخ حالت دائمی سینوسی بخوبی معین است.

بطور خلاصه، «یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان که تمام فرکانس‌های طبیعی آن در داخل نیم صفحه باز چپ صفحه فرکانس مختلط واقع باشند، وقتی که توسط یک ورودی سینوسی تحریک شود، دارای پاسخ حالت دائمی سینوسی خواهد بود. بعلاوه اگر مدار دارای فرکانس‌های طبیعی انگاری ساده‌ای باشد که با فرکانس زاویه‌ای سینوسی ورودی متفاوت باشند، پاسخ حالت دائمی با زهم وجود خواهد داشت».

«پاسخ حالت دائمی سینوسی همیشه همان فرکانس ورودی را داشته و می‌تواند به‌مناسبت‌ترین وجهی از روش فازوری بدست آید».

تبصره ۵- برای مدارهای خطی «تغییرپذیر با زمان» ویا مدارهای «غیرخطی» پاسخ حالت دائمی یک ورودی سینوسی (اگر وجود داشته باشد) معمولاً سینوسی نخواهد بود. این پاسخ ممکن است شامل چندین سینوسی باشد، حتی سینوسی‌هایی که فرکانس‌های آنها جزیی از فرکانس ورودی باشند (برای مثال، مسائل ۳، ۴ و ۵ این فصل را ببینید).

۳-۳ جمع آثار در حالت دائمی

حالتی را در نظر بگیرید که در آن یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان که تمام فرکانس‌های طبیعی آن در نیم صفحه باز چپ قرار دارند توسط دو منبع با فرکانس‌های «مختلف» تحریک

شود. بعنوان مثال، میتوان سوردی را در نظر گرفت که یک تقویت کننده صوتی^(۱) تک‌نقطه حاصل از یک فلوت را تقویت میکند. سینوسی‌ها، نت اصلی و هارمونیکهای فلوت میباشند.

برای سهولت در انجام تجزیه و تحلیل، مدار RLC سری شکل (۳-۲) را در نظر میگیریم. معادله دیفرانسیل این مدار چنین است:

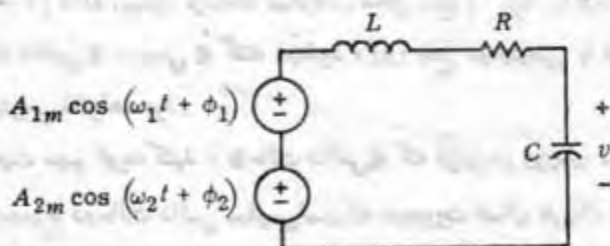
(۳-۱۴)

$$LC \frac{d^2 v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v = A_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + A_{2m} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

که ولتاژهای ورودی به ترتیب دارای دامنه‌های A_{1m} و A_{2m} ، فرکانس‌های ω_1 و ω_2 و فازهای Φ_1 و Φ_2 میباشند. جواب این معادله بصورت $v_p + v_h$ میباشد که v_h جواب معادله همگن است. برای بدست آوردن یک جواب خاص راحت v_p ، مشاهده میشود که اگر $v_{p1} = A_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1)$ وقتی که سینوسی $v_{p2} = A_{2m} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$ و اگر v_{p2} جواب متناظر برای وقتی که سینوسی $v_p = v_{p1} + v_{p2}$ باشد، آنگاه $v_p = v_{p1} + v_{p2}$ است. درحقیقت طبق تعریف v_{p1} داریم:

$$LC \frac{d^2 v_{p1}}{dt^2} + RC \frac{dv_{p1}}{dt} + v_{p1} = A_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1)$$

و برطبق تعریف v_{p2} داریم:



شکل ۳-۳- مدار RLC سری که با دو منبع ولتاژ سینوسی تحریک میشود

$$LC \frac{d^2 v_{p2}}{dt^2} + RC \frac{dv_{p2}}{dt} + v_{p2} = A_{2m} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

و با جمع کردن این دو معادله خواهیم داشت :

$$LC \frac{d^2}{dt^2} (v_{p1} + v_{p2}) + RC \frac{d}{dt} (v_{p1} + v_{p2}) + (v_{p1} + v_{p2}) = A_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + A_{2m} \cos(\omega_2 t + \Phi_2)$$

که از آن نتیجه میگیریم $v_{p1} + v_{p2}$ جواب خاص معادله (۱۴-۳) میباشد. با بکار بردن نتایج تجزیه و تحلیل فازوری می‌بینیم که :

$$(۱۵-۳) \quad v_p(t) = V_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1 + \theta_1) + V_{2m} \cos(\omega_2 t + \Phi_2 + \theta_2)$$

که در آن :

$$V_{1m} e^{j(\theta_1 + \Phi_1)} \triangleq \frac{A_{1m} e^{j\Phi_1}}{1 - \omega_1^2 LC + j\omega_1 RC}$$

$$V_{2m} e^{j(\theta_2 + \Phi_2)} \triangleq \frac{A_{2m} e^{j\Phi_2}}{1 - \omega_2^2 LC + j\omega_2 RC}$$

توجه کنید که در مخرج‌های این دو عبارت بترتیب فرکانس‌های ω_1 و ω_2 را بکار بردیم. ما بایستی فرکانس ورودی، سینوسی مناسب را بکاربریم. مشاهده این نکته بسیار مهم است که شرایط اولیه هرچه باشند وقتی $t \rightarrow \infty$ ، ولتاژ v بطور دلخواه به مقدار v_p که با معادله (۱۵-۳) داده میشود نزدیک میگردد. شکل موج $v_p(\cdot)$ را «حالت دائمی» می‌نامند و حالت دائمی «سینوسی» گفته نمیشود، زیرا جمع دو سینوسی با فرکانس‌های مختلف دیگر سینوسی نخواهد بود.

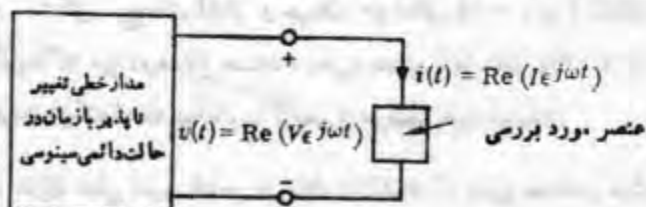
باین واقعیت مهم توجه کنید، «حالت دائمی» که از این دو ورودی سینوسی نتیجه میشود مساوی مجموع دو حالت دائمی سینوسی است که در صورت اعمال هریک از دو سینوسی ورودی بطور جداگانه روی مدار بدست می‌آید. اگرچه این نتیجه فقط برای مدار RLC شکلی (۳-۳) اثبات گردید، ولی مشاهده اینکه این روش استدلال میتواند بهر مدار خطی تغییرناپذیر با زمان اعمال شود کار مشکلی نیست.

۴ مفهومی‌های امپدانس و ادمیتانس

در دو بخش گذشته نشان دادیم که پاسخ حالت دائمی سینوسی را میتوان به‌سبب استفاده از نمایش فازوری یک سینوسی بدست آورد. همچنین آموختیم که در تعیین پاسخ حالت دائمی سینوسی، بجای حل یک معادله دیفرانسیل، تنها لازم است که یک معادله جبری را حل کنیم. بجای جمع، تفریق یا مشتق‌گیری سینوسی‌ها، میتوان اعداد مختلط نمایش‌دهنده آنها را جمع و یا تفریق نمود. در این بخش خواص دیگری از نمایش فازوری سینوسی‌ها را بررسی کرده و مفهومی‌های مهم «امپدانس»^(۱) و «ادمیتانس»^(۲) را بنیان‌گذاری خواهیم کرد. همچنین خواهیم دید که وقتی تنها پاسخ حالت دائمی سینوسی یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان را میخواهیم بدانیم، میتوان از نوشتن معادلات دیفرانسیل صرف‌نظر نمود و بجای آن معادلات جبری خطی لازم را مستقیماً از یک شبکه برحسب فازورهای که نمایشگر ورودی، خروجی و سایر متغیرهای شبکه میباشند بدست آورد.

۱-۴ روابط فازوری برای اجزاء مدار

توصیف ولتاژ- جریان اجزاء مدارهای ساده در فصل دوم به تفصیل مطالعه شد. برای اجزاء خطی «تغییرناپذیر با زمان» مدار، اگر تنها توجه ما روی پاسخ حالت دائمی سینوسی باشد، میتوان با استفاده از نمایش فازوری ولتاژ و جریان، آنرا توصیف نمود. در این زیربخش توصیف سه جزء اصلی مدار یعنی مقاومت‌ها، خازن‌ها و سلف‌ها را بدست خواهیم آورد. در هر حالت فرض میکنیم که جزء مورد بررسی به یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان، چنانکه در شکل (۱-۴) نشان داده شده است متصل باشد و مدار در حالت دائمی سینوسی



شکل ۱-۴ - یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان در حالت دائمی سینوسی

جزء مورد بررسی را تحریک میکند

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

با فرکانس زاویه‌ای ω قرار گرفته باشد. گیریم ولتاژ شاخه و جریان شاخه جزء موردنظر در حالت دائمی سینوسی چنین باشند:

$$(۱-۱) \quad v(t) = \operatorname{Re}(V e^{j\omega t}) = |V| \cos(\omega t + \angle V)$$

و:

$$(۱-۲) \quad i(t) = \operatorname{Re}(I e^{j\omega t}) = |I| \cos(\omega t + \angle I)$$

میخواهیم رابطه میان فازور ولتاژ V و فازور جریان I را برای هریک از سه جزء بدست آوریم:

«مقاومت» یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان، با مقاومت R و بارسانایی $G = \frac{1}{R}$

چنین مشخص میشود:

$$(۱-۳) \quad v(t) = Ri(t) \quad i(t) = Gv(t)$$

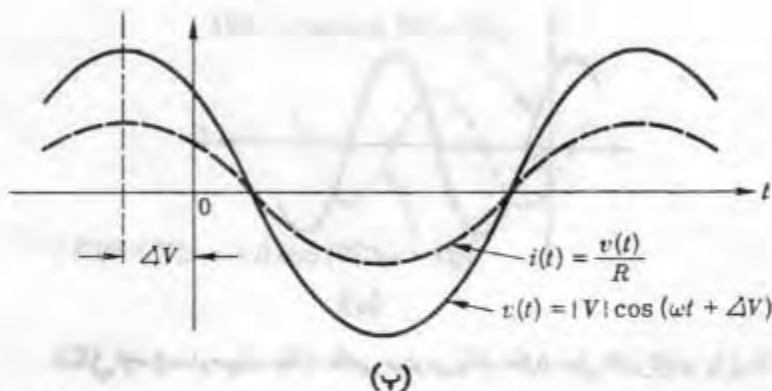
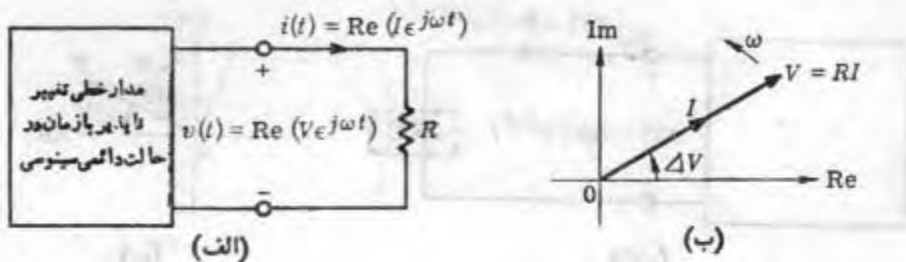
برای بدست آوردن رابطه میان فازور ولتاژ و فازور جریان، معادلات (۱-۱) و (۱-۲) را در معادله (۱-۳) جایگزین میکنیم و با استفاده از لم ۳ بخش ۲ بدست میآوریم:

$$(۱-۴) \quad V = RI \quad I = GV$$

اگر چه مقاومت و رسانایی یک مقاومت همیشه اعداد حقیقی هستند، ولی فازور ولتاژ V و فازور جریان I معمولاً اعداد مختلط میباشند. رسم فازور ولتاژ و فازور جریان در صفحه مختلط مطابق شکل نشان داده شده در (۲-۱) آموخته است. چون R یک عدد حقیقی است اعداد مختلط I و V هم امتداد^(۱) بوده و بایستی دارای یک زاویه باشند، یعنی $\angle I = \angle V$. شکل موج‌های ولتاژ و جریان در شکل (۲-۱) نشان داده شده‌اند. اصطلاحاً گویند که این دو هم‌فاز هستند، یعنی، منحنی آنها محور زمان را در یک لحظه قطع کرده و هر دو در یک لحظه به مقدار ماکزیمم و منی‌نیم خود میرسند.

«خازن» یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ظرفیت C چنین مشخص میشود:

$$(۱-۵) \quad i = C \frac{dv}{dt}$$

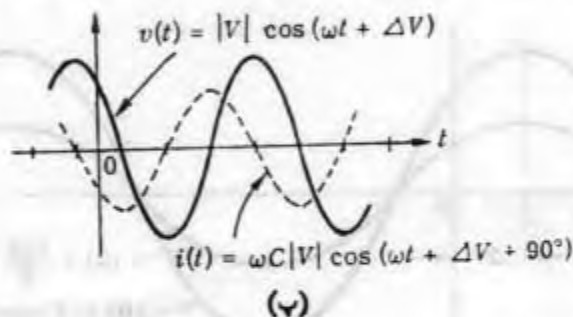
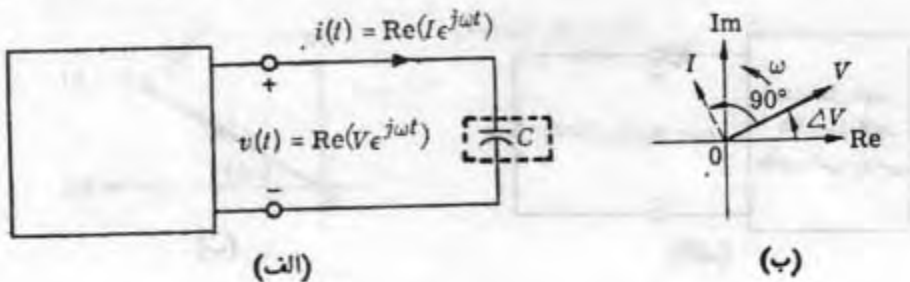


شکل ۲-۴- توصیف حالت دائمی سینوسی یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان

با استفاده از نمایش فازوری i و v در معادلات (۱-۴) و (۲-۴) و جایگزین کردن آنها در (۵-۴)، بدست میآوریم:

$$(۶-۴) \quad I = j\omega CV \quad \text{یا} \quad V = \frac{1}{j\omega C} I$$

در بدست آوردن (۶-۴)، از لم ۲ بخش ۲ (یعنی اعمال $\frac{d}{dt}$ به $Ve^{j\omega t}$ ، معادل ضرب $Ve^{j\omega t}$ در $j\omega$ میباشد) استفاده شده است. بعلا وجود ضریب $j\omega$ در معادله (۶-۴)، فازور جریان I و فازور ولتاژ V وقتی در صفحه مختلط رسم شوند مطابق شکل (۳-۴ب) دارای ۹۰° اختلاف فاز خواهند بود. فازور جریان از فازور ولتاژ «جلو»^(۱) می افتد زیرا $I = j\omega CV$ و $I = \angle V + ۹۰^\circ$ است. در شکل (۳-۴ب)، شکل موج های ولتاژ و جریان رسم شده اند و شکل موج جریان به میزان یک چهارم سیکل بر فازور ولتاژ پیشی دارد.



شکل ۳-۴ - توصیف حالت دائمی سینوسی یکک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان

بایستی خاطرنشان کرد که برخلاف مورد مقاومت، رابطه میان فازور جریان و فازور ولتاژ و لتاژ در اینجا به فرکانس زاویه‌ای ω بستگی دارد.

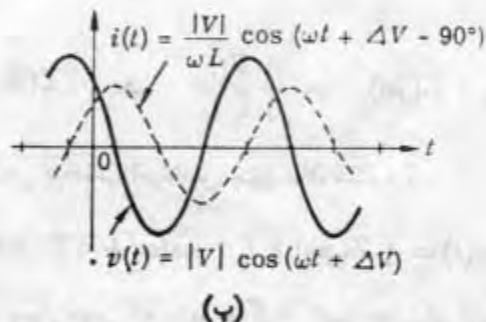
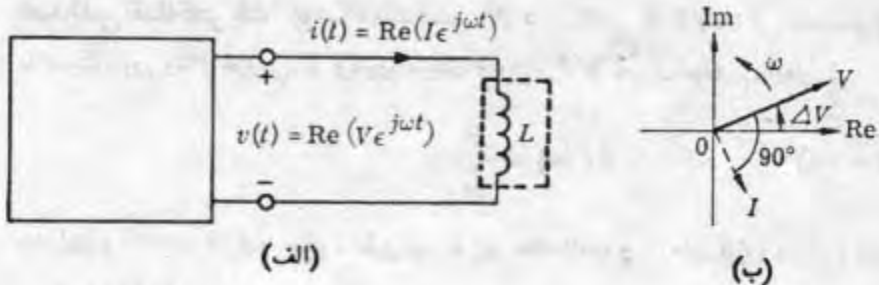
«سلف» یکسلف خطی تغییرناپذیر با زمان با اندوکتانس L چنین مشخص میشود:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (۷-۴)$$

مثل مورد خازن، روابط زیر را میان فازور ولتاژ و فازور جریان بدست میآوریم (برای یکسلف).

$$V = j\omega LI \quad I = \frac{1}{j\omega L} V \quad (۸-۴)$$

دراین مورد، فازور جریان از فازور ولتاژ بمقدار ۹۰° «عقب»^(۱) میافتد، که معنی آن اینست که شکل موج جریان بمیزان یک چهارم سیکل از شکل موج ولتاژ عقب‌تر است. این فازورها



شکل ۴-۴- توصیف حالت دائمی سینوسی برای یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان

در شکل (۴-۴ ب و پ) تشریح شده‌اند. در اینجا نیز مثل مورد خازن، رابطه میان فازورهای جریان و ولتاژ به فرکانس بستگی دارد.

۴-۲- تعریف امپدانس و ادمیتانس

بحث روابط فازوری برای اجزاء مدار را میتوان برای شبکه‌های یک قطبی کلی با اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان، تعمیم داد. مدار شکل (۴-۵ الف) را در نظر بگیرید که در آن شبکه یک قطبی N از به هم پیوستن دلخواه اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان تشکیل شده است. ورودی یک منبع جریان سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω میباشد. بنابراین:

$$(۴-۹) \quad i_s(t) = \text{Re}(I_s e^{j\omega t}) = |I_s| \cos(\omega t + \angle I_s)$$

گیریم پاسخ ولتاژ حالت دائمی سینوسی بصورت زیر باشد.

$$(۴-۱۰) \quad v(t) = \text{Re}(V e^{j\omega t}) = |V| \cos(\omega t + \angle V)$$

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

امپدانس نقطه تحریک^(۱) «شبکه یک قطبی N در فرکانس ω یا بسادگی امپدانس را ، با نسبت فازور ولتاژ خروجی V بر فازور جریان ورودی I_s » تعریف می‌کنیم ، یعنی :

$$(4-11) \quad Z(j\omega) \triangleq \frac{V}{I_s}$$

بنابراین ، اندازه و فاز امپدانس ، طبق روابط زیر به اندازه‌ها و فازهای فازور ولتاژ و فازور جریان ارتباط دارد .

$$(4-12) \quad |Z(j\omega)| = \frac{|V|}{|I_s|} \quad \text{و} \quad \angle Z(j\omega) = \angle V - \angle I_s$$

شکل موج ولتاژ خروجی بر حسب امپدانس چنین بیان میشود :

$$(4-13) \quad v(t) = |Z(j\omega)| |I_s| \cos(\omega t + \angle Z(j\omega) + \angle I_s)$$

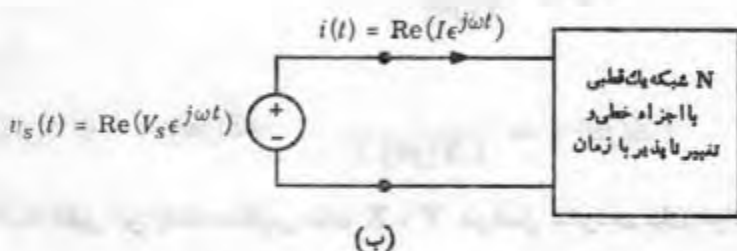
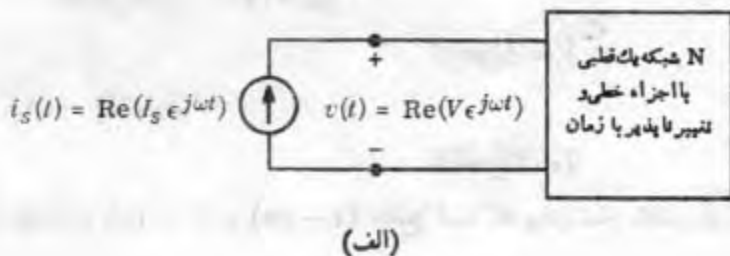
این معادله به نتایج بسیار مهمی که پایه هرگونه تعبیر محاسبات امپدانس میباشد منجر میگردد . بنابراین :

« اگر شبکه یک قطبی N دارای امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ بوده و جریان ورودی آن $I_s \cos(\omega t + \angle I_s)$ باشد . آنگاه در حالت دائمی سینوسی ، ولتاژ قطب آن یک سینوسی با اندازه $|Z(j\omega)| |I_s|$ و فاز $\angle Z(j\omega) + \angle I_s$ خواهد بود . »
 دیگر ، برای بدست آوردن دامنه ولتاژ سینوسی ، دامنه جریان را در اندازه امپدانس (محاسبه شده در فرکانس مناسب) « ضرب » می‌کنیم و برای بدست آوردن فاز ولتاژ سینوسی ، فاز $\angle Z(j\omega)$ امپدانس را به فاز جریان « میافزائیم » (باز هم محاسبه شده در فرکانس مناسب) .
 در شکل (۵ - ۴ ب) ورودی یک منبع ولتاژ سینوسی است :

$$(4-14) \quad v_s(t) = \text{Re}(V_s e^{j\omega t}) = |V_s| \cos(\omega t + \angle V_s)$$

و جریان i پاسخ حالت دائمی سینوسی است که چنین بیان میشود :

$$(4-15) \quad i(t) = \text{Re}(I e^{j\omega t}) = |I| \cos(\omega t + \angle I)$$



شکل ۵-۴ = شبکه یک قطبی N که از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده ،
(الف) به یک منبع جریان سینوسی ، (ب) به یک منبع ولتاژ سینوسی وصل شده است .

ادمیتانس نقطه تحریک شبکه « یک قطبی N دفرکانس ω » (با بسادگی ادمیتانس)
را با نسبت « فازور جریان خروجی I بر فازور ولتاژ ورودی V_s » تعریف میکنیم یعنی :

$$Y(j\omega) \triangleq \frac{I}{V_s} \quad (۴-۱۶)$$

بنابراین ، اندازه و فاز ادمیتانس $Y(j\omega)$ طبق روابط زیر به اندازه ها و فازهای فازور ولتاژ و فازور جریان ارتباط دارد .

$$|Y(j\omega)| = \frac{|I|}{|V_s|} , \quad \angle Y(j\omega) = \angle I - \angle V_s \quad (۴-۱۷)$$

تبصره ۵- اگر منبع ولتاژ شکل (۵-۴ ب) طوری تنظیم شود که فازور V_s آن مساوی فازور ولتاژ خروجی V در شکل (۵-۴ الف) باشد . میتوان انتظار داشت که فازور پاسخ جریان I در شکل (۵-۴ ب) مساوی فازور منبع جریان I_s در شکل (۵-۴ الف) گردد .

بنابراین از (۱۱-۱) داریم :

$$(11-2) \quad V = Z(j\omega)I$$

از (۱۶-۱) داریم :

$$(11-3) \quad I = Y(j\omega)V$$

از معادلات (۱۸-۱) و (۱۹-۱) واضح است که برای تمام مقادیر ω :

$$(11-4) \quad Z(j\omega) = \frac{1}{Y(j\omega)}$$

و :

$$(11-5) \quad |Z(j\omega)| = \frac{1}{|Y(j\omega)|} \quad \angle Z(j\omega) = -\angle Y(j\omega)$$

اثبات دقیق این رابطه معکوس میان Z و Y در فصل شانزدهم بیان خواهد شد.

تمرین - قاعده‌ای را که اندازه و فاز جریان را برحسب اندازه و فاز ولتاژ و $Y(j\omega)$ بدست می‌دهد در یک عبارت جمله‌ای بیان کنید.

از تعاریف گفته شده در مورد ایدانسی و ادیتانسی ، سرعت می‌توان ایدانسی‌ها و ادیتانسی‌های اجزاء R و L و G را بدست آورد :

فرکانس زاویه‌ای ω	Z (ایدانسی)	Y (ادیتانسی)
مقاومت با مقاربت R	R	$G = \frac{1}{R}$
عازن با ظرفیت C	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega C$
سلف با اندوکتانسی L	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L}$

۵- تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی مدارهای ساده

قوانین کیرشف بیان می‌دارند که در هر لحظه از زمان ، جمع جبری ولتاژهای شاخه‌های معینی و یا جمع جبری جریانهای شاخه‌های معینی صفر می‌باشند. اگر تنها حالت دائمی سینوسی مورد توجه بوده و اگر تنها لازم باشد که با شکل موجهای سینوسی با فرکانس یکسان

۳۹۵

تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

مواجه شویم، میتوان بجای اینکه معادلات را برحسب خود سینوسی‌ها بنویسیم، آنها را برحسب فازورها بیان کنیم. بنابراین «در حالت دائمی سینوسی، معادلات کیرشف را میتوان مستقیماً برحسب فازورهای ولتاژ و فازورهای جریان نوشت». بعنوان مثال گیریم معادله یک مش چنین نوشته شود:

$$v_1(t) + v_r(t) + v_p(t) = 0$$

فرض کنید که هر یک از ولتاژها یک سینوسی با فرکانس «یکسان» ω باشد. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} V_{1m} \cos(\omega t + \Phi_1) + V_{rm} \cos(\omega t + \Phi_r) + V_{pm} \cos(\omega t + \Phi_p) \\ = \operatorname{Re}(V_1 e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(V_r e^{j\omega t}) + \operatorname{Re}(V_p e^{j\omega t}) \\ = \operatorname{Re}[(V_1 + V_r + V_p) e^{j\omega t}] = 0 \end{aligned}$$

از لم ۲ بخش ۲ میتوان بلافاصله یک معادله هم ارز برحسب فازورهای ولتاژهای V_1 ، V_r و V_p نوشت. بنابراین:

$$V_1 + V_r + V_p = 0$$

البته، با دانستن فازور و فرکانس ω ، همیشه میتوان توابع سینوسی زمانی را بدست آورد. بعنوان مثال، اگر فازور ولتاژ در فرکانس زاویه ω توسط V داده شده باشد، تابع سینوسی بسادگی چنین خواهد بود،

$$v(t) = \operatorname{Re}(V e^{j\omega t}) = V_m \cos(\omega t + \Phi)$$

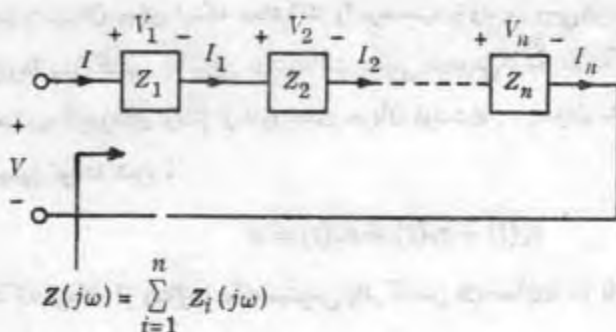
که در آن:

$$V \triangleq V_m e^{j\Phi}$$

بطریق مشابه، میتوان معادلات گره را برحسب فازورهای جریان نوشت.

۱-۵- بهم پیوستنهای سری - موازی

در ابتدا، اتصالات سری و اتصالات موازی را در نظر میگیریم. در شکل (۱-۵) اجزاء مدار که بطور سری بهم وصل شده‌اند دیده میشود. در حالت دائمی سینوسی در فرکانس



شکل ۱-۵- امپدانس‌های سری

داده شده ω ، هر جزء بایک امپدانس مشخص می‌شود. با نوشتن یک KCL در هر گره بلافاصله مشاهده می‌کنیم که جریانها برای تمام اجزاء یکسان هستند. برحسب فازورها داریم:

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n = I$$

با استفاده از KVL و با نمایش فازوری ولتاژها، داریم:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

چون:

$$V_i = Z_i I_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

داریم:

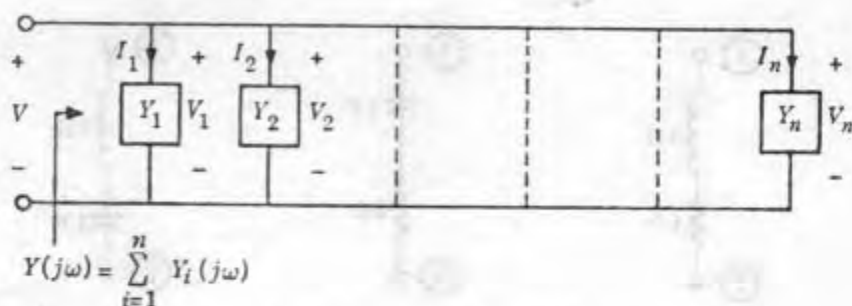
$$Z(j\omega) = \sum_{i=1}^n Z_i(j\omega)$$

که در آن $Z = \frac{V}{I}$ امپدانس شبکه یک قطبی نشان داده شده در شکل (۱-۵) می‌باشد.

بطریق مشابه، در شکل (۲-۵) اجزاء ساده مدار که بطور موازی بهم وصل شده‌اند دیده می‌شود. هر جزء توسط امپدانس و یا ادیتانس خود مشخص می‌شود. با استفاده از KVL داریم:

$$V_1 = V_2 = \dots = V_n = V$$

بنابراین ولتاژهای تمام شاخه‌ها یکسان می‌باشند. با استفاده از KCL داریم:



شکل ۲-۵ = ادیتانس‌های موازی

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

چون :

$$I_i = Y_i V_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

داریم :

$$Y(j\omega) = \sum_{i=1}^n Y_i(j\omega)$$

که در آن $Y = \frac{I}{V}$ ادیتانس شبکه یک قطبی نشان داده شده در شکل (۲-۵) میباشد.

تمرین ۱ = ادیتانس‌های نقطه تحریک را بصورت توابعی از ω ، برای شبکه‌های یک قطبی نشان داده شده در شکل (۲-۵) تعیین کنید.

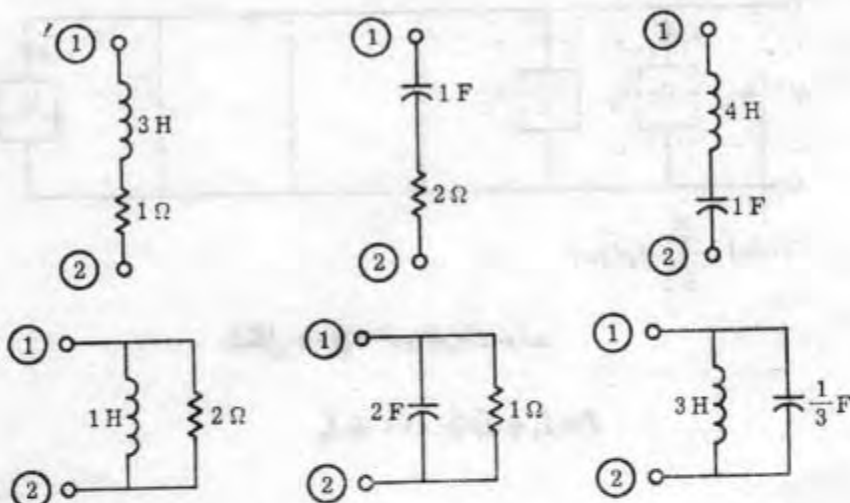
تمرین ۲ = برای هر یک از ادیتانس‌ها ، اندازه و فاز را بر حسب ω رسم کنید.

تمرین ۳ = فرض اینکه یک منبع جریان i_s به هر یک از شبکه‌های یک قطبی وصل شود ، پاسخ‌های ولتاژ حالت دائمی (در دوسرگروه‌های ① و ②) را برای i_s های زیر تعیین کنید :

الف - $i_s = \cos t$

ب - $i_s = \cos 2t$

واضح است که مدارهای پیچیده‌تر را میتوان 410 ترکیب اجزاء بصورت سری و موازی



شکل ۳-۵- امپدانس‌های نقطه تحریک برای شبکه‌های یک قطبی که بایستی تعیین شوند

تجزیه و تحلیل نمود. بعنوان مثال، در مدار شکل (۴-۵) که معمولاً «مدار نردبانی»^(۱) گفته میشود، امپدانس نقطه تحریک را میتوان چنین بیان کرد:

$$(۵-۵) \quad Z = Z_1 + \frac{1}{Y_r + \frac{1}{Z_r + \frac{1}{Y_\xi + \frac{1}{Z_o}}}}$$

که میتوان آنرا مجدداً چنین نوشت:

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 + \frac{1}{Y_r + \frac{1}{Z_r + \frac{Z_o}{1 + Y_\xi Z_o}}} \\ &= Z_1 + \frac{1}{Y_r + \frac{1 + Y_\xi Z_o}{Z_o + Z_r(1 + Y_\xi Z_o)}} \end{aligned}$$

$$= Z_1 + \frac{Z_o + Z_r(1 + Y_\xi Z_o)}{1 + Y_\xi Z_o + Y_r[Z_o + Z_r(1 + Y_\xi Z_o)]}$$

$$= \frac{Z_1[1 + Y_\xi Z_o + Y_r Z_o + Y_r Z_r(1 + Y_\xi Z_o)] + Z_o + Z_r(1 + Y_\xi Z_o)}{1 + Y_\xi Z_o + Y_r[Z_o + Z_r(1 + Y_\xi Z_o)]}$$

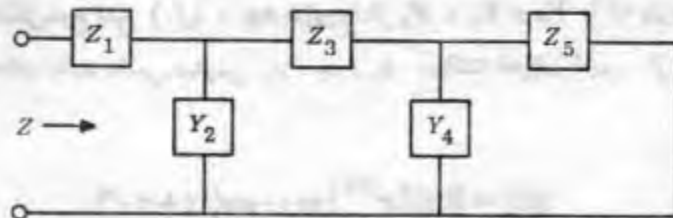
معادله (۱-۵) «گسترش کسره‌های متوالی»^(۱) نامیده می‌شود. این گسترش در ترکیب^(۲) مدارها مفید می‌باشد.

تمرین - امپدانس‌های نقطه تحریک برای شبکه‌های یک قطبی نشان داده شده در شکل (۵-۵) را تعیین کنید.

از مثالهای فوق مشاهده می‌شود که در تجزیه و تحلیل شبکه‌هایی که از اتصال سری و موازی اجزاء مدار درست شده‌اند تنها لازم است که اجزاء سری را با جمع امپدانس‌های تمام شاخه‌هایی که بطور سری هستند ترکیب نمود و اجزاء موازی را با جمع ادmittانس‌های تمام شاخه‌هایی که بطور موازی هستند ترکیب کرد. چون امپدانس نقطه تحریک بسادگی معکوس ادmittانس نقطه تحریک می‌باشد، بنابراین در انتخاب امپدانس و یا ادmittانس، برحسب اینکه در یک مورد خاص کدامیک مناسبتر هستند، میتوان انعطاف‌پذیر بود. در ترکیب موازی شکل (۲-۵) ادmittانس را انتخاب می‌کنیم و در شبکه نردبانی نشان داده شده در شکل (۴-۵) متناوباً امپدانس و ادmittانس را بکار می‌بریم.

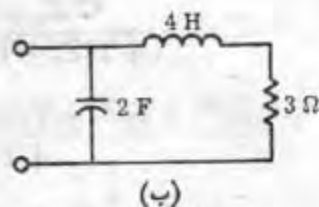
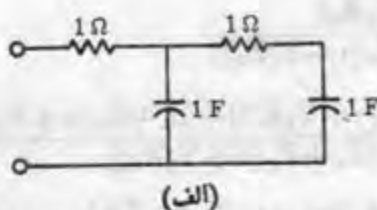
۵-۲- تجزیه و تحلیل گره و مش در حالت دائمی سینوسی

برای مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان که بشکل اتصال سری - موازی اجزاء مدار نیستند، میتوان از دو روش عمومی تجزیه و تحلیل مدار یعنی تجزیه و تحلیل گره و



شکل ۴-۵ یک شبکه نردبانی ساده

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها



شکل ۵-۵- امپدانس‌های نقطهٔ تحریک برای شبکه‌های یک قطبی که بایستی تعیین شوند

تجزیه و تحلیل مش استفاده نمود. ابتدا لازم است مجدداً تأکید شود که «تنها تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی مورد بررسی ما می‌باشد». بنابراین میتوان از فازورهای ولتاژها، فازورهای جریانها، امپدانس‌ها و ادیتانس‌ها در نوشتن معادلات KVL و KCL استفاده کرد. نوع معادلات حاصل، معادلات جبری خطی بوده و میتوان آنها را توسط قاعده کراسر حل نمود. برای تشریح روشها دو مثال ذکر میگردد.

مثال ۱- گیریم در مدار شکل (۶-۵) ورودی منبع جریان زیر باشد:

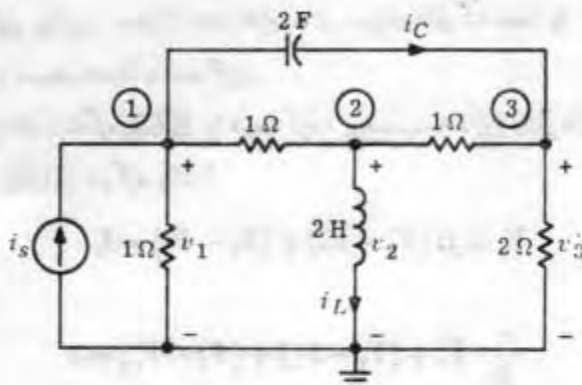
$$i_s(t) = 10 \cos(2t + 30^\circ) \quad (۶-۵)$$

میخواهیم ولتاژ حالت دائمی سینوسی v_p را در دو سر مقاومت 2 اهمی پیدا کنیم. ما از تجزیه و تحلیل گره استفاده خواهیم کرد. گیریم گره مبنا را بصورت نشان داده شده در شکل انتخاب کرده و ولتاژهای گره‌ها نسبت به مبنا را v_1 ، v_p و v_2 بنامیم. چون روی هم رفته چهار گره در مدار وجود دارد، میتوان سه معادله KCL برای آنها نوشت. بنابراین سه مجهول ما را، سه ولتاژ گره نسبت به مبنا تشکیل میدهند که میتوان آنها را از روی سه معادله KCL تعیین کرد. قبل از شروع بنویشتن این معادلات، میخواهیم فازور منبع جریان I_s نمایشگر شکل موج منبع $i_s(t)$ ، سه فازور ولتاژ V_1 ، V_p و V_2 را که به ترتیب نشان دهنده ولتاژهای حالت دائمی سینوسی v_1 ، v_p و v_2 میباشند تعریف کنیم. از (۶-۵) داریم:

$$i_s(t) = \text{Re}(I_s e^{j2t}) = 10 \cos(2t + 30^\circ)$$

و یا:

$$I_s \triangleq 10 e^{j30^\circ} \quad (۶-۶)$$



شکل ۶-۵ - مثال ۱ : تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی
که برپایه تجزیه و تحلیل گره قرار دارد

توجه کنید که فرکانس زاویه ای $\omega = 2$ رادیان برثانیه میباشد. گیریم فازورهای ولتاژها با معادلات زیر تعریف شوند :

$$v_1(t) = \text{Re}(V_1 e^{j2t})$$

$$(۵-۴) \quad v_r(t) = \text{Re}(V_r e^{j2t})$$

$$v_r(t) = \text{Re}(V_r e^{j2t})$$

بیاد آورید که برای بدست آوردن فازور جریان ، فازور ولتاژ را در ادیتمانس آن جزء ضرب میکنیم. بعنوان مثال ، گیریم جریان در سلف i_L بوده که توسط فازور جریان I_L نشان داده میشود. اگر V_r داده شده باشد ، میتوان I_L را چنین بدست آورد :

$$I_L = Y_L V_r = \frac{1}{j\omega L} V_r = \frac{1}{j4} V_r$$

بطریق مشابه ، گیریم جریان خازن i_C بوده که توسط فازور جریان I_C نشان داده میشود. باتوجه باینکه ولتاژ دوسر خازن $v_1 - v_3$ میباشد ، برحسب فازورها بدست میآوریم :

$$I_C = Y_C (V_1 - V_r) \stackrel{414}{=} j\omega C (V_1 - V_r) = j4 (V_1 - V_r)$$

۴۰۴

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

با تعقیب این روش، میتوان تمام فازورهای جریان‌های شاخه‌ها را برحسب فازورهای ولتاژهای گره نسبت به مبنا بدست آورد.

پس معادلات گره KCL را در سه گره، برحسب سه فازور ولتاژهای گره نسبت به مبنا مینویسیم. بنابراین در گره یک:

$$V_1 + j\omega(V_1 - V_2) + (V_1 - V_2) = I_s$$

در گره دو:

$$\frac{1}{j\omega} V_2 + (V_2 - V_1) + (V_2 - V_3) = 0$$

و در گره سه:

$$\frac{1}{\omega} V_3 + j\omega(V_3 - V_1) + (V_3 - V_2) = 0$$

با مرتب کردن مجدد معادلات، بدست می‌آوریم:

$$(2 + j\omega)V_1 - V_2 - j\omega V_3 = I_s$$

$$-V_1 + (2 + \frac{1}{j\omega})V_2 - V_3 = 0$$

$$-j\omega V_1 - V_2 + (\frac{2}{\omega} + j\omega)V_3 = 0$$

این نتایج، دسته‌ای از سه معادله جبری خطی با ضرایب مختلط را تشکیل می‌دهند. فازور ولتاژ مطلوب V_2 را میتوان از قاعده کرامر بدست آورد. بنابراین:

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 + j\omega & -1 & I_s \\ -1 & 2 + \frac{1}{j\omega} & 0 \\ -j\omega & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 + j\omega & -1 & 0 \\ -1 & 2 + \frac{1}{j\omega} & -1 \\ -j\omega & -1 & \frac{2}{\omega} + j\omega \end{vmatrix}} = \frac{2 + j\omega}{1 + j\omega + 2\omega} I_s$$

۴۰۳

تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

چون $I_s = 1 \angle 30^\circ$ است :

$$V_{\phi} = 6.94 \angle 44^\circ$$

بنابراین ، ولتاژ حالت دائمی سینوسی خروجی چنین است :

$$v_{\phi}(t) = 6.94 \cos(2t + 44^\circ)$$

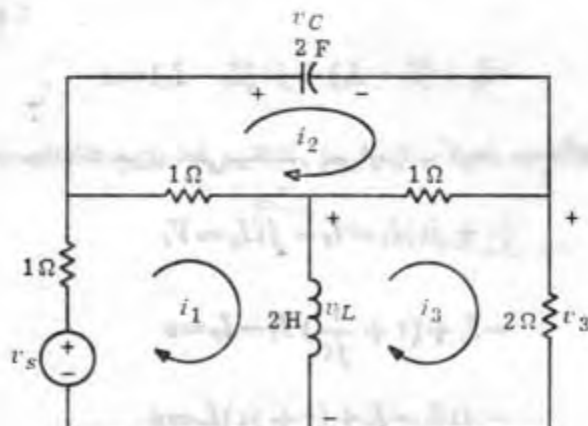
مثال ۲- می‌خواهیم با استفاده از تجزیه و تحلیل مش ، همان مسأله را حل کنیم . ابتدا با استفاده از مدار معادل نرتن ، منبع جریان را به منبع ولتاژ تبدیل می‌کنیم . مدار بدست آمده در شکل (۷-۵) نشان داده شده و منبع ولتاژ چنین است :

$$v_s(t) = 10 (\cos 2t + 30^\circ)$$

و بنابراین فازور نشان دهنده v_s چنین است :

$$V_s = 10 \angle 30^\circ$$

در تجزیه و تحلیل مش ، جریانهای مشها را بعنوان متغیرهای شبکه بکار می‌بریم . این جریانها i_1 ، i_2 و i_3 بصورت نشان داده شده در شکل (۷-۵) میباشند . نمایش های فازوری برای i_1 ، i_2 و i_3 بصورت زیر تعریف میشوند .



شکل ۷-۵- مثال ۲ : همان مدار شکل (۶-۵) با این تفاوت که بمنظور سهولت در تجزیه و تحلیل مش جریان با منبع ولتاژ معادل تعویض شده است .

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$i_1(t) = \text{Re}(I_1 e^{j\omega t})$$

$$i_r(t) = \text{Re}(I_r e^{j\omega t})$$

$$i_r(t) = \text{Re}(I_r e^{j\omega t})$$

معادلات مشها را با استفاده از KVL برحسب فازورهای I_1 ، I_r ، I_p و V_s خواهیم نوشت. ابتدا لازم است که تمام فازورهای ولتاژهای شاخه‌ها را برحسب فازورهای جریانهای مشها I_1 ، I_r و I_p بیان کنیم. برای اینکار، فازورهای جریانهای شاخه‌ها را درامپدانس شاخه‌ها ضرب می‌کنیم. بعنوان مثال، فازور ولتاژ V_C برای خازن مساوی $\frac{1}{j\omega} I_r$ میباشد. بهمین ترتیب فازور ولتاژ V_L برای سلف مساوی $j\omega(I_1 - I_r)$ است. سپس معادلات KVL برحسب فازورهای جریانهای مشها نوشته میشوند. بنابراین برای مش ۱:

$$I_1 + (I_1 - I_r) + j\omega(I_1 - I_r) = V_s$$

برای مش ۲:

$$\frac{1}{j\omega} I_r + (I_r - I_r) + (I_r - I_1) = 0$$

و برای مش ۳:

$$2I_r + (I_r - I_r) + j\omega(I_r - I_1) = 0$$

این سه معادله، معادلات جبری خطی میباشد. پس از مرتب کردن مجدد آنها خواهیم داشت:

$$(2 + j\omega)I_1 - I_r - j\omega I_r = V_s$$

$$-I_1 + (2 + \frac{1}{j\omega})I_r - I_r = 0$$

$$-j\omega I_1 - I_r + (2 + j\omega)I_r = 0$$

با استفاده از قاعده کرامر، I_r را پیدا می‌کنیم ۱۷. بنابراین:

$$I_r = \frac{\begin{vmatrix} 2+j4 & -1 & V_s \\ -1 & 2+\frac{1}{j4} & 0 \\ -j4 & -1 & -j4 \\ -1 & 2+\frac{1}{j4} & -1 \\ -j4 & -1 & 2+j4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+j4 & -1 & 0 \\ -1 & 2+\frac{1}{j4} & -1 \\ -j4 & -1 & 2+j4 \end{vmatrix}} = \frac{2+j8}{12+j22} V_s$$

چون $V_s = 10 \angle 20^\circ$ و $V_r = 2I_r$ داریم:

$$V_r = 6.4 \angle 44^\circ$$

یا:

$$v_r(t) = 6.4 \cos(2t + 44^\circ)$$

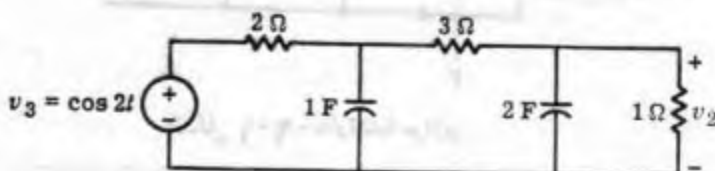
این جواب البته با آنچه توسط تجزیه و تحلیل گره بدست آمد مطابقت دارد.

تمرین ۱- معادلات حلقه برای مدار نردبانی نشان داده شده در شکل (۸-۵) را بنویسید. فرض میشود که مدار در حالت دائمی سینوسی قرار دارد.

تمرین ۲- معادلات را برای ولتاژ حالت دائمی سینوسی v_r در دو سر مقاومت ۱ اهمی حل کنید.

تمرین ۳- منبع ولتاژ را به منبع جریان تبدیل کرده و معادلات گره را برحسب فازورها بنویسید.

تمرین ۴- معادلات را برای ولتاژ حالت دائمی سینوسی v_r برپایه تجزیه و تحلیل گره حل کنید.



شکل ۸-۵- یک مدار نردبانی در حالت دائمی سینوسی

۶- مدارهای تشدید

برای تشریح بیشتر تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی و مفاهیم فازور، امپدانس، ادمیتانس و یک مفهوم جدید که «تابع شبکه»^(۱) گفته میشود از یک مدار تشدید استفاده خواهیم کرد. برای نشان دادن بسیاری از خواص مدارهای تشدید، نمایش‌های ترسیمی گوناگونی ارائه خواهد شد. این روش‌های ترسیمی برای تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی مدارهای پیچیده‌تر مفید خواهند بود.

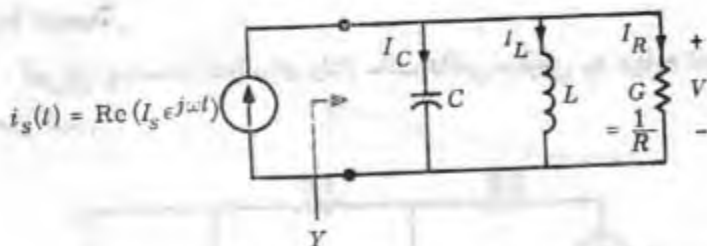
در عمل، دو نوع مدار تشدید، یعنی مدار تشدید سری و مدار تشدید موازی حایز اهمیت میباشند. ما مدار تشدید RLC موازی شکل (۱-۶) را تجزیه و تحلیل خواهیم کرد. مدار تشدید سری دوگان مدار تشدید موازی است و چون مفهوم دوگانی را مختصراً بحث کرده‌ایم از تشریح جزئیات مدارهای تشدید سری صرف‌نظر می‌گردد. معه‌ذا، بمنظور مراجعه، نتایج برای هر دو نوع مدار در جدول (۱-۷) در آخر این بخش خلاصه شده‌است.

۶-۱- امپدانس، ادمیتانس و فازورها

مدار تشدید شکل (۱-۶) را که توسط یک منبع جریان سینوسی زیر تحریک میشود در نظر بگیرید:

$$(۱-۶) \quad i_s(t) = \operatorname{Re}(I_s e^{j\omega t}) = |I_s| \cos(\omega t + \angle I_s)$$

ادمیتانس شبکه یک قطبی در فرکانس زاویه‌ای ω چنین است:



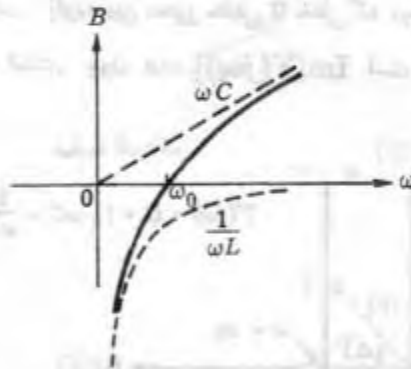
شکل ۶-۱- مدار تشدید موازی

$$\begin{aligned}
 Y(j\omega) &= G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \\
 &= G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)
 \end{aligned}$$

بنابراین، جزء حقیقی $Y(j\omega)$ یک ثابت و جزء انکاری آن تابعی از ω می باشد. جزء انکاری یک ادیتانس، سوسپتانس^(۱) خوانده شده و با B مشخص می گردد. در نتیجه:

$$B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L} \quad (۱-۲)$$

سوسپتانس تابعی از ω بوده و در شکل (۱-۲) برحسب ω رسم شده است. در فرکانس $\omega_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ سوسپتانس صفر بوده و گفته می شود که مدار در حالت تشدید است. فرکانس ω_0 را فرکانس تشدید می نامند. اهمیت کلمه « تشدید » بعداً در این بخش بحث خواهد شد.



شکل ۱-۲- منحنی سوسپتانس یک مدار تشدید موازی، $B(\omega)$ برحسب ω .

توجه کنید که در فرکانس زاویه ای تشدید $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ رادیان بر ثانیه

و $B(\omega_0) = 0$ می باشد.

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

«صفحه‌های امپدانس و ادمیتانس» معادله (۲-۶) نشان می‌دهد که ادمیتانس، تابع فرکانس زاویه‌ای ω می‌باشد. با جدا کردن معادله (۲-۶) باجزاء حقیقی و انگاری بدست می‌آوریم:

$$\text{Re}[Y(j\omega)] = G \quad (۲-۴ \text{ الف})$$

$$\text{Im}[Y(j\omega)] = B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L} \quad (۲-۴ \text{ ب})$$

رفتار مشخصه ادمیتانس $Y(j\omega)$ را می‌توان بصورت ترمیمی توصیف کرد. برای هر ω معین، می‌توان $Y(j\omega)$ را بصورت یک نقطه در صفحه مختلط که در این مورد صفحه ادمیتانس نامیده می‌شود رسم نمود. وقتی ω تغییر می‌کند، نقطه $Y(j\omega)$ تغییر کرده و معادلات (۲-۴ الف) و (۲-۴ ب) معادلات پارامتری منحنی طی شده توسط $Y(j\omega)$ را تشکیل می‌دهند (شکل ۲-۳ را ببینید). این منحنی مکان Y نامیده می‌شود. چون در حالت مورد بررسی ما طول G ثابت است، مکان خط مستقیمی بموازات محورها نگاری بوده که محور حقیقی را در G قطع می‌کند. فاصله بین $Y(j\omega)$ تا مبدأ مساوی اندازه $|Y(j\omega)|$ می‌باشد. زاویه بین محور حقیقی تا خطی که مبدأ را به $Y(j\omega)$ وصل می‌کند، فاز $\angle Y(j\omega)$ است. چون $\text{Im}[Y(j\omega_0)] = 0$ است، پس $Y(j\omega_0) = G$



شکل ۲-۳ مکان Y در صفحه ادمیتانس

۴۰۹

تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

میباشد. بنابراین در حالت تشدید $(\omega = \omega_0)$ ، ادmittانس «می نیمم» بوده و فاز آن «صفر» است. تذکر این نکته جالب توجه است که ادmittانس مدار تشدید موازی در حالت «تشدید» مساوی ادmittانس مقاومت تنها میباشد. یعنی ترکیب خازن و سلف مثل یک مدار باز رفتار میکند.

تمرین - یک مدار تشدید موازی با $L = 1$ هانری، $C = 1$ فاراد و $R = 100$ اهم را در نظر بگیرید. مکان Y را رسم کنید. بویژه نقاط نظیر:

$$\omega = 0, 0.33, 0.995, 1.00, 1.005, 1.33, \infty$$

رادیان بر ثانیه را مشخص نمایید.

امپدانس مدار تشدید موازی چنین است:

$$Z(j\omega) = \frac{1}{Y(j\omega)} = \frac{1}{G + jB(\omega)} = \frac{1}{G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})}$$

$$(1-5) \quad = \frac{G}{G^2 + B^2(\omega)} + j \frac{-B(\omega)}{G^2 + B^2(\omega)}$$

بطریق مشابه، میتوان امپدانس را در «صفحه امپدانس» مختلط رسم کرد. از معادله (1-5) داریم:

$$(1-6 \text{ الف}) \quad \operatorname{Re}[Z(j\omega)] = \frac{G}{G^2 + B^2(\omega)}$$

و:

$$(1-6 \text{ ب}) \quad \operatorname{Im}[Z(j\omega)] \triangleq X(\omega) = \frac{-B(\omega)}{G^2 + B^2(\omega)}$$

جزء انگاری یک امپدانس، را **گتانس** ^(۱) نامیده شده و معمولاً با $X(\omega)$ مشخص میشود. معادلات (1-6 الف) و (1-6 ب) را میتوان بعنوان معادلات پاراستری یک منحنی در صفحه امپدانس در نظر گرفت. این منحنی مکان Z نامیده میشود.

تمرین ۱- مکان Z را برای مدار RLC موازی با $L = 1$ هانری، $C = 1$ فاراد و $R = 100$ اهم رسم کنید.

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

تمرین ۲- ثابت کنید که مکان Z در صفحه امپدانس مختلط برای هر مدار RLC

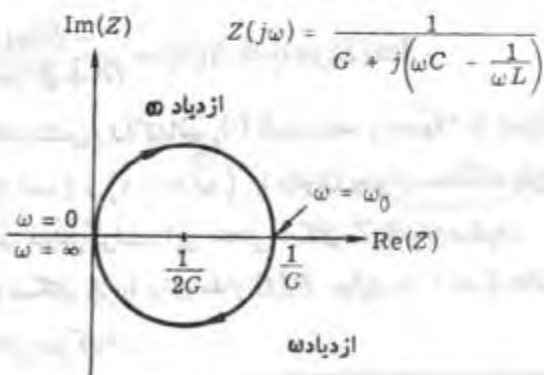
سوازی یک دایره است که مرکز آن در $(\frac{1}{2G}, 0)$ واقع شده و شعاع آن $\frac{1}{2G}$

میباشد، چنانکه در شکل (۶-۴) نشان داده شده است. راهنمایی: معادله دایره چنین است:

$$[Re(Z) - \frac{1}{2G}]^2 + [Im(Z)]^2 = (\frac{1}{2G})^2 \quad (6-7)$$

اهمیت تشدید با بررسی مکان Y در شکل (۶-۳) و یا مکان Z در شکل (۶-۴) روشن خواهد شد. اندازه امپدانس $|Z(j\omega)|$ بصورت تابعی از ω ، بازا $\omega=0$ از مقدار صفر شروع شده، بصورت یکنوا افزایش یافته و در تشدید ($\omega=\omega_0$) بمقدار «ماکسیمم» میرسد. در حالت تشدید، راکتانس $X(\omega_0)$ صفر بوده و گفته میشود که $Z(j\omega_0)$ مقاومت خالص است. برای $\omega > \omega_0$ ، $|Z(j\omega)|$ بصورت یکنوا کاهش یافته و وقتی $\omega \rightarrow \infty$ ، بسمت صفر میل میکند. از لحاظ فیزیکی در حالت تشدید، تمام جریان منبع جریان از مقاومت گذشته و جمع جریانهای خازن و سلف صفر میشود. در فرکانسهای پائین ($\omega \ll \omega_0$) قسمت اعظم جریان از درون سلف میگذرد. در فرکانسهای بالا ($\omega \gg \omega_0$) قسمت اعظم جریان از درون خازن میگذرد.

صفحه امپدانس



شکل ۶-۴ مکان Z در صفحه امپدانس

تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

۴۱۱

حال فازورهای ولتاژهای شاخه‌ها و جریان‌های شاخه‌ها را در نظر میگیریم. فازور ولتاژ V چنین بیان میشود:

$$V = ZI_s \quad (۶-۸)$$

« دیاگرام فازوری » گیریم فازورهای جریان برای شاخه‌های مقاومت، سلف و خازن برترتیب I_R ، I_L و I_C باشند. آنگاه:

$$I_R = GV \quad I_L = \frac{1}{j\omega L} V \quad I_C = j\omega CV \quad (۶-۹)$$

واضح است که:

$$I_R + I_L + I_C = I_s \quad (۶-۱۰)$$

برای روشن شدن روابط فوق گیریم داشته باشیم:

$$i_s(t) = \cos t = \operatorname{Re}(I_s e^{j\omega t})$$

یعنی:

$$I_s = 1 e^{j0} \text{ آمپر} \quad \omega = 1 \text{ رادیان بر ثانیه}$$

گیریم مقادیر اجزاء چنین داده شده باشند:

$$R = 1 \text{ اهم} \quad L = \frac{1}{4} \text{ هانری} \quad C = 1 \text{ فاراد}$$

ادمیتانس مدار تشدید (برحسب میگو) در فرکانس زاویه‌ای $\omega = 1$ رادیان بر ثانیه چنین است.

$$Y(j1) = 1 + j(1 - \frac{1}{4}) = 1 - j\frac{3}{4} = \sqrt{1.0625} e^{-j71.6^\circ}$$

بنابراین امپدانس (برحسب اهم) چنین است:

$$Z(j1) = \frac{1}{Y(j1)} = \frac{1}{\sqrt{1.0625}} e^{j71.6^\circ}$$

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

و فازور ولتاژ (برحسب ولت) چنین می‌باشد :

$$V = Z(j1)I_s = \frac{1}{\sqrt{1.0}} e^{j1.96^\circ}$$

از معادله (۹-۶) با $\omega = 1$ داریم (برحسب آمپر)

$$I_R = \frac{1}{\sqrt{1.0}} e^{j1.96^\circ} \quad I_L = \frac{4}{\sqrt{1.0}} e^{-j1.894^\circ} \quad I_C = \frac{1}{\sqrt{1.0}} e^{j1.96^\circ}$$

فازورهای ولتاژ V و جریانها در شکل (۵-۶) رسم شده‌اند. مشاهده می‌شود که :
 $I_R + I_L + I_C = I_s$ است .

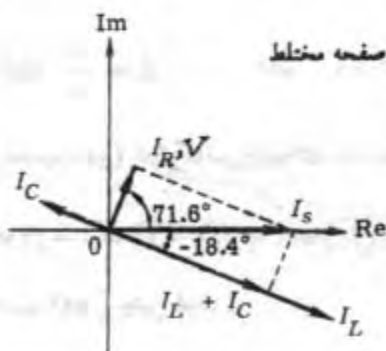
حال فرض کنید در فرکانس تشدید $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 2$ رادیان بر ثانیه، یک ورودی

سینوسی به مدار اعمال شود. گیریم ورودی چنین باشد :

$$i_s(t) = \cos 2t = \text{Re}(I_s e^{j2t})$$

یعنی :

$$I_s = 1 e^{j0} \quad \text{آمپر} \quad \omega = 2 \quad \text{رادیان بر ثانیه}$$



شکل ۵-۶ = ترسیم فازورهای ولتاژ و جریان در صفحه مختلط

(I_s جریان منبع است)

۴۱۳

تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

ورودی دارای فرکانسی مساوی فرکانس تشدید مدار است. دیده میشود که ادمیتانس چنین میباشد:

$$Y(j\omega) = 1 \text{ مهو}$$

بنابراین، فازور ولتاژ چنین است:

$$V = 1 \text{ ولت}$$

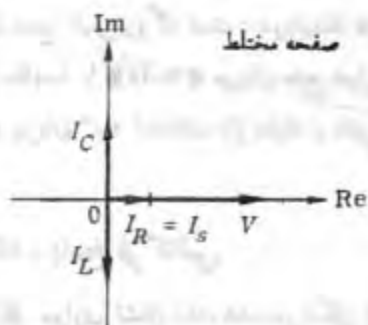
$$I_R = 1 \text{ آمپر} \quad I_L = 1e^{-j90^\circ} \text{ آمپر} \quad I_C = 1e^{j90^\circ} \text{ آمپر}$$

فازورها در شکل (۶-۶) رسم شده‌اند. تذکر این نکته جالب توجه است که اندازه‌های جریانهای شاخه‌ها در سلف و خازن دوبرابر اندازه جریان ورودی میباشند. این امر تعجب‌آور نیست زیرا معادله (۶-۱۰) معادله‌ای با اعداد مختلط میباشد و در مورد اخیر I_C و I_L به ترتیب $+90^\circ$ و -90° با I_s اختلاف فاز دارند.

مشاهده اثر مقاومت در رفتار کلی مدار تشدید نیز مطلب قابل توجهی میباشد. بعنوان مثال هرگاه در حالت بالا، بجای مقاومت ۱ اهمی یک مقاومت ۲۰۰ اهمی را قرار دهیم و مقادیر خازن و سلف بدون تغییر بمانند، باز هم فرکانس تشدید ۲ رادیان بر ثانیه بوده و:

$$Y(j\omega) = 4 \times 10^{-3} \text{ مهو} \quad \text{یا} \quad Z(j\omega) = 250 \text{ اهم}$$

بنابراین با همان جریان ورودی، یعنی $I_s = 1$ آمپر، بدست می‌آوریم:



شکل ۶-۶ = ترسیم فازورهای ولتاژ و جریان در حالت تشدید

$$V = 250 \text{ ولت}$$

$$I_C = j500 = 500e^{j90^\circ} \text{ آمپر}$$

$$I_L = -j500 = 500e^{-j90^\circ} \text{ آمپر}$$

$$I_R = 1 \text{ آمپر}$$

این جریانها و ولتاژها را میتوان چنین توجیه کرد: یک جریان بزرگ ۵۰۰ آمپری در مدار LC جاری شده و جریان یک آمپری منبع از مقاومت میگذرد. درحقیقت، نسبت اندازه جریان در سلف (یا خازن) به اندازه جریان منبع در «حالت تشدید» مساوی ضریب کیفیت Q مدار تشدید است. یعنی:

$$\frac{|I_L|}{|I_s|} = \frac{|I_C|}{|I_s|} = Q$$

بخطرمحین پدیده است که هنگام اندازه گیری جریانها و ولتاژهای یک مدار تشدید بایستی دقت نمود. بعنوان مثال در یک مدار تشدید «سری» که دارای ورودی منبع ولتاژ با دامنه فقط چند ولت میباشد، ولتاژ دوسر سلف یا خازن ممکن است دامنه‌ای در حدود چند صد ولت داشته باشد!

تعبیر ۵- در تمام بحث‌های این بخش ما منحصرآ حالت دائمی سینوسی را که در آن تمام ولتاژهای شاخه‌ها و تمام جریانهای شاخه‌ها در فرکانس یکسان بطور سینوسی با زمان تغییر میکنند در نظر گرفتیم. بعنوان مثال، وقتی میگوئیم در حالت تشدید $Q \gg 1$ ، جریان سلف در مقایسه با جریان منبع خیلی بزرگ است، درحقیقت «منظور» اینست که «دامنه» جریان سینوسی سلف در مقایسه با «دامنه» جریان منبع خیلی بزرگ میباشد. درحقیقت، در حالت تشدید، این دو جریان 90° اختلاف فاز دارند و وقتی یکی از آنها ما کسیمیم است، دیگری صفر میباشد.

۶-۲- تابع شبکه، پاسخ فرکانس

باز هم مدار RLC موازی نشان داده شده در شکل (۱-۶) مورد نظر ما است. اکنون فرض میکنیم که خروجی واقعی مورد توجه برای مدار تشدید، جریان حالت دائمی

در مقاومت، یعنی $i_R(t) = \text{Re}(I_R e^{j\omega t})$ باشد. در این حالت نیز ورودی همان منبع جریان سینوسی $i_s(t) = \text{Re}(I_s e^{j\omega t})$ است. تابع شبکه «با نسبت فازور خروجی به فازور ورودی» تعریف میشود. گیریم تابع شبکه را با H مشخص کنیم، در این صورت تابع شبکه H که در $j\omega$ حساب شده است چنین میباشد.

$$H(j\omega) = \frac{I_R}{I_s} = \frac{GV}{I_s} = GZ(j\omega) = \frac{1}{1 + jR(\omega C - \frac{1}{\omega L})}$$

$$(۶-۱۱) \quad = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

که در آن:

$$(۶-۱۲) \quad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \omega_0 CR \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

توجه کنید که توابع شبکه معمولاً به فرکانس زاویه‌ای ω بستگی دارند و این امر در معادله (۶-۱۱) برای H دیده میشود. اندازه تابع شبکه H چنین است.

$$(۶-۱۳) \quad |H(j\omega)| = \frac{1}{\left[1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

و فاز آن چنین است:

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1} Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

یا:

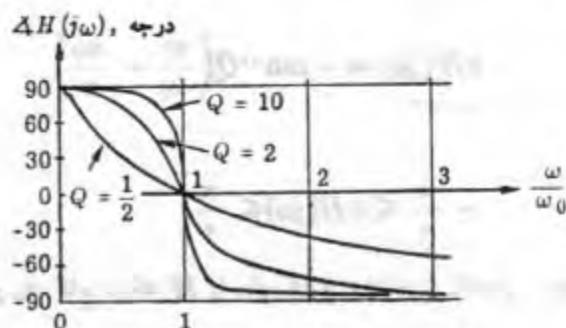
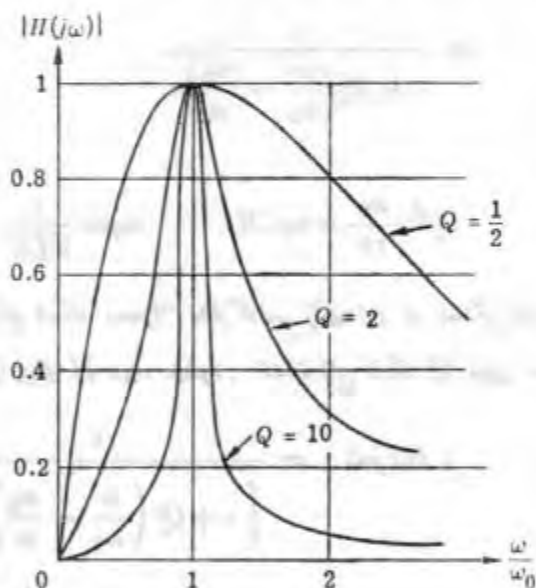
$$(۶-۱۴) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \angle H(j\omega) \leq \frac{\pi}{2}$$

دو پارامتر Q و ω_0 تابع شبکه H را بطور کامل مشخص میکنند. در شکل (۶-۷) اندازه و فاز H را بر حسب $\frac{\omega}{\omega_0}$ در حالیکه 428 بصورت یک پارامتر است رسم میکنیم.

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

این دو دسته متغی‌ها، یعنی اندازه و فاز برحسب ω بسیار مفید می‌باشند چونکه در تمام فرکانس‌ها همه اطلاعات لازم برای هر مدار تشدید را بدست می‌دهند. برای پیدا کردن پاسخ حالت دائمی سینوسی i_R ناشی از ورودی $i_s = \text{Re}(I_s e^{j\omega t})$ تنها لازم است که اندازه و فاز $H(j\omega)$ را از روی دسته متغی‌ها پیدا کنیم. چون $I_R = H(j\omega) I_s$ ،

$$\begin{aligned} i_R(t) &= \text{Re}[H(j\omega) I_s e^{j\omega t}] \\ &= |H(j\omega)| |I_s| \cos[\omega t + \angle I_s + \angle H(j\omega)] \end{aligned}$$



تقبصر ۵-۱ = امپدانس و ادیتمانس نقطه تحریک‌حالت‌های خاصی از مفهوم کلی توابع شبکه میباشند. اگر معادله (۱۵-۶) را با معادله (۱۳-۴) مقایسه کنیم، مشاهده میشود که برای پیدا کردن شکل موج خروجی حالت دائمی سینوسی از روی شکل موج ورودی سینوسی و تابع شبکه قواعد یکسانی حکمفرماست.

تقبصر ۵-۲ = دسته منحنی‌های شکل (۷-۶)، برای مدار تشدید سری نشان داده شده در شکل (۸-۶) نیز صادق است و تنها لازم است که تعریف مناسبی برای Q واپکار برد یعنی $Q \triangleq \frac{\omega_0 L}{R_s}$ (جدول ۱-۵ را ببینید). تابع شبکه برای یک مدار سری با رابطه $H = \frac{V_R}{V_s}$ تعریف میشود.

تمرین- گیریم منبع جریان ورودی با $i_s(t) = \cos \omega t$ مشخص شود. فازورهای جریان I_R را در مدارهای RLC موازی که با $\omega_0 = 1$ رادیان بر ثانیه و ترتیب با $Q = \frac{1}{\gamma}$ ، 2 ، 10 مشخص میشوند تعیین کنید.

«پاسخ فرکانس» چون $H(j\omega)$ تمام اطلاعات لازم مربوط به پاسخ حالت دائمی سینوسی را شامل میباشد، منحنی‌های اندازه و فاز $H(j\omega)$ (برحسب ω یا $\log \omega$) را پاسخ فرکانس مدار برای آن ورودی و خروجی مشخص شده گویند (در مورد مدارهای تشدید موازی، ورودی و خروجی بترتیب I_s و I_R میباشند) برای بدست آوردن یک تعبیر فیزیکی از پاسخ فرکانس، پاسخ حالت دائمی سینوسی مدار را برای چندین مقدار فرکانس در نظر خواهیم گرفت. مثل حالت فوق گیریم $I_s(j\omega)$ نمایش فازوری جریان ورودی در فرکانس زاویه‌ای ω باشد. در اینصورت فازور خروجی که پاسخ حالت دائمی سینوسی را در فرکانس زاویه‌ای ω نشان میدهد، $I_R(j\omega)$ بوده و از تعریف تابع شبکه داریم:

$$I_R(j\omega) = H(j\omega) I_s(j\omega) \quad (۱۶-۶ \text{ الف})$$

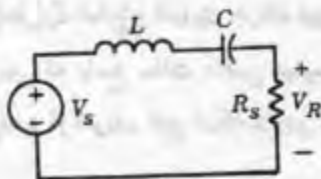
بنابراین، اندازه فازور خروجی با رابطه زیر به اندازه فازور ورودی مربوط است:

$$|I_R(j\omega)| \stackrel{430}{=} |H(j\omega)| |I_s(j\omega)| \quad (۱۶-۶ \text{ ب})$$

بطریق مشابه، فاز فازور خروجی با رابطه زیر به فاز فازور ورودی مربوط است.

$$\angle I_R(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle I_s(j\omega) \quad (۱۶-۶)$$

بخصوص، اگر $H(j\omega) = 1$ باشد، فازور خروجی همانند فازور ورودی است. اگر $H(j\omega) = 0$ باشد، فازور خروجی صفر است. معادله (۱۱-۶) نشان می‌دهد که برای مدار تشدید، تابع شبکه H در فرکانس تشدید مساوی ۱ و در $\omega = 0$ و $\omega = \infty$ مساوی صفر است. بنابراین گویند که یک مدار تشدید، در فرکانس تشدید سیگنال‌ها را عبور داده و در فرکانس‌های صفر و بینهایت مانع عبور آنها می‌شود. در سایر فرکانس‌ها اندازه و فاز سیگنال‌ها طبق منحنی‌های شکل (۷-۶) تغییر می‌کنند. بنابراین، درست در نزدیکی‌های فرکانس تشدید، سیگنال‌های ورودی با کاهش کوچکی در اندازه و تغییر مختصری در فاز آنها از مدار عبور می‌کنند. در فرکانس‌های پائین ($\omega \ll \omega_0$) و در فرکانس‌های بالا ($\omega \gg \omega_0$) دامنه خروجی بمقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. بخاطر همین حقیقت، یک مدار تشدید را یک فیلتر «میان‌گذر»^(۱) می‌نامیم. مدار تشدید تنها سیگنال‌هایی را که فرکانس آنها در مجاورت فرکانس تشدید است از خود عبور می‌دهد. شکل منحنی‌های اندازه و فاز یک مدار تشدید به ضریب کیفیت Q بستگی دارد. یک Q بزرگتر، باند گذر باریکتری را بوجود می‌آورد. یک فیلتر میان‌گذر ایده‌آل دارای منحنی اندازه‌ای بصورت نشان داده شده در شکل (۹-۶) می‌باشد. در حالت ایده‌آل، تمام سیگنال‌های داخل باند گذر^(۲)، بدون هیچگونه تغییری در فاز و اندازه عبور می‌کنند و در خارج از باند گذر خروجی بطور یکنواخت صفر است. معذاً، منحنی اندازه شکل (۹-۶) را از نظر فیزیکی نمیتوان بدست آورد.



$$\text{شکل ۸-۹} = \text{مدار تشدید سری یا } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ و } Q = \frac{\omega_0 L}{R_s}$$

برای یک مدار فیلتر عملی (مثل مدار تشدید) باند گذر را میتوان بطرق مختلفی تعریف کرد. متداولترین تعریفی که بکار میرود، باند گذر ± 3 db میباشد و آن بدین معنی است که در لبه‌های باند عبور، $|H(j\omega)|$ مساوی $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر مقدار ماکزیمم باند گذر است. از معادله (۱۳-۶) دیده میشود که اندازه ماکزیمم $|H(j\omega)|$ در $\omega = \omega_0$ بوده و مقدار آن مساوی ۱ است. با قراردادن $H(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ داریم:

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\left[1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

یا:

+ کلمه db برای مخفف دسیبل^(۱) بکار میرود. ولتاژها و جریانها را میتوان با فرمولهای

زیر برحسب دسیبل بیان کرد.

$$\text{برحسب ولت} \quad \text{ولتاژ} = 20 \log \quad \text{برحسب دسیبل} \quad \text{ولتاژ}$$

(و بطریق مشابه برای جریان). تابع انتقال H که نسبت جریانها میباشد نیز برحسب دسیبل چنین بیان میشود:

$$|H(j\omega)| \quad \text{برحسب دسیبل} = 20 \log |H(j\omega)|$$

چون در حالت مورد بررسی $H(j\omega_0) = 1$ ، پس تابع انتقال در ω_0 ، ۰ db و 0° میباشد. چون

$$-3 \approx 20 \log \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{است، اگر برای فرکانس } \omega_1 \text{، } |H(j\omega_1)| \text{ مساوی } -3 \text{ db باشد}$$

بدین معنی است که:

$$\frac{|H(j\omega_1)|}{|H(j\omega_0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$

نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 1$$

از حل معادله بالا برای مقادیر مثبت ω برحسب Q ، بدست می‌آید:

$$(1-17) \quad \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} \pm \frac{1}{Q}$$

در مورد مقادیر بزرگ Q ($Q \gg 1$)، با استفاده از:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots$$

بدست می‌آوریم:

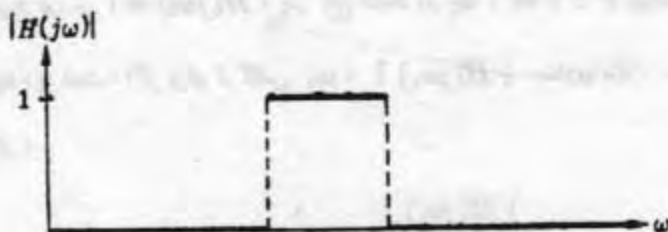
$$(1-18) \quad \frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 \pm \frac{1}{2Q}$$

بنابراین باند عبور را می‌توان بصورت باند بین فرکانس‌های ω_1 و ω_2 تعریف نمود که در آن:

$$(1-19) \quad \omega_1 \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q} \right) \quad \omega_2 \approx \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q} \right) \quad Q \gg 1$$

فرکانس‌های:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}, \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$$

فرکانس‌های قطع^(۱) ω -db نامیده میشوند و $f_2 - f_1 = \Delta f$ را نیز به‌نای باند^(۲) ω -db گویند و برحسب هرتز چنین بیان میشود:

شکل ۹-۹- منحنی اندازه برای یک فیلتر میان‌گذر ایده‌آل

$$(۶-۲۰) \quad \Delta f = f_2 - f_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} \approx \frac{\omega_0}{2\pi Q} = \frac{f_0}{Q} = \frac{\alpha}{\pi}$$

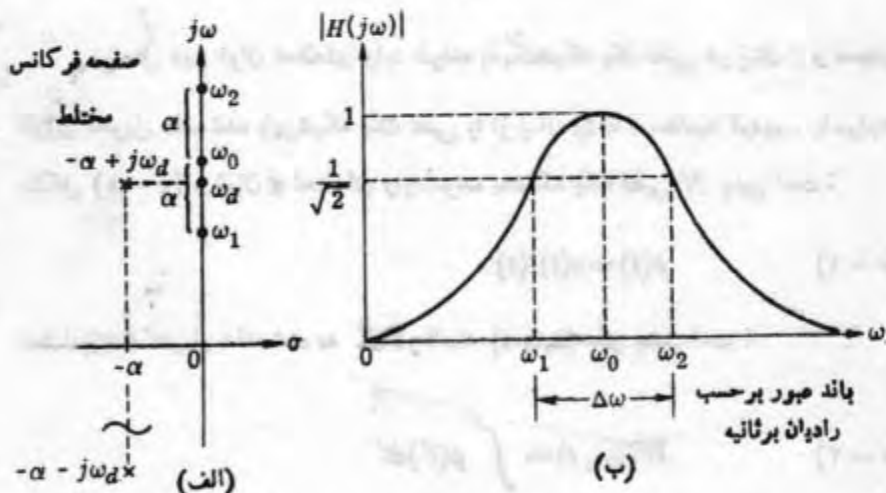
درفصل ۵، مدارهای مرتبه دوم را برحسب قرارگرفتن فرکانس های طبیعی آنها در صفحه فرکانس مختلط و با برحسب مقدار ضریب کیفیت Q طبقه بندی کردیم. برای $\infty > Q > \frac{1}{2}$ مدار را میرای ضعیف نامیده و فرکانس های طبیعی آنرا چنین مشخص کردیم:

$$\left\{ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix} \right\} = -\alpha \pm j\omega_d$$

که در آن:

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}$$

و:



شکل ۱۰-۶- (الف) فرکانس های طبیعی در صفحه فرکانس مختلط و باند عبور

نظیر آن برای یک مدار تشدید با Q بزرگ. (ب) منحنی اندازه (برای $Q \gg 1$ ، $\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q}$)

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$(۶-۲۱) \quad \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

صفحه فرکانس مختلط و همچنین منحنی اندازه در شکل (۶-۱۰) نشان داده شده‌اند تا بسیاری از روابط جالب میان محل‌های فرکانس‌های طبیعی در $\omega_0 \pm \alpha$ ، فرکانس تشدید ω_0 ، پهنای باند $\omega_1 - \omega_2$ و فرکانس‌های قطع ω_1 و ω_2 ————— نشان داده شوند. شکل (۶-۱۰) برای حالتی که Q بزرگ می‌باشد رسم شده است. برای $Q \gg 1$ ، با حذف جملات $\frac{1}{Q^2}$ ، از معادلات (۶-۱۹) و (۶-۲۱) روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$(۶-۲۲) \quad \omega_d \approx \omega_0 \quad \omega_1 \approx \omega_0 - \alpha \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \alpha$$

نتایج اصلی مدارهای تشدید سری و موازی را برای راحتی در جدول (۷-۱) خلاصه می‌کنیم.

۷- توان در حالت دائمی سینوسی

در فصل دوم توان لحظه‌ای وارد شونده به یک شبکه یک قطبی در زمان t و همچنین انرژی تحویل داده شده باین شبکه یک قطبی را از زمان t_0 تا t محاسبه کردیم. با مراجعه بشکل (۷-۱) «توان» لحظه‌ای وارد شونده به شبکه یک قطبی N چنین است:

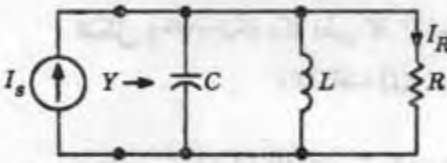
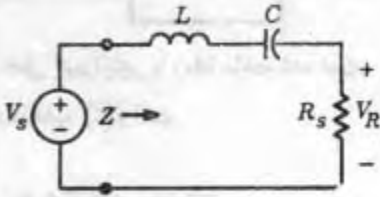
$$(۷-۱) \quad p(t) = v(t)i(t)$$

و «انرژی» تحویل داده شده به N در فاصله $(t_0$ و $t)$ نیز چنین است:

$$(۷-۲) \quad W(t_0, t) = \int_{t_0}^t p(t') dt'$$

در این بخش معادلات فوق را برای محاسبه توان و انرژی در حالت دائمی سینوسی بکار خواهیم برد.

جدول ۱-۷- خواص حالت دائمی سینوسی مدارهای تشدید

مدار تشدید موازی	مدار تشدید سری
	
$Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \omega_0 CR = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{R}{\sqrt{L/C}}$	$Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha} = \frac{\omega_0 L}{R_s} = \frac{\sqrt{L/C}}{R_s}$
$\alpha = \frac{1}{2RC}$	$\alpha = \frac{R_s}{2L}$
$H(j\omega) \triangleq \frac{I_R}{I_s}; \quad Y(j\omega) = \frac{1}{RH(j\omega)}$	$H(j\omega) \triangleq \frac{V_R}{V_s}; \quad Z(j\omega) = \frac{R_s}{H(j\omega)}$

$$\omega_0 \triangleq \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q \triangleq \frac{\omega_0}{2\alpha}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

اگر $Q > \frac{1}{r}$ (حالت میرای ضعیف) فرکانسهای طبیعی برابر $\omega_0 \pm j\alpha$ هستند که در آنجا

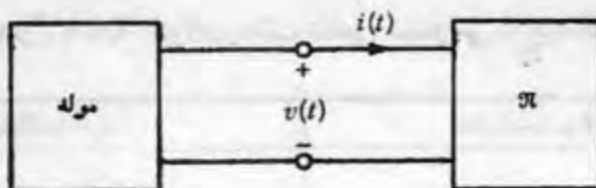
$$\omega_d \triangleq \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - 1/4Q^2}. \quad \text{If } Q \gg 1, \omega_d \approx \omega_0.$$

فرکانسهای قطع زاویه ۳-dB

$$\begin{cases} \omega_1 \approx \omega_0 - \alpha = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \\ \omega_2 \approx \omega_0 + \alpha = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q}\right) \end{cases}$$

رادیان بر ثانیه $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx 2\alpha = \frac{\omega_0}{Q}$

$$\Delta f = f_2 - f_1 \approx \frac{f_0}{Q} \quad \text{Hz}$$



شکل ۷-۱- شبکه یک قطبی N از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است. ولتاژ قطب $v(t)$ و جریان قطب $i(t)$ است

۷-۱- توان لحظه‌ای، توان متوسط و توان مختلط

فرض کنید که در حالت دائمی سینوسی، ولتاژ قطب شبکه یک قطبی N چنین باشد:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \angle V) = \text{Re}(V e^{j\omega t}) \quad (\text{الف } ۷-۳)$$

که در آن:

$$V \triangleq V_m e^{j\angle V} \quad V_m = |V| \quad (\text{ب } ۷-۳)$$

فرض کنید که جریان قطب شبکه چنین باشد:

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \angle I) = \text{Re}(I e^{j\omega t}) \quad (\text{الف } ۷-۴)$$

که در آن:

$$I \triangleq I_m e^{j\angle I} \quad I_m = |I| \quad (\text{ب } ۷-۴)$$

آنگاه از معادله (۷-۱)، «توان لحظه‌ای» وارد شوند، به N چنین است:

$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \quad (\text{الف } ۷-۵) \\ &= V_m I_m \cos(\omega t + \angle V) \cos(\omega t + \angle I) \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\angle V - \angle I) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \angle V + \angle I) \end{aligned}$$

جریان i ، ولتاژ v و توان لحظه‌ای p در شکل (۷-۲) رسم شده‌اند. جمله اول در رابطه توان در معادله (۷-۵) یک ثابت بوده درحالی‌که جمله دوم یک سینوسی با فرکانس زاویه‌ای 2ω

میباشد. هرگاه توان متوسط را در طول یک پریود $T = \frac{2\pi}{\omega}$ محاسبه نمائیم، جمله دوم همیشه مساوی صفر خواهد بود (زیرا مقدار متوسط هر سینوسی در طول هر مضرب صحیحی از پریود آن صفر است). بنابراین با نشان دادن «توان متوسط» بصورت P_{av} بدست میاریم:

$$P_{av} \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T p(t') dt' \quad (۶-۷ \text{ الف})$$

بنابراین:

$$P_{av} = \frac{1}{T} V_m I_m \cos(\angle V - \angle I) \quad (۶-۷ \text{ ب})$$

تبصره ۱- زاویه $\angle V - \angle I$ که آرگومان کسینوس در معادله (۶-۷ ب) میباشد عبارت از اختلاف فاز بین ولتاژ سینوسی و جریان سینوسی است. چون $V = ZI$ ، یعنی $\angle V - \angle I = \angle Z$ ، مساوی زاویه اسپدانس شبکه یک قطبی مورد بررسی نیز میباشد. بنابراین میتوان با تغییر دادن زاویه اسپدانس و در عین حال ثابت نگاه داشتن دامنه آن، توان متوسط دریافت شده توسط یک شبکه یک قطبی را تغییر داد.

تبصره ۲- P_{av} عبارت از مقدار متوسط توان لحظه‌ای $p(t)$ که در «طول یک پریود» وارد شبکه یک قطبی میشود میباشد. شکل نمونه‌ای از p بر حسب زمان در شکل (۷-۲) نشان داده شده است. در بیشتر موارد، شبکه یک قطبی N تنها شامل اجزاء پسیو میباشد، یعنی تمام مقاومتها، سلف‌ها و خازن‌ها مثبت هستند. در نتیجه سلف‌ها و



شکل ۷-۲ - شکل موجهای ولتاژ و جریان حالت دائمی سینوسی، و توان لحظه‌ای و متوسط

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

خازن‌ها انرژی ذخیره نموده و مقاومت‌ها انرژی تلف میکنند. بموجب اصل بقاء^(۱) انرژی، توان متوسط وارد شونده به شبکه یک قطبی N در حالت دائمی سینوسی بایستی نامنفی (≥ 0) باشد. این حقیقت که توان «متوسط» همیشه بزرگتر و یا مساوی صفر است، ملزم نمیدارد که برای تمام مقادیر t ، $p(t) \geq 0$ باشد. چنانکه در شکل (۲-۷) نشان داده شده است توان لحظه‌ای $p(t)$ میتواند در هر پریود، در فواصلی از زمان منفی باشد.

تبصره ۳۵- ساده‌ترین راه برای محاسبه توان متوسط که به شبکه یک قطبی N تحویل داده میشود بقرار زیر است. در حالت دائمی سینوسی عبارت:

$$P \triangleq \frac{1}{T} \overline{VI}$$

را بعنوان توان مختلط تحویل داده شده به شبکه یک قطبی N تعریف میکنیم. در اینجا از تیره بالای I بمنظور مشخص کردن مزدوج مختلط استفاده شده است. در اینصورت:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T V \| I \| e^{j(\angle V - \angle I)} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \| V \| \| I \| \cos(\angle V - \angle I) dt + j \frac{1}{T} \int_0^T \| V \| \| I \| \sin(\angle V - \angle I) dt \end{aligned}$$

بموجب معادله (۶-۷)، جزء حقیقی توان مختلط P مساوی توان متوسط میباشد:

$$P_{av} = \text{Re}(P) = \text{Re} \left(\frac{1}{T} \overline{VI} \right) \quad (\text{الف } ۷-۷)$$

تبصره ۴- گیریم $Z(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ بترتیب امپدانس نقطه تحریک و ادmittانس نقطه تحریک شبکه یک قطبی در فرکانس ω باشند. چون $V = ZI$ و $I = YV$ ، معادله (۷-۷ الف) چنین میشود:

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T \| I \|^2 \text{Re}[Z(j\omega)] dt = \frac{1}{T} \int_0^T \| V \|^2 \text{Re}[Y(j\omega)] dt \quad (\text{ب } ۷-۷)$$

معادله (۷-۷ ب) به نتیجه مهمی منجر میشود. فرض کنید شبکه یک قطبی از اجزاء

«پسیو» ساخته شده باشد. در این صورت کاملاً واضح است که P_{av} بایستی نامنفی باشد⁺. بنابراین امپدانس «نقطه تحریک» Z و ادmittانس «نقطه تحریک» Y «هر» شبکه یک قطبی که از اجزاء «پسیو» ساخته شده باشد نامعادلات زیر را برمیآورد.

$$\text{برای تمام مقادیر } \omega \quad \operatorname{Re}[Z(j\omega)] \geq 0 \quad \operatorname{Re}[Y(j\omega)] \geq 0 \quad (\alpha - \gamma \text{ الف})$$

و یا از معادله $(\gamma - \alpha)$ ، $\cos(\angle V - \angle I) \geq 0$ که معادل است با:

$$\text{برای تمام مقادیر } \omega \quad |\angle Y(j\omega)| \leq 90^\circ \quad \text{و} \quad |\angle Z(j\omega)| \leq 90^\circ \quad (\beta - \gamma \text{ ب})$$

معادلات $(\alpha - \gamma \text{ الف})$ و $(\gamma - \beta \text{ ب})$ بقدری مهم میباشند که در فصل نهم آنها را بروش دیگری نیز بدست خواهیم آورد.

۷-۲- خاصیت جمع پذیری توان متوسط

فرض کنید که شبکه یک قطبی N با یک ورودی، که مجموع چندین سینوسی با فرکانس های «متفاوت» میباشد تحریک میشود و گیریم که شبکه یک قطبی در حالت دائمی باشد. در این صورت ورودی سینوسی، یک خروجی سینوسی با همان فرکانس ایجاد کرده و خروجی کل از مجموع این سینوسی ها تشکیل میشود فرض کنید جریان ورودی چنین باشد.

$$i(t) = I_{1m} \cos(\omega_1 t + \psi_1) + I_{rm} \cos(\omega_r t + \psi_r)$$

و امپدانس ورودی نیز تابع معلوم $Z(j\omega)$ باشد. آنگاه در حالت دائمی:

$$v(t) = I_{1m} |Z(j\omega_1)| \cos[\omega_1 t + \psi_1 + \angle Z(j\omega_1)]$$

$$+ I_{rm} |Z(j\omega_r)| \cos[\omega_r t + \psi_r + \angle Z(j\omega_r)]$$

برای سهولت $v(t)$ را باین شکل مینویسیم:

$$v(t) = V_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1) + V_{rm} \cos(\omega_r t + \Phi_r)$$

که در آن:

⁺ این مطلب در فصل نهم اثبات خواهد شد.

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$\Phi_1 \triangleq \psi_1 + \angle Z(j\omega_1)$$

$$\Phi_r \triangleq \psi_r + \angle Z(j\omega_r)$$

توان لحظه‌ای که وارد شبکه یک قطبی N میشود چنین است :

$$\begin{aligned} p(t) = v(t)i(t) &= \frac{1}{r} V_{1m} I_{1m} \cos(\Phi_1 - \psi_1) \\ &+ \frac{1}{r} V_{rm} I_{rm} \cos(\Phi_r - \psi_r) + \frac{1}{r} V_{1m} I_{1m} \cos(\omega_1 t + \Phi_1 + \psi_1) \\ &+ \frac{1}{r} V_{rm} I_{rm} \cos(\omega_r t + \Phi_r + \psi_r) \\ &+ \frac{1}{r} V_{1m} I_{rm} \cos[(\omega_1 + \omega_r)t + \Phi_1 + \psi_r] \\ &+ \frac{1}{r} V_{1m} I_{rm} \cos[(\omega_1 - \omega_r)t + \Phi_1 - \psi_r] \\ &+ \frac{1}{r} V_{rm} I_{1m} \cos[(\omega_1 + \omega_r)t + \psi_1 + \Phi_r] \\ &+ \frac{1}{r} V_{rm} I_{1m} \cos[(\omega_1 - \omega_r)t + \psi_1 - \Phi_r] \end{aligned} \quad (v-9)$$

معادله $(v-9)$ نشان میدهد که «توان لحظه‌ای» مساوی مجموع توانهای لحظه‌ای ، ناشی از جریانها بافرکانسهای ω_1 و ω_r که پتهائی روی مداراثرکنند «نیست». درحقیقت مجموع فقط از چهار جمله اول سمت راست معادله $(v-9)$ تشکیل میشود. ازطرف دیگر «توان متوسط» مساوی مجموع توان متوسط در ω_1 و توان متوسط در ω_r میباشد. درحقیقت وقتی

+ محاسبه مقدار متوسط سمت راست معادله $(v-9)$ همیشه کار ساده‌ای نیست. موردی را در نظر بگیریم که فقط یک سینوسی تنها وجود دارد (معادله $v-5$) دراین مورد سمت راست یک تابع تناوبی بوده و پریود آن $T \triangleq \frac{2\pi}{\omega}$ میباشد. بنابراین توان متوسط P_{av} با $(v-6)$ الف

مقدار متوسط گرفته شود تنها دو جمله اول سمت راست باقی میمانند. بعبارت دیگر، در حالت دائمی خاصیت جمع آثار^(۱) برای توان «متوسط» بشرط اینکه فرکانسها متفاوت باشند برقرار است.

تمرین - بایک مثال نشان دهید که اگر دو منبع سینوسی دارای فرکانس «یکسان» بوده و هر دو به یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان توان تحویل دهند، توان متوسط داده شده به مدار وقتی که هر دو منبع با هم عمل میکنند، الزاماً مساوی مجموع توانهای متوسط

← داده میشود. حالت معادله (۹-۷) مهرگاه فرکانسهای ω_1 و ω_2 بطور هارمونیک بهم مربوط باشند، یعنی «اعداد درست»^(۲) n_1 و n_2 طوری وجود داشته باشند که $n_1\omega_1 = n_2\omega_2$ ساده است. کوچکترین مضرب مشترک n_1 و n_2 را در نظر گرفته و آنرا n بنامید. گیریم $p_2 \triangleq \frac{n}{n_2}$ و $p_1 \triangleq \frac{n}{n_1}$ باشند که p_1 و p_2 اعداد درست اند. در اینصورت سینوسیهای با فرکانسهای ω_1 ، ω_2 ، $\omega_1 + \omega_2$ و $\omega_1 - \omega_2$ دارای پویود «مشترک» $T_c = p_1 \left(\frac{2\pi}{\omega_1} \right) = p_2 \left(\frac{2\pi}{\omega_2} \right)$ میباشد و در نتیجه سمت راست (۹-۷) تناوبی با پریود T_c خواهد بود و بنابراین توسط معادله (۶-۷ الف) محاسبه شده که در آن بجای T ، مقدار T_c جایگزین میشود و نتایج داده شده در متن درس بلافاصله حاصل میگردد. اگر فرکانسهای ω_1 و ω_2 بطور هارمونیک بهم مربوط نباشند (مثلاً اگر $\omega_1 = 1$ رادیان بر ثانیه و $\omega_2 = \sqrt{2}$ رادیان بر ثانیه) آنگاه سمت راست معادله (۹-۷) یک تابع تناوبی نبوده و نمیتوان برای محاسبه آن از معادله (۶-۷ الف) استفاده نمود. اما مفهوم توان متوسط را باز هم میتوان بایک رابطه حدی بشرح زیر تعریف کرد.

$$P_{av} \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} p(t) dt$$

نتایج بیان شده در متن درس، اگرچه به محاسبات طولانی احتیاج دارند، مستقیماً از این تعریف اسلح شده بدست میآیند.

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

دو منبع وقتی که هریک به تنهایی روی مدار عمل می‌کنند نخواهد بود. امیدانسن نقطه تحریک مدار را در فرکانس مورد نظر Z بناسید.

۷-۳- مقادیر مؤثر و یا ریشه مقدار متوسط توان دوم

پاسخ حالت دائمی سینوسی یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان، با مقاومت R را در نظر بگیرید. از معادله (۷-۱) داریم:

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t) = RI_m^2 \cos^2(\omega t + \psi)$$

از معادله (۷-۶) یا (۷-۷) توان متوسط چنین است:

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 R dt = \frac{1}{T} I_m^2 R$$

گیریم مقدار مؤثر^(۱) یک شکل موج سینوسی از تقسیم دامنه و یا مقدار نوك^(۲) آن بر $\sqrt{2}$ تعریف شود. بنابراین:

$$(۷-۱۰) \quad I_{eff} \triangleq \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad V_{eff} \triangleq \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

و آنگاه:

$$(۷-۱۱) \quad P_{av} = I_{eff}^2 R = I_{eff} V_{eff}$$

بعنوان مثال، ولتاژ معمولی خانگی ۲۲۰ ولت مؤثر است، که دامنه نظیر آن $220\sqrt{2}$ ولت میباشد. بطریق مشابه در بسیاری از ولت‌مترها و آمپر‌مترها، مقادیر مؤثر خوانده میشوند. برای بدست آوردن دامنه و یا مقدار نوك، بایستی مقدار مؤثر را در $\sqrt{2}$ ضرب نمود. برای یک شکل «موج تناوبی» اما غیر سینوسی، مقدار مؤثر را میتوان برحسب انتگرال‌های زیر تعریف نمود.

$$(۷-۱۲) \quad I_{eff} \triangleq \left[\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$V_{\text{eff}} \triangleq \left[\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۱۲-۷)$$

که در آن $i(\cdot)$ و $v(\cdot)$ توابع تناوبی با پریود T میباشند. اهمیت تعاریف (۱۲-۷) (الف) و (۱۲-۷) (ب) در این است که توان متوسط تحویل شده بوسیله یک تابع تناوبی به یک مقاومت با مقاومت R مساویست با:

$$P_{\text{av}} = I_{\text{eff}}^2 R = \frac{V_{\text{eff}}^2}{R} = I_{\text{eff}} V_{\text{eff}} \quad (۱۳-۷)$$

این موضوع واضح است زیرا طبق تعریف داده شده در معادله (۶-۷)، P_{av} چنین است:

$$P_{\text{av}} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) i(t) dt$$

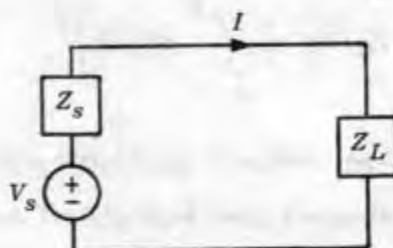
$$= \frac{1}{T} \int_0^T R i^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{v^2(t)}{R} dt \quad (۱۴-۷)$$

با مقایسه معادلات (۱۲-۷) و (۱۴-۷) معادله (۱۳-۷) بلافاصله حاصل میشود. در معادله (۱۲-۷) مقادیر مؤثر، بر حسب ریشه دوم مقدار متوسط توان دوم مقادیر واتاژ و جریان تعریف شده‌اند و بنابراین نام «ریشه - مقدار متوسط - توان دوم»^(۱) مصداق پیدا میکند.

۷-۴- قضیه انتقال توان ماکسیمم

مسئله‌ای با اهمیت عملی بسیار زیاد در شکل (۳-۷) تشریح شده است. در این مدار Z_L نشان دهنده یک اسپدانس پیسو «داده شده» و V_s نمایش فازوری منبع ولتاژ سینوسی «داده شده» در فرکانس زاویه‌ای ω میباشد. بنابراین:

$$v_s(t) = \text{Re}(V_s e^{j\omega t})$$



شکل ۳-۷- مداري که انتقال توان از یک منبع به یک بار را نشان میدهد

امپدانس Z_L ، یک امپدانس بارپیو را نشان میدهد که مقدار آن بایستی چنان انتخاب شود تا توان متوسطی که وارد امپدانس بار Z_L (در حالت دائمی سینوسی) میگردد ماکسیمم باشد. بعنوان مثال، ممکن است منظور طرح طبقه اول یک دستگاه رادار^(۱) و یا تلسکوپ^(۲) رادیویی باشد. منبع ولتاژ v_s امواج الکترومغناطیسی ورودی را نشان میدهد و امپدانس Z_s ، امپدانس فضای آزاد^(۳)، کابل‌ها^(۴) موج‌برها^(۵) و غیره است که به مرحله اول منتهی میشود. مسأله انتخاب بهترین امپدانس ورودی Z_L برای طبقه اول است بطوریکه بالاترین توان ممکن باین طبقه تحویل شود.

قضیه انتقال توان ماکسیمم بیان میدارد که «آپتیمم مقدار امپدانس بار Z_{L0} مساوی مزدوج مختلط Z_s »، یعنی، $Z_{L0} = \bar{Z}_s$ میباشد.

«اثبات» تمام محاسباتی که ذیلاً انجام میشود شامل امپدانس هادفرکانس زاویه‌ای ω منبع میباشد. به منظور سادگی طرز نمایش، Z_L را بجای $Z_L(j\omega)$ بکار خواهیم برد. توان متوسط تحویل شده به Z_L برحسب فازور جریان I چنین است.

$$P_{av} = \frac{1}{T} |I|^2 \text{Re}(Z_L)$$

چون:

$$I = \frac{V_s}{Z_s + Z_L}$$

نتیجه میشود که :

$$P_{av} = \frac{1}{2} |V_s|^2 \frac{\operatorname{Re}(Z_L)}{|Z_s + Z_L|^2}$$

گیریم ، جزءهای حقیقی و انگاری Z_L و Z_s بترتیب R_L ، R_s ، X_L و X_s باشند .
داریم :

$$P_{av} = \frac{1}{2} |V_s|^2 \frac{R_L}{(R_L + R_s)^2 + (X_L + X_s)^2}$$

در اینجا V_s ، R_s و X_s داده شده‌اند و مقادیر R_L و X_L باید چنان انتخاب شوند تا P_{av} ماکسیمم گردد . چون راکتانس X_L میتواند مثبت و یا منفی باشد ، میتوان $X_L = -X_s$ انتخاب نمود تا جمله $(X_L + X_s)^2$ درخرج کسرمساوی صفر شود . بعنوان مثال ، گیریم Z_s اتصال سری یک مقاومت و یک سلف با اندوکتانس ۱ هانری بوده و $\omega = 2$ رادیان برثانیه باشد . آنگاه $X_s = \omega L = 2$ اهم خواهد بود . X_L مورد نیاز مساوی -2 اهم است که میتوان توسط یک خازن با ظرفیت $\frac{1}{4}$ فاراد بدست آورد . با این انتخاب P_{av} ،
چنین میشود :

$$(v-10) \quad P_{av} = \frac{1}{2} |V_s|^2 \frac{R_L}{(R_L + R_s)^2}$$

اکنون بایستی مقدار آپتیمم R_L را تعیین نمود . با گرفتن مشتق جزئی از P_{av} نسبت به R_L بدست میآوریم :

$$(v-11) \quad \frac{\partial P_{av}}{\partial R_L} = \frac{1}{2} |V_s|^2 \frac{(R_L + R_s)^2 - 2(R_L + R_s)R_L}{(R_L + R_s)^4}$$

برای آپتیمم کردن P_{av} ، $\frac{\partial P_{av}}{\partial R_L}$ را مساوی صفر قرار میدهیم و در نتیجه از (v-11) ،

$R_L = R_s$ بدست می‌آید . توان ماکسیمم از معادله (v-14) چنین است :

نظریه^۲ اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$(۷-۱۷) \quad \max P_{av} = \frac{|V_s|^2}{4R_s}$$

و در شرایطی بدست می‌آید که داشته باشیم :

$$(۷-۱۸) \quad Z_{L0} = R_s - jX_s = \bar{Z}_s$$

وقتی این شرط برقرار باشد گویند امپدانس بار با امپدانس منبع بطور مزدوج تطبیق شده^(۱) است و یا عبارت ساده‌تر گویند که بار با منبع تطبیق شده است.

معادله (۷-۱۷) توان متوسط ما کسیم را که به بار تحویل میشود بدست می‌دهد. جالب توجه است که این توان را با توان متوسطی که توسط منبع تحویل داده میشود مقایسه کنیم واضح است که توان متوسط تحویل داده شده توسط منبع چنین است :

$$(۷-۱۹) \quad P_s = \frac{1}{2} |I|^2 \operatorname{Re}(Z_s + Z_L)$$

در تحت شرایط تطبیق شده مزدوج (۷-۱۸) داریم :

$$I = \frac{V_s}{Z_{L0} + Z_s} = \frac{V_s}{2R_s}$$

بنابراین معادله (۷-۱۹) چنین میشود :

$$(۷-۲۰) \quad P_s = \frac{1}{2} \frac{|V_s|^2}{4R_s^2} 2R_s = \frac{|V_s|^2}{4R_s}$$

میتوان « بهره »^(۲) مدار را با نسبت توان متوسط تحویل شده به بار به توان متوسط تحویل داده شده توسط منبع تعریف نمود. با مقایسه معادلات (۷-۱۷) و (۷-۲۰) ملاحظه میکنیم که بهره مدار تطبیق شده مزدوج مساوی ۵۰ درصد است. برای رادارها و رادیو-تلسکوپ‌ها این حقیقت هیچ اهمیت ندارد، زیرا انرژی موجود در امواج الکترومغناطیسی ورودی اگر توسط طبقه اول جذب نشود از میان خواهد رفت. برای مهندسين نیرو وضع کاملاً برعکس است. انرژی تحویل داده شده توسط منبع ارزش پولی داشته و شرکت‌های تولید نیرو به ازدهاد بهره بشدت علاقمند هستند و میخواهند توان متوسط تولید شده آنها

۴۳۵

تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

هرچه بیشتر به بار (یعنی مشتری) تحویل داده شود. نتیجتاً آلترناتورهای بزرگ هیچگاه بطور مزدوج تطبیق شده نیستند.

۵-۷-۱ Q یک مدار تشدید

در اینجا یک تعبیر انرژی از ضریب کیفیت Q یک مدار تشدید را بیان خواهیم داشت. برای مدار تشدید موازی نشان داده شده در جدول (۱-۷) داریم:

$$Q \triangleq \frac{\omega_0}{\gamma \alpha} = \omega_0 CR$$

اگر V فازور ولتاژ در «حالت تشدید» باشد، میتوان نوشت:

$$(۷-۲۱) \quad Q = \omega_0 \frac{\frac{1}{\gamma} C |V|^2}{\frac{1}{\gamma} G |V|^2}$$

عبارت $\frac{1}{\gamma} G |V|^2$ درمخرج کسر، توان متوسط تلف شده در مقاومت را در حالت تشدید نشان میدهد. برای تعبیر عبارت صورت کسر، بخاطر آورید که در فصل دوم نشان دادیم که انرژی الکتریکی ذخیره شده در یک خازن خطی چنین است:

$$(۷-۲۲) \quad \mathcal{E}_E(t) = \frac{1}{\gamma} C v^2_C(t)$$

و انرژی مغناطیسی ذخیره شده در یک سلف خطی چنین است:

$$(۷-۲۳) \quad \mathcal{E}_M(t) = \frac{1}{\gamma} L i^2_L(t)$$

برای مدار تشدید در فرکانس ولتاژ دو سر خازن چنین است:

$$(۷-۲۴) \quad v_C(t) = \text{Re}(V e^{j\omega_0 t}) = |V| \cos(\omega_0 t + \angle V)$$

و جریان داخل سلف نیز چنین میباشد.

$$i_L(t) = \text{Re}\left(\frac{V}{j\omega_0 L} e^{j\omega_0 t}\right) = \frac{|V|}{\omega_0 L} \cos(\omega_0 t + \angle V - 90^\circ)$$

$$(۷-۲۵) \quad = \frac{|V|}{\omega_0 L} \cos(\omega_0 t + \angle V)$$

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

از معادلات (۷-۲۲) تا (۷-۲۵) انرژی کل ذخیره شده چنین است:

$$\begin{aligned} g(t) &= g_E(t) + g_M(t) \\ &= \frac{1}{2} C |V|^2 \cos^2(\omega_0 t + \angle V) + \frac{1}{2} L \frac{|V|^2}{\omega_0^2 L^2} \sin^2(\omega_0 t + \angle V) \end{aligned}$$

چون $\omega_0 = \frac{1}{LC}$ است، بدست می‌آوریم:

$$(۷-۲۶) \quad g(t) = \frac{1}{4} C |V|^2$$

بنابراین، درحالت تشدید انرژی کل ذخیره شده «ثابت» است، یعنی انرژی کل ذخیره شده $g(t)$ به t بستگی ندارد. از معادله (۷-۲۱)، Q را میتوان چنین تعبیر کرد: «درحالت تشدید»:

$$(۷-۲۷) \quad Q = \omega_0 \frac{\text{انرژی ذخیره شده}}{\text{توان متوسط تلف شده در مقاومت}}$$

این فرمول برای مدار RLC سری در حالت تشدید نیز برقرار می‌باشد.

تمرین - نشان دهید که برای مدار RLC موازی، درحالت تشدید:

$$(۷-۲۸) \quad Q = 2\pi \frac{\text{انرژی ذخیره شده}}{\text{انرژی تلف شده در یک سیکل}}$$

توجه کنید که درحالت تشدید، پریود تمام شکل موجها $\frac{2\pi}{\omega_0}$ ثانیه است.

۸- نرمالیزه کردن امپدانس و فرکانس

مدارهای تشدید که در بخش ۶ بررسی کردیم دارای سه پارامتر یعنی مقاومت، اندوکتانس و ظرفیت می‌باشند. این چنین مدارهای تشدید معمولاً بعنوان فیلتر مورد استفاده قرار می‌گیرند. یک نمونه مسأله طرح ممکن است بصورت زیر باشد: یک مدار تشدید سری طرح کنید که دارای سطح امپدانس Z_0 (یعنی، امپدانس درحالت تشدید)، فرکانس تشدید ω_0 و پهنای باند $2-dB$ باشد که در آن Z_0 ، ω_0 و $\Delta\omega$ مقادیر عددی تعیین شده هستند. برای نوشتن روابط بین اقلام تعیین شده و مقادیر اجزاء R و L و C برای مدار تشدید سری از جدول (۷-۱) استفاده می‌کنیم و بدست می‌آوریم:

$$(۱-۸ \text{ الف}) \quad Z_0 = R = \text{سطح امپدانس}$$

$$(۱-۸ \text{ ب}) \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \text{فرکانس زاویه‌ای تشدید}$$

$$(۱-۸ \text{ پ}) \quad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} = \text{پهنای باند } 3\text{-db}$$

برای پیدا کردن L ، $(۱-۸ \text{ پ})$ را بکار برده و بدست می‌آوریم:

$$(۲-۸ \text{ الف}) \quad L = \frac{R}{\Delta\omega}$$

برای پیدا کردن C ، $(۱-۸ \text{ ب})$ را بکار برده و بدست می‌آوریم:

$$(۲-۸ \text{ ب}) \quad C = \frac{\Delta\omega}{\omega_0^2 R}$$

روش دیگری برای طرح وجود دارد که معمولاً طراحان مجرب آنرا ترجیح می‌دهند. این روش با طرح یک مدار تشدید سری «نرمالیزه»^(۱)، یعنی یک مدار تشدید سری با یک سطح امپدانس مساوی ۱ اهم، یک فرکانس تشدید زاویه‌ای مساوی ۱ رادیان بر ثانیه و پهنای باند کسری زیر شروع میشود:

$$(۳-۸) \quad \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$$

گیریم L_0 ، R_0 و C_0 مقادیر اجزاء مدار نرمالیزه باشند. از معادلات $(۱-۸ \text{ الف})$ و $(۲-۸)$ داریم:

$$(۴-۸) \quad R_0 = 1, \quad L_0 = Q, \quad C_0 = \frac{1}{Q}$$

برای بدست آوردن مقادیر اجزاء مدار مورد نظر بایستی دو تصحیح انجام گیرد. ابتدا سطح امپدانس را به Z_0 میرسانیم و آنگاه فرکانس تشدید را به ω_0 تغییر می‌دهیم. میتوان نشان

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

داد که مقاومت مطلوب با ضرب R_0 در Z_0 ، اندوکتانس با ضرب L_0 در $\frac{Z_0}{\omega_0}$ و ظرفیت

مطلوب با ضرب C_0 در $\frac{1}{Z_0\omega_0}$ بدست می‌آید. بالاخره خواهیم داشت:

$$(الف \text{ - } ۵) \quad R = Z_0$$

$$(ب \text{ - } ۵) \quad L = \frac{Q Z_0}{\omega_0} = \frac{Z_0}{\Delta \omega}$$

$$(پ \text{ - } ۵) \quad C = \frac{1}{Q \omega_0 Z_0} = \frac{\Delta \omega}{Z_0 \omega_0^2}$$

البته، نتایج نهایی با معادلات (۱-۸) و (۲-۸) توافقی دارند.

برای عمومیت طرح‌های نرمالیزه دو دلیل وجود دارد. اول اینکه هرگاه مهندسی در بایگانی^(۱) خود طرح نرمالیزه یک فیلتر میان‌گذر را داشته باشد (با مشخصات مطلوب خاص)، او در حقیقت مقادیر اجزاء را برای هر فیلتر میان‌گذری از این نوع با هر سطح امپدانس دلخواه و با هر فرکانس میانی دلخواه به‌سبب سهولت در اختیار دارد. دلیل دوم ساده بودن محاسبات عددی است زیرا جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعدادی که اندازه آنها کسری از واحد است بسیار ساده‌تر می‌باشند. بعلاوه خطاهای ناشی از روند کردن^(۲) اعداد که همیشه در محاسبات اتفاق می‌افتند بسیار کم اهمیت‌تر خواهند بود. مدارهایی که در عمل با آنها برخورد می‌کنیم اغلب دارای مقاومت‌هایی در حدود چند صد اهم، ظرفیت‌هایی در حدود چند پیکوفاراد و اندوکتانس‌هایی در حدود چند میکروهنری و فرکانس‌هایی در حدود مگاهرتز هستند. میتوان نشان داد که در نتیجه نرمالیزاسیون امپدانس و فرکانس، این مقادیر اجزاء به‌حدود مقدار واحد رسیده و بنابراین محاسبات طولانی و خسته‌کننده نسبتاً ساده‌تر میشوند.

اکنون می‌خواهیم قاعده عمومی را که با اعمال آن میتوان مقادیر اجزاء R و L و C مطلوب یک شبکه دلخواه را از روی مقادیر اجزاء نرمالیزه R_0 ، L_0 و C_0 شبکه نرمالیزه بدست آورد بیان کنیم. گیریم r_n ضریب نرمالیزاسیون امپدانس باشد و یا عبارت دقیق‌تر گیریم:

$$r_n \triangleq \frac{\text{سطح امپدانس مطلوب}}{\text{سطح امپدانس طرح نرمالیزه شده}}$$

و گیریم Ω_n ضریب نرمالیزاسیون فرکانس باشد و با عبارت دقیقتر گیریم:

$$\Omega_n \triangleq \frac{\text{فرکانس نمونه مطلوب}}{\text{فرکانس نمونه طرح نرمالیزه شده}}$$

در اینصورت، مقادیر اجزاء مطلوب چنین داده میشوند:

$$(۶-۸ الف) \quad R = r_n R_0$$

$$(۶-۸ ب) \quad L = \frac{r_n}{\Omega_n} L_0$$

$$(۶-۸ پ) \quad C = \frac{C_0}{r_n \Omega_n}$$

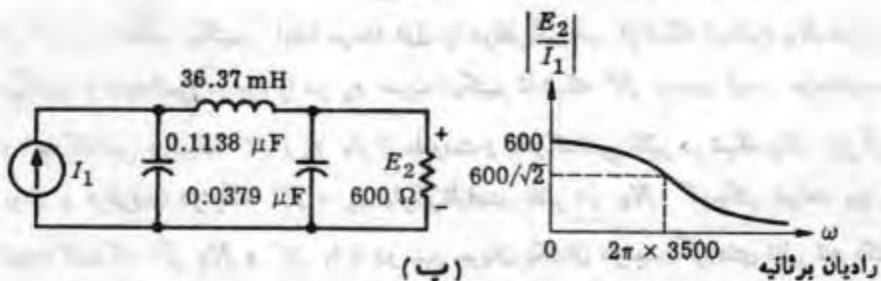
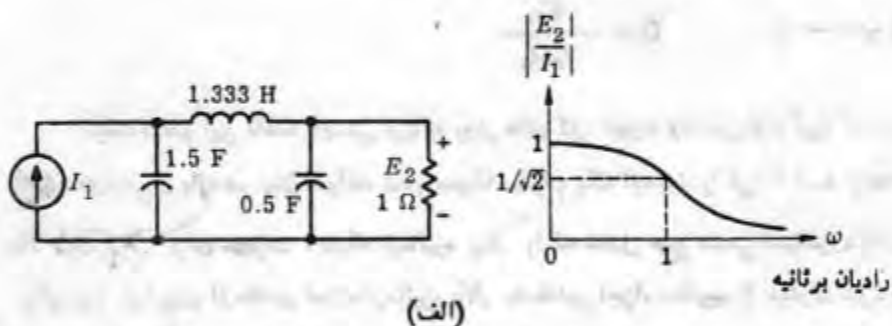
اثبات منظم این قاعده بایستی برپایه روش های کلی تجزیه و تحلیل قرار گیرد که در فصل های دهم و یازدهم بیان خواهد شد. معهذّا میتوان یک توجیه ادراکی^(۱) از سه رابطه بالا بیان کرد. برای سهولت، شبکه نرمالیزه N_0 را که شامل هیچ منبعی نمیباشد در نظر میگیریم. پیشروی از مقادیر اجزاء نرمالیزه N_0 به مقادیر اجزاء مطلوب را میتوان در دو مرحله انجام داد. در مرحله اول، سطح امپدانس را میزان میکنیم و در مرحله دوم مقیاس فرکانس را تنظیم میکنیم. ابتدا مرحله اول را در نظر بگیرید. از شبکه نرمالیزه N_0 شروع میکنیم و امپدانس هر جزء را در r_n ضرب میکنیم تا شبکه N' بدست آید. هر مقاومت و اندوکتانس در شبکه N' ، r_n بار از مقاومت و اندوکتانس نظیر در شبکه N_0 بزرگتر بوده و هر ظرفیت در شبکه N' ، r_n بار از ظرفیت نظیر در N_0 کوچکتر خواهد بود. توجه کنید که اگر N_0 و N' را با دو منبع جریان یکسان در جفت گره های نظیر تحریک کنیم آنگاه ولتاژ گره های N' مساوی r_n برابر ولتاژ گره های نظیر در N_0 خواهد بود. مرحله دوم میزان کردن فرکانس میباشد. شبکه N'' از تقسیم تمام اندوکتانس ها

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

و ظرفیت‌های شبکه N' بر Ω_n بدست می‌آید. توجه کنید که امپدانس هر شاخه شبکه N'' در فرکانس ω'' هنوز مساوی r_n برابر امپدانس شاخه نظیر شبکه N_0 در فرکانس ω' می‌باشد که در آن $\frac{\omega''}{\omega'} = \Omega_n$ است. بنابراین هرگاه دو شبکه N'' و N_0 در جفت‌گره‌های نظیر، به ترتیب با دو منبع جریان سینوسی با فرکانس‌های ω'' و ω' تحریک شوند و اگر هر دو شبکه در حالت دائمی سینوسی باشند، آنگاه هرولتاژ جفت‌گره N'' با فازوری نمایش داده می‌شود که مساوی r_n برابر فازوری نمایش دهنده ولتاژ جفت‌گره نظیر در شبکه N_0 است.

مثال - شکل (۱ - ۸) یک فیلتر پائین‌گذری^(۱) را نشان می‌دهد که امپدانس

انتقالی^(۲) آن که با $\frac{E_2(j\omega)}{I_1(j\omega)}$ تعریف می‌شود چنانست که :



شکل ۸-۱ - فیلتر پائین‌گذر که نرمالیزاسیون امپدانس و فرکانس را مشخص می‌کند.

(الف) طرح نرمالیزه شده (ب) طرح واقعی

$$\left| \frac{E_r}{I_1} \right|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2}$$

بعبارت دیگر، ضریب تقویت فیلتر یعنی $\left| \frac{E_r}{I_1} \right|$ در $\omega = 0$ برابر یک و در $\omega = 1$ برابر

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ بوده و هنگامیکه $\omega \rightarrow \infty$ ، بطوریکه ناوخت بسمت صفر میل میکند. بهمین دلیل مدار

یک فیلتر پائین گذر نامیده میشود. از روی شکل واضح است که امپدانس ورودی فیلتر (در $\omega = 0$) برابر ۱ اهم است زیرا درحقیقت در فرکانس صفر امپدانس خازن‌ها بینهایت بوده (مدار باز) و امپدانس سلف‌ها صفر است (مدار اتصال کوتاه). فرض کنید می‌خواهیم

در فرکانس ۳۰ kHz سطح امپدانس برابر ۶۰۰ اهم و $\left| \frac{E_r}{I_1} \right|$ را مساوی $\frac{1}{\sqrt{2}}$

داشته باشیم. در اینصورت $r_n = 600$ و $\Omega_n = 2\pi \times 300 \times 10^3 = 2\pi \times 300 \times 10^3$ خواهد بود. مقادیر اجزاء مطلوب به‌سبب از معادله (۶-۸) بدست می‌آیند. فیلتر مطلوب و پاسخ آن در شکل (۱-۸ ب) نشان داده شده است.

با بیان نرمالیزاسیون امپدانس، اولین مطالعه خود را درباره حالت دائمی سینوسی کامل کرده‌ایم. در فصل‌های بعد مرتباً از روش‌های این فصل استفاده کرده و خواص توابع مدار را بررسی خواهیم کرد.

خلاصه

● یک شکل موج سینوسی (با فرکانس زاویه‌ای ω)

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \Phi)$$

را میتوان با یک فازور نمایش داد:

$$A \triangleq A_m e^{j\Phi}$$

که مطابق آن:

$$x(t) = \text{Re}(A e^{j\omega t}) = \text{Re}(A_m e^{j(\omega t + \Phi)})$$

● بالعکس، با داشتن فازور $A = A_m e^{j\Phi}$ و فرکانس زاویه‌ای ω ، میتوان شکل موج سینوسی $x(t)$ را بطور یکتا تعیین نمود. بنابراین:

$$x(t) = \operatorname{Re}(A e^{j\omega t}) \\ = A_m \cos(\omega t + \Phi)$$

● برای مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان، اگر تمام فرکانس‌های طبیعی در نیمه بازچپ صفحه فرکانس مختلط واقع باشند، گویند که مدار پایدار مجانبی است.

● برای مدارهای خطی تغییرناپذیر با زمان پایدار مجانبی، پاسخ حالت دائمی سینوسی با پاسخ مدار به یک ورودی سینوسی وقتی $t \rightarrow \infty$ تعریف میشود. حالت دائمی سینوسی به حالت اولیه مدار بستگی ندارد. پاسخ حالت دائمی سینوسی همان فرکانس سینوسی ورودی را داراست.

● تابع شبکه برای یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان در حالت دائمی سینوسی با نسبت «فازور خروجی» به «فازور ورودی» تعریف میشود.

● امپدانس نقطه تحریک Z یک شبکه یک قطبی با اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان، عبارت از تابع شبکه نظیر برای یک ورودی منبع جریان و پاسخ ولتاژ میباشد و بنابراین مساوی نسبت فازور ولتاژ خروجی به فازور منبع جریان است.

● ادمیتانس نقطه تحریک Y یک شبکه یک قطبی با اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان، عبارت از تابع شبکه نظیر برای یک ورودی منبع ولتاژ و پاسخ جریان میباشد و بنابراین مساوی نسبت فازور جریان خروجی به فازور منبع ولتاژ است.

● ادمیتانس نقطه تحریک Y یک شبکه یک قطبی N مساوی معکوس امپدانس نقطه تحریک Z شبکه N خواهد بود.

● امپدانس‌ها و ادمیتانس‌های نقطه تحریک برای اجزاء اصلی مدار چنین است:

	$Z(j\omega)$	$Y(j\omega)$
مقاومت	R	G
سلف	$j\omega L$	$\frac{1}{j\omega L}$
خازن	$\frac{1}{j\omega C}$	$j\omega C$

● «امپدانس» یک اتصال «سری» از شبکه‌های یک قطبی، مساوی مجموع امپدانس‌های تک‌تک شبکه‌های یک قطبی می‌باشد. «ادمیتانس» یک اتصال «موازی» از شبکه‌های یک قطبی مساوی مجموع ادمیتانس‌های تک‌تک شبکه‌های یک قطبی است.

● با داشتن تابع شبکه $H(j\omega) = \frac{V_0}{I_s}$ ، اگر ورودی شکل موج سینوسی

$$i_s(t) = |I_s| \cos(\omega t + \Phi)$$

باشد آنگاه پاسخ حالت دائمی سینوسی چنین است:

$$v_0(t) = |H(j\omega)| |I_s| \cos[\omega t + \Phi + \angle H(j\omega)]$$

یعنی، دامنه خروجی از ضرب کردن دامنه ورودی در اندازه تابع شبکه بدست می‌آید و فاز خروجی از اضافه کردن فاز تابع شبکه به فاز ورودی بدست می‌آید.

● برای ورودی و خروجی مشخص متغیرهای اندازه و فاز برحسب ω را پاسخ فرکانس یک مدار گویند.

● در حالت دائمی سینوسی، اگر ولتاژ قطب و جریان قطب یک شبکه یک قطبی N

چنین باشند:

$$v(t) = \text{Re}(V e^{j\omega t})$$

$$i(t) = \text{Re}(I e^{j\omega t})$$

آنگاه توان «متوسط» تحویل داده شده به شبکه یک قطبی چنین است:

$$P_{av} = \frac{1}{T} \int_0^T |V| |I| \cos(\angle V - \angle I) dt$$

$$= \frac{1}{T} \text{Re}(VI)$$

$$= \frac{1}{T} |I|^2 \text{Re}[Z(j\omega)]$$

$$= \frac{1}{T} |V|^2 \text{Re}[Y(j\omega)]$$

که در آن $Z(j\omega)$ و $Y(j\omega)$ به ترتیب امپدانس و ادمیتانس نقطه تحریک شبکه N می‌باشند.

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

● در یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان در حالت دائمی، توان «متوسط» کل که توسط چند منبع سینوسی با فرکانس‌های «متفاوت» بآن تحویل داده می‌شود مساوی مجموع توانهای متوسطی است که هر منبع اگر به تنهایی مدار را تحریک می‌کرد بآن تحویل میداد.

مسائل

۱- نمایش‌های فازوری فازورهای را که نشان دهنده توابع زمانی با مقدار حقیقی زیر می‌باشند، تعیین کنید:

$$10 \cos(2t + 30^\circ) + 5 \sin 2t \quad (\text{الف})$$

$$\sin(2t - 90^\circ) + \cos(2t + 15^\circ) \quad (\text{ب})$$

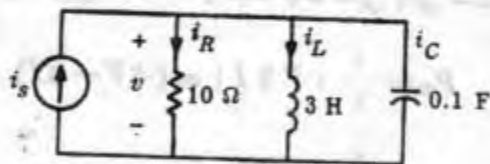
$$\cos t + \cos(t + 30^\circ) + \cos(t + 60^\circ) \quad (\text{پ})$$

۲- محاسبه فازوری مدار خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (مسئله ۲-۷) در حالت دائمی سینوسی است:

(الف) فازورهای نشان دهنده توابع سینوسی از زمان زیر را محاسبه کنید:

$$v(t), i_C(t), i_R(t), i_L(t), i_1(t), I_1, I_L, I_R, I_C \text{ و } V.$$

(ب) - عبارتهایی برای توابع زمانی با مقدار حقیقی $i_R(t), i_L(t), i_1(t), i_C(t)$ و $v(t)$ بنویسید و آنها را با مقیاس مناسب رسم کنید:



$$i_s(t) = 10 \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$$

شکل (مسئله ۲-۷)

۳- مقاومت غیرخطی و هارمونیکها گهریم v ولتاژ دوسریک مقاومت

غیرخطی با مشخصه زیر باشد:

$$v = 5 \cdot i^2$$

۴۴۵

تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

وقتی یک جریان $i = 0.1 \cos 377t$ از داخل مقاومت غیرخطی میگذرد ولتاژ v را حساب کنید (نتیجه را بر حسب مجموع سینوسی‌ها بیان کنید). چه فرکانس‌هایی در خروجی وجود دارند؟

۴ - خازن غیرخطی و هارمونیک‌های فرعی مدار غیرخطی تغییرناپذیر با زمان مولد هارمونیک فرعی (۱) را که در شکل (مسئله ۴ - v) نشان داده شده است در نظر بگیرید. سلف خطی بوده و خازن دارای مشخصه زیر است:

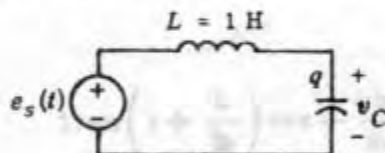
$$v_c = \frac{1}{18} q + \frac{2}{27} q^3$$

(الف) - تحقیق کنید که برای یک ورودی $e_s = \frac{1}{54} \cos t$ ولت، یک پاسخ بصورت

$$q(t) = \cos\left(\frac{t}{3}\right)$$

«یک سوم» فرکانس منبع صورت میگیرد.

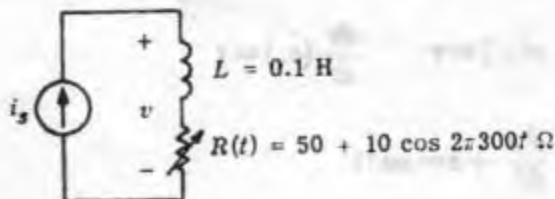
(ب) - برای بار بدست آمده در قسمت (الف) جریان درون منبع را محاسبه کنید.



شکل (مسئله ۴ - v)

۵ - مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان مدار خطی تغییرپذیر با زمان نشان

داده شده در شکل (مسئله ۵ - v) را در نظر بگیرید. وقتی جریان:



شکل (مسئله ۵ - v)

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$i_s(t) = 10^{-2} \cos \left[2\pi 60 t + \left(\frac{\pi}{6} \right) \right]$$

آمپر از مدار عبور میکند و تناژ v را معاینه کنید (نتیجه را برحسب مجموع سینوسی‌ها بیان کنید).

۶- فازورها و معادلات دیفرانسیل جوابهای حالت دائمی معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 10x = \cos(2t + 45^\circ) \quad (\text{الف})$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 6 \frac{dx}{dt} + 11x = \sin 2t \quad (\text{ب})$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4 \frac{dx}{dt} + x = \left(\frac{d}{dt} + 1 \right) \cos 2t \quad (\text{پ})$$

۷- معادلات دیفرانسیل، جواب کامل و جواب حالت دائمی جواب کامل معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید. نشان دهید که آیا جواب حالت دائمی برای هر مورد وجود دارد.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = \left(\frac{d}{dt} + 1 \right) \cos 2t \quad (\text{الف})$$

$$x(0_-) = 1 \quad \frac{dx}{dt}(0_-) = -1$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + x = \sin 2t \quad (\text{ب})$$

$$x(0_-) = 1 \quad \frac{dx}{dt}(0_-) = 2$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \cos 2t \quad (\text{پ})$$

$$x(0_-) = 1 \quad \frac{dx}{dt}(0_-) = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + x = \cos t \quad (ت)$$

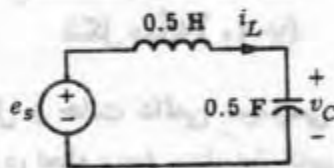
$$x(0_-) = 1 \quad \frac{dx}{dt}(0_-) = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dx}{dt} + 2x = \cos t \quad (ث)$$

$$x(0_-) = 1 \quad \frac{dx}{dt}(0_-) = -1$$

۸- فرکانس‌های طبیعی انگاری و پاسخ حالت دائمی مدار نشان داده

شده در شکل (مسئله ۸-۷) از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است. ورودی e_s و پاسخ مدار v_C میباشد. با دانستن اینکه $e_s(t) = \sin 2t$ ولت و در لحظه $t=0$ ، حالت مدار $i_L = 2$ آمپر و $v_C = 1$ ولت است. پاسخ کامل را محاسبه کنید.



شکل (مسئله ۸-۷)

۹- امپدانس نقطه تحریک مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۹-۷)

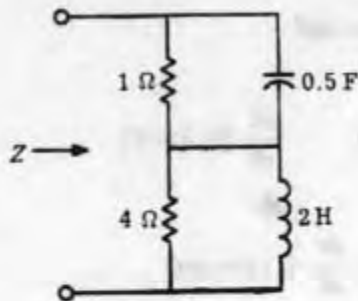
دارای اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان است.

(الف) - امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ را تعیین کنید.

(ب) - مقادیر امپدانس را برای $\omega = 1$ و $\omega = 0$ رادیان بر ثانیه حساب کنید

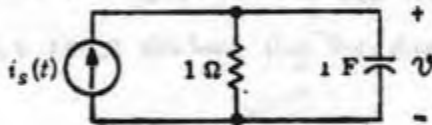
(امپدانس را برحسب اندازه و زاویه مشخص کنید).

(پ) - با استدلال فیزیکی مقادیر امپدانس در $\omega = 0$ و $\omega = \infty$ را توضیح دهید.



شکل (مسئله ۹-۷)

۱۰- جمع آثار در حالت دائمی برای مدار شکل (مسئله ۱۰-۷)، با دانستن اینکه برای تمام مقادیر t ، $i_s(t) = 1 + 2\cos 2t$ می‌باشد، ولتاژ حالت دائمی v را تعیین کنید.



شکل مسئله (۱۰-۷)

۱۱- پاسخ کامل و حالت دائمی سینوسی گیریم یک ولتاژ سینوسی $e_s(t) = 3\cos 10^6 t$ ولت در لحظه $t=0$ به مدار خطی تغییرناپذیر با زمان LC نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۱-۷) اعمال شود.

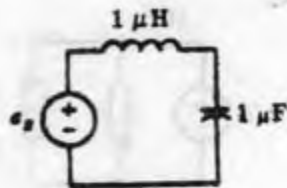
الف- با دانستن $i(0) = 1\text{mA}$ و $v(0) = 0$ ، برای $t \geq 0$ ، $i(t)$ را محاسبه و رسم کنید.

ب- فرض کنید که ما کنترل فاز Φ مولد ولتاژ e_s را داشته باشیم یعنی فرض کنید:

$$e_s(t) = 3\cos(10^6 t + \Phi)$$

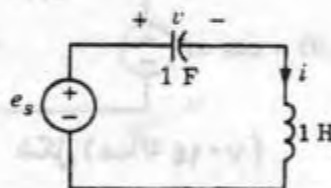
مقدار مناسب Φ را اگر وجود داشته باشد چنان پیدا کنید که پاسخ بصورت زیر باشد:

$$i(t) = 10^{-3}\cos 10^6 t + A\sin 10^6 t$$



شکل (مسئله ۱۱-۷)

۱۲- مدار بی اتلاف و پاسخ حالت دائمی مدار خطی تغییرناپذیر با زمان LC سری نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۲-۷) را که در آن ورودی سینوسی $e_s(t) = E_m \cos(t + \Phi)$ میباشد در نظر بگیرید. معادله دیفرانسیلی برای $v(t)$ را تشکیل داده و نشان دهید که ولتاژ v بصورت $v(t) = \text{Re}(V e^{j\omega t})$ نمایش داده شده در آن فازور نمایش دهنده $v(t)$ است توضیح دهید.



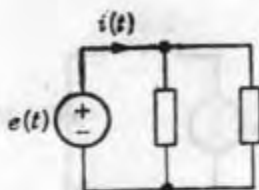
شکل (مسئله ۱۲-۷)

۱۳- پاسخ حالت دائمی سینوسی برای تمام مقادیر t ولتاژ و جریان زیر داده شده‌اند.

$$e(t) = 0.01 \sin\left(10^3 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$i(t) = 0.001 \cos\left(10^3 t + \frac{\pi}{6}\right)$$

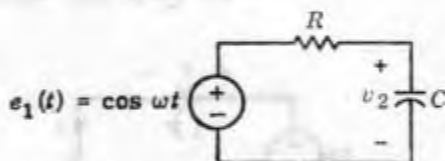
اجزاء مناسب مدار خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۳-۷) را پیدا کرده و مقادیر آنها را برحسب اهم، هانری و فاراد مشخص سازید.



شکل (مسأله ۱۳-۷)

۱۴- تابع شبکه و پاسخ حالت دائمی مدار نشان داده شده در شکل (مسأله

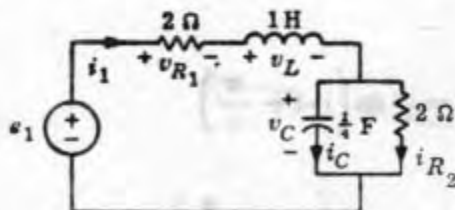
۱۴-۷) خطی و تغییرناپذیر با زمان بوده و در حالت دائمی سینوسی است. فرکانس ω که در آن $v_r(t)$ نسبت به $e_1(t)$ ، 45° عقب میافتد، بر حسب مقادیر R و C پیدا کنید. دامنه $v_r(t)$ را در آن فرکانس بدست آورید.



شکل (مسأله ۱۴-۷)

۱۵- دیانگرام فازوری با فرض $v_C(t) = \cos 2t$ ، یک دیانگرام فازوری بسازید

که تمام ولتاژها و جریانهای مشخص شده در شکل (مسأله ۱۵-۷) را نشان دهد. ولتاژ حالت دائمی $e_1(t)$ را پیدا کنید. (آنها بصورت تابعی حقیقی از زمان نشان دهید).

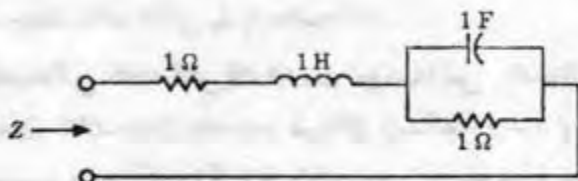


شکل (مسأله ۱۵-۷)

۱۶- اتصال سری امپدانسها امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ مدار نشان

داده شده در شکل (مسأله ۱۶-۷) را تعیین کنید. اگر یک منبع ولتاژ سینوسی

$v_s(t) = 10 \cos 2t$ به یک شبکه یک قطبی اعمال شود، جریان قطب را در حالت دائمی سینوسی تعیین کنید.



شکل (مسئله ۱۶-۷)

۱۷- پاسخ فرکانس اندازه و فاز امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ مدار شکل

(مسئله ۱۶-۷) را بر حسب ω رسم کنید. اگر منبع جریان $i_s(t) = 1 + \cos t + \cos 2t$ به شبکه یک قطبی اعمال شود، ولتاژ حالت دائمی قطب را پیدا کنید.

۱۸- مکان‌های امپدانس و ادمیتانس جزء‌های حقیقی و انکاری امپدانس

$Z(j\omega)$ مدار شکل (مسئله ۱۶-۷) را تعیین کنید. سوپرتانس را بصورت تابعی از ω تعیین نموده و رسم کنید. مکان امپدانس و مکان ادمیتانس شبکه یک قطبی را رسم نمایید.

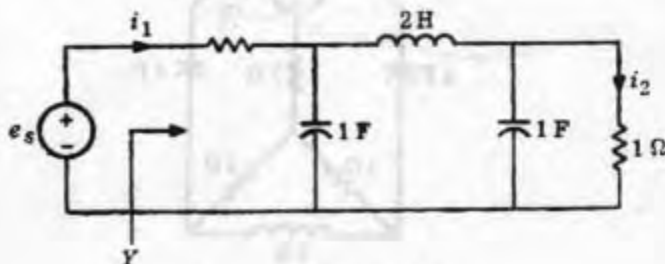
۱۹- مدار نردبانی و توابع شبکه برای مدار نردبانی نشان داده شده در

شکل (مسئله ۱۹-۷):

(الف) - ادمیتانس نقطه تحریک $Y(j\omega)$ را تعیین کنید.

(ب) جریان حالت دائمی i_1 ، ناشی از منبع ولتاژ سینوسی $e_s(t) = 2 \cos 2t$ را

محاسبه کنید.



شکل (مسئله ۱۹-۷)

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

(پ) - ادمیتانس انتقالی $Y_{r1}(j\omega) = \frac{I_r}{E_s}$ را که در آن E_s و I_r به ترتیب

فازورهای نشان دهنده جریان سینوسی i_r و ولتاژ سینوسی e_s میباشند تعیین کنید.

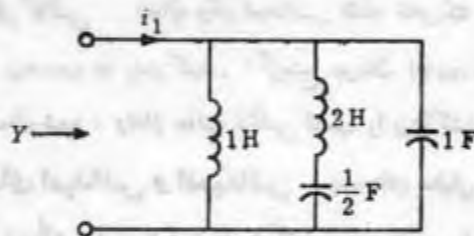
(ت) - جریان حالت دائمی i_r را محاسبه کنید.

۲۰- ادمیتانس نقطه تحریک و رسم سوپرتانس ادمیتانس نقطه تحریک

$Y(j\omega)$ مدار بدون اتلاف نشان داده شده در شکل (مسأله ۲۰-۷) را تعیین کنید.

سوپرتانس را برحسب ω رسم کنید اگر منبع ولتاژ سینوسی $e_s = \cos \omega t$ به شبکه یک قطبی

اعمال شود، درباره جریان i_r در $\omega = 0, 1, 2, \infty$ چه می‌توانید بگوئید؟

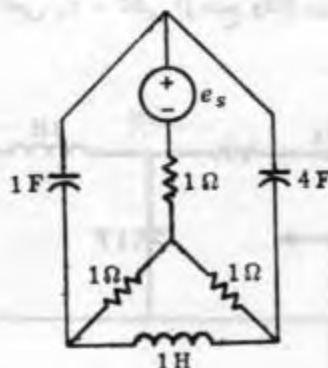


شکل (مسأله ۲۰-۷)

۲۱- مدار دو گان مدار دو گان مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۲۱-۷)

را تعیین کنید.

۲۲- تجزیه و تحلیل مش برای مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۲۲-۷)



شکل (مسأله ۲۲-۷)

۴۵۳

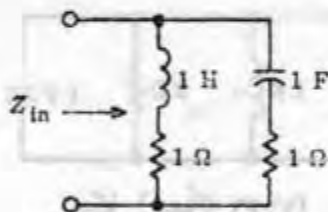
تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

جریان حالت دائمی سینوسی در سلف و ولتاژ حالت دائمی سینوسی در دوسرخازن ۱ فارادی را تعیین کنید. منبع ولتاژ ورودی $e_s(t) = \cos 2t$ می باشد.

۲۳- تجزیه و تحلیل گره اتصال سری منبع ولتاژ و مقاومت شکل (مسأله ۲۲-۷) را به اتصال موازی یک منبع جریان و مقاومت تبدیل کنید. با استفاده از تجزیه و تحلیل گره، جریان حالت دائمی سینوسی در سلف و ولتاژ حالت دائمی سینوسی در دوسرخازن ۱ فارادی را بدست آورید.

۲۴- امپدانس نقطه تحریک و توان (الف) - امپدانس ورودی $Z_{in}(j\omega)$ را در فرکانس ω پیدا کنید.

(ب) - اگر ولتاژ ورودی $10 \cos \omega t$ بوده و مدار در حالت دائمی سینوسی باشد، توان لحظه‌ای ورودی به مدار (بصورت تابعی از زمان) چیست؟ (به شکل مسأله ۲۴-۷ رجوع شود).



شکل (مسأله ۲۴-۷)

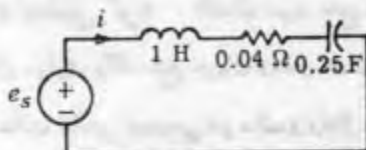
۲۵- فازور، انرژی و توان مدار RLC سری نشان داده شده در شکل (مسأله ۲۵-۷) از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است.

الف - با استفاده از روش فازوری پاسخ حالت دائمی سینوسی i را به ورودی $e_s = \sin \omega t$ ولت برای مقادیر 20.2 ، 20.4 ، و 20.0 ω رادیان بر ثانیه حساب کنید. هر نتیجه را بر حسب تابع حقیقی از زمان نشان دهید.

ب - انرژی‌های ذخیره شده در خازن E_E و در سلف E_M را بصورت توابعی از زمان برای 20.4 ، 20.2 و 20.0 ω رادیان بر ثانیه محاسبه کنید.

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

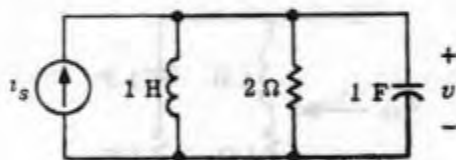
پ. توان متوسط تلف شده در مقاومت را برای 200π ، 202π ، 204π رادیان بر ثانیه حساب کنید.



شکل (مسئله ۲۵-۷)

۲۶- امپدانس، پاسخ زمانی و جمع آثار اجزاء مدار نشان داده شده در شکل

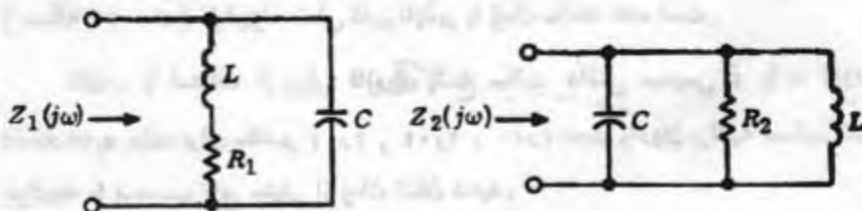
(مسئله ۲۶-۷) خطی و تغییرناپذیر با زمان هستند. با داشتن $i_s = 2 \sin t + \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$ ولتاژ حالت دائمی v را بصورت تابعی از زمان محاسبه و رسم کنید. ایده اصلی روش خود را توضیح دهید.



شکل (مسئله ۲۶-۷)

۲۷- پاسخ‌های فرکانس مدارهای تشدید شبکه‌های یک قطبی نشان داده

شده در شکل (مسئله ۲۷-۷) را در نظر بگیرید. امپدانس‌های $Z_1(j\omega)$ و $Z_2(j\omega)$



$$\begin{aligned} L &= 10^{-3} \text{ H} & R_1 &= 10 \text{ } \Omega \\ C &= 10^{-9} \text{ F} & R_2 &= 10^5 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

شکل (مسئله ۲۷-۷)

۴۵۵

تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی

را محاسبه کنید. اگر تنها فرکانس‌هایی که در فاصله بین فرکانس تشدید و دو برابر آن قرار دارند مورد نظر باشند، درباره شکل‌های نسبی منحنی‌های $|Z_1(j\omega)|$ و $|Z_2(j\omega)|$ قرار دارند مورد نظر باشند، درباره شکل‌های نسبی منحنی‌های $|Z_1(j\omega)|$ و $|Z_2(j\omega)|$ چه می‌توان گفت؟

۲۸- مدار تشدید، Q و پاسخ فرکانس شبکه یک قطبی نشان داده شده

در شکل (مسئله ۲۸-۷) از اجزاء خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده است.

(الف) - فرکانس تشدید ω_0 و مقدار Q را محاسبه کنید.

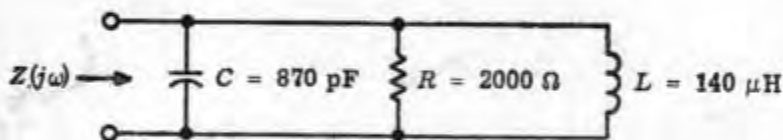
(ب) - امپدانس نقطه تحریک $Z(j\omega)$ را حساب کنید.

(پ) اندازه و زاویه فاز امپدانس را بطور تریسیمی برای این مقادیر $\frac{\omega}{\omega_0}$ محاسبه

کنید: 0 ، $1 - \frac{1}{2Q}$ ، 1 ، $1 + \frac{1}{2Q}$ ، 2 و $1 + \frac{1}{2Q}$

(ت) - از نتایج قسمت (پ) $|Z(j\omega)|$ و $\angle Z(j\omega)$ را برحسب $\frac{\omega}{\omega_0}$ رسم

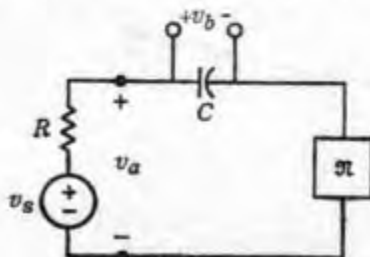
کنید.



شکل (مسئله ۲۸-۷)

۲۹- دیامگرام فازوری و توان مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۲۹-۷)

در حالت دائمی سینوسی کار میکند. مقادیر $v_a = 10 \cos(1000t + 60^\circ)$ و $v_b = 5 \cos(1000t - 30^\circ)$ تعیین شده‌اند. اندازه امپدانس خازن در این فرکانس ۱۰ است



شکل (مسئله ۲۹-۷)

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

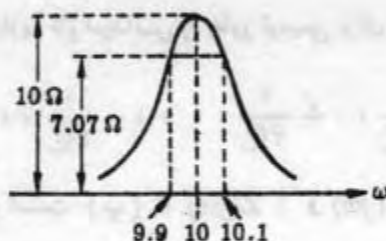
امپدانس $Z(j\omega)$ شبکه یک قطبی N و توان متوسط تحویل داده شده به N را تعیین کنید.

۳۰- پهنای باند مدار تشدید، طرح (الف) در شکل (مسئله ۳۰-۷)

منحنی تشدید $|Z(j\omega)|$ برحسب اهم نسبت به ω برحسب رادیان بر ثانیه [یک مدار RLC موازی نشان داده شده است. R و L و C را پیدا کنید.

(ب) - همین رفتار تشدید در نزدیکی‌های فرکانس مرکزی 20 kHz مورد نظر

است و حداکثر $|Z(j\omega)|$ باید $0.1 \text{ M}\Omega$ باشد. مقادیر جدید R و L و C را بدست آورید.



شکل (مسئله ۳۰-۷)





مدارهای سه فاز

هدف از این فصل نشان دادن آن است که چرا مولدها و خطوط انتقال سه فاز در مدارهای سیستم‌های قدرت به کار برده می‌شوند. دلایل متعددی موجب برتری سیستم‌های سه فاز بر سیستم‌های تک فاز می‌شود. یک دلیل مهم این است که در یک سیستم تک فاز توان لحظه‌ای تحویل داده شده به یک بار ثابت نبوده و نوسان می‌کند؛ در حالی که در یک سیستم سه فاز این نوسانات توان، به مقدار قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. دلیل مهم دیگر آن است که تولید انرژی الکتریکی به صورت سه فاز به مراتب راحت‌تر از تولید آن به صورت تک فاز است. به این دلایل و به دلایل متعدد دیگر، مدارهای سه فاز متعادل را در این فصل مختصراً مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱- ملاحظات کلی

منظور از این بخش توضیح آن است که چرا اکثر خطوط انتقال انرژی که در جاده‌های بین شهری دیده می‌شود دارای مشخصه‌های زیر است:

الف - ولتاژ بالا

ب - سه فاز (دارای سه سیم)

پ - تغذیه شده به وسیله مولدهای ac (در مقابل مولدهای dc)

کار با مولدهای جریان متناوب نسبت به مولدهای جریان دایم به مراتب راحت‌تر است، زیرا می‌توان به کمک ترانسفورماتورها، ولتاژهای ac را افزایش یا کاهش داد. به علاوه ترانسفورماتورها در فرکانس ۵۰ هرتز بسیار کارآمد بوده، عملاً نگهداری چندانی لازم ندارند. ولتاژ تولید شده در مراکز تولید نیرو در حدود ۱۰ تا ۳۰ کیلوولت است. برای مسافت‌های طولانی، این مقدار توسط ترانسفورماتورها به چندین صد کیلوولت افزایش داده می‌شود و در مراکز مصرف مانند کارخانجات، ادارات و منازل مجدداً پایین آورده می‌شود.

در انتقال نیرو از ولتاژ بالا استفاده می‌شود، زیرا اتلاف توان متوسط در یک خط با امپدانس

$P_L = \frac{1}{\gamma} R I_m^2$ برابر $R + jX$ است. توان متوسط انتقال داده شده برابر $P = \frac{1}{\gamma} V_m I_m \cos(\phi_V - \phi_I)$

است. بنابراین برای یک توان انتقال داده شده P ، می‌توان توان تلف شده به صورت حرارت در خطوط انتقال را به سادگی با حذف I_m میان دو رابطه بالا به صورت 479 زیر به دست آورد:

$$P_L = \frac{2RP^2}{V_m^2 \cos^2(\phi V - \phi I)} \quad (1-1)$$

بنابراین برای یک خط انتقال مشخص (با R معین) و برای انتقال توان داده شده (با P معین) می توان با انتخاب مقدار بزرگی برای V_m (معمولاً واحد ۷۶۵ کیلوولت) و نزدیک نگهداشتن ضریب توان $\cos(\phi V - \phi I)$ به عدد ۱، اتلاف توان را کاهش داد و بدیهی است هر چه مقدار V_m بالاتر باشد، اتلاف توان کمتر خواهد بود.

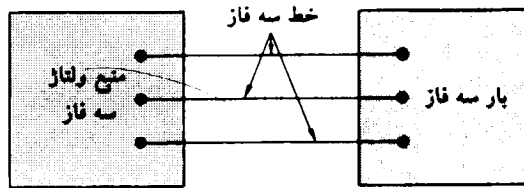
به دو دلیل اصلی، ساختن مولدهای ac در عمل راحت تر از ساختن مولدهای dc است:

- الف - سیم پیچی های ولتاژ بالا و جریان بالا روی استاتور که ثابت است، قرار می گیرند.
- ب - ولتاژ القا شده در استاتور طبعاً نوسانی است و با تغییر شکل دادن قطبها و/ یا طراحی سیم پیچی ها می توان ولتاژ القا شده را تقریباً به صورت سینوسی درآورد.
- سرانجام، مدارهای سه فاز به دلایل اقتصادی و مهندسی مورد استفاده قرار می گیرند. از جمله این دلایل عبارتند از:

- الف - تحت بار متعادل، گشتاور روی مولد ثابت است و بنابراین ارتعاشی وجود ندارد.
- ب - ایجاد میدان مغناطیسی دوار با سه فاز راحت تر است و بنابراین امکان ساختن موتورهای القایی ارزان تر فراهم می شود.
- پ - با سیستم سه فاز ac می توان در مقدار آلومینیوم خطوط انتقال صرفه جویی کرد. تحت بارهای متعادل مشاهده خواهیم کرد که به جای شش سیم فقط سه سیم مورد نیاز است.
- این سه مشاهده اخیر در بخشهای بعدی مورد بحث قرار خواهند گرفت.

۲- مدارهای سه فاز متعادل

تولید، انتقال، توزیع و مصرف حجم زیادی از انرژی الکتریکی، توسط مدارهای سه فاز صورت می گیرد. تحلیل جامع سیستم های سه فاز خود درس جداگانه ای است و نمی توان امیدوار شد که در یک فصل به طور کامل بیان شود. خوشبختانه، تنها درک رفتار حالت دایمی سینوسی مدارهای سه فاز متعادل برای مهندسی که نمی خواهند متخصص قدرت شوند، کاملاً کفایت می کند. در قسمتهای بعدی بحث، منظور خود را از مدارهای متعادل بیان خواهیم کرد. عجلتاً متذکر می شویم که به دلایلی بحث خود را به مدارهای متعادل محدود کرده ایم. نخست اینکه به دلایل اقتصادی، سیستم های سه فاز چنان طراحی می شوند که در حالت متعادل کار کنند. بدین معنی که تحت شرایط کار طبیعی، این مدارهای سه فاز به مدارهای متعادل بسیار نزدیک هستند و به دست آوردن جوابی که متعادل بودن کامل را فرض می کند قابل توجیه است. دلیل دوم اینکه، می توان مسائلی را که متضمن نوعی شرایط عملکردی نامتعادل است با روشی که به اصطلاح روش مولفه های متقارن گفته می شود حل کرد، که این امر بستگی کاملی به درک عمیق عملکرد سیستم های متعادل دارد. آنچه ما در مورد روش مولفه های متقارن بحث نخواهیم



شکل ۱-۲ مدار سه فاز اساسی.

کرد، درک عملکرد متعادل، به عنوان نقطه آغازین برای روشهای پیشرفته، در تحلیل نوع خاصی از شرایط نامتعادل به کار می‌رود.

ساختار اساسی یک سیستم سه فاز، مرکب از منابع ولتاژی است که از طریق ترانسفورماتور و خطوط انتقال به بارها وصل می‌شوند. می‌توان مسأله را به تحلیل مداری که شامل یک منبع ولتاژ وصل شده به یک بار از طریق یک خط انتقال است، تقلیل داد. حذف ترانسفورماتور به عنوان یک عنصر در سیستم، بدون آنکه درک اساسی محاسبات موجود را به مخاطره بیندازد، بحث را ساده‌تر می‌نماید. مدار اساسی در شکل (۱-۲) نشان داده شده است. برای آنکه تحلیل مداری از این نوع را آغاز کنیم باید مشخصات یک دسته از ولتاژهای سینوسی سه فاز متعادل را درک کنیم.

۱-۲ ولتاژهای سه فاز متعادل

دسته‌ای از ولتاژهای سه فاز متعادل مشتمل بر سه ولتاژ سینوسی است که دارای فرکانس و اندازه یکسانی بوده، اما دقیقاً اختلاف فازی به مقدار 120° با یکدیگر دارند. در مطالعه مدارهای سه فاز روال عادی این است که به سه فاز، با a ، b و c اشاره کنیم. همچنین فاز a اغلب به عنوان فاز مبنا به کار گرفته می‌شود. به سه ولتاژی که دسته سه فاز را تشکیل می‌دهند ولتاژ فاز a ، ولتاژ فاز b و ولتاژ فاز c گفته می‌شود.

از آنجایی که ولتاژهای فاز با یکدیگر 120° اختلاف فاز دارند، دو رابطه فازی می‌تواند میان ولتاژ فاز a و ولتاژهای فازهای b و c وجود داشته باشد. یک امکان آن است که ولتاژ فاز b به مقدار 120° از ولتاژ فاز a عقب بیفتد که در این صورت ولتاژ فاز c باید به مقدار 120° از ولتاژ فاز a جلو بیفتد. این رابطه فازی را دنباله فازی abc یا دنباله فازی مثبت گویند. تنها امکان نوع دیگر آن است که ولتاژ فاز b از ولتاژ فاز a به اندازه 120° جلو بیفتد که در این صورت ولتاژ فاز c باید به مقدار 120° از ولتاژ فاز a عقب بیفتد. این رابطه فازی را دنباله فازی acb یا دنباله فازی منفی گویند. در نمایش فازوری، دو دسته ممکن از ولتاژهای سه فاز متعادل عبارتند از:

$$V_a = V_m \angle 0^\circ$$

$$V_b = V_m \angle -120^\circ$$

$$V_c = V_m \angle +120^\circ$$

(۱-۲)

و:

$$V_a = V_m \angle 0^\circ$$

$$V_b = V_m \angle +120^\circ \quad (2-2)$$

$$V_c = V_m \angle -120^\circ$$

دنباله فازی ولتاژهای داده شده در معادلات (۱-۲) دنباله فازی abc یا مثبت می باشد. دنباله فازی ولتاژهای داده شده در معادلات (۲-۲) دنباله فازی acb یا منفی است. نمایش دیاگرام فازوری دسته ولتاژهای داده شده در معادلات (۱-۲) و (۲-۲) در شکل (۲-۲) نشان داده شده است. با حرکت روی شکل در جهت عقربه های ساعت، می توان دنباله فازی را با توجه به ترتیب زیرنویسها تعیین کرد. این حقیقت که یک مدار سه فاز می تواند یکی از دو حالت دنباله فازی را داشته باشد، مشخصه مهمی است که وقتی دو مدار جداگانه، به طور موازی به هم وصل می شوند باید در نظر گرفته شود.

مشخصه مهم دیگر یک دسته ولتاژ سه فاز متعادل این است که مجموع ولتاژها برابر صفر است.

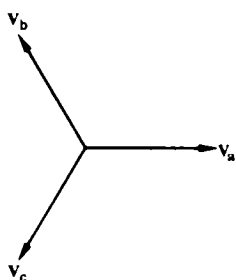
بنابراین با به کار بردن معادلات (۱-۲) یا (۲-۲) داریم:

$$V_a + V_b + V_c = 0 \quad (3-2)$$

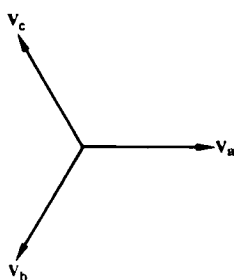
به دلیل این که مجموع فازورهای ولتاژها برابر صفر است، مجموع ولتاژهای لحظه ای نیز برابر صفر است. یعنی:

$$v_a + v_b + v_c = 0 \quad (4-2)$$

مشاهده قابل توجه دیگر این است که اگر ما دنباله فازی و یکی از ولتاژهای دسته را بدانیم، تمام ولتاژهای دسته را می دانیم. بنابراین در یک سیستم سه فاز متعادل، می توان بر روی محاسبه ولتاژ (یا جریان) یک فاز تمرکز نمود. زیرا هنگامی که کمیت یک فاز را بدانیم، به طور خودکار کمیت متناظر را در دو فاز دیگر می دانیم.



(ب)



(الف)

شکل ۲-۲. دیاگرام فازوری یک دسته ولتاژهای سه فاز متعادل: (الف) دنباله abc

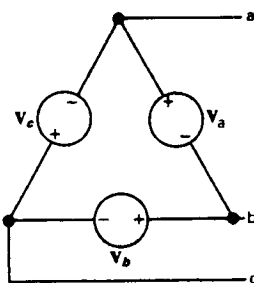
یا دنباله مثبت؛ (ب) دنباله acb یا دنباله منفی.

۲-۲ منابع ولتاژ سه فاز

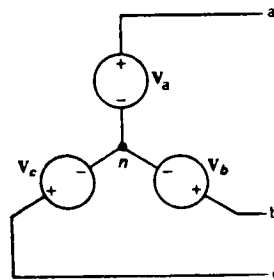
منابع ولتاژ سه فاز مرکب از مولدهایی است که سیم پیچی جداگانه توزیع شده بر روی اطراف استاتور دارند. هر سیم پیچ یک فاز مولد را تشکیل می دهد. روتور مولد، یک آهن ربای الکتریکی است که با سرعت همزمان توسط یک گرداننده اصلی مانند توربین بخار یا گازی چرخانده می شود. وقتی که آهن ربای الکتریکی ضمن دوران از مقابل سر سیم پیچ می گذرد، یک ولتاژ سینوسی در هر سیم پیچ القا می شود. سیم پیچ های فاز چنان طراحی شده اند که ولتاژ سینوسی القا شده در آنها از لحاظ اندازه یکسان بوده و دقیقاً اختلاف فازی به مقدار 120° دارند. چون سیم پیچ های فاز در مقابل آهن ربای الکتریکی دوار ساکن هستند، فرکانس ولتاژ القا شده در هر سیم پیچ یکسان است.

معمولاً امپدانس هر سیم پیچ فاز در یک مولد سه فاز، در مقایسه با سایر امپدانس های موجود در مدار بسیار کوچک است. از این رو هر سیم پیچ فاز را می توان در یک مدار الکتریکی به طور تقریبی به صورت یک منبع ولتاژ سینوسی ایده آل، مدل سازی نمود. برای تشکیل منبع سه فاز دو راه برای به هم پیوستن سیم پیچ های فاز جداگانه وجود دارد. سیم پیچها را می توان یا به صورت اتصال ستاره یا وی (Y) یا به صورت اتصال مثلث یا دلتا (Δ) به هم وصل کرد. اتصالات Y و Δ در شکل (۲-۳) نشان داده شده است، که در آن برای مدل سازی سیم پیچ های فاز یک مولد سه فاز، از منابع ولتاژ ایده آل استفاده شده است. گره مشترک در اتصال منابع به صورت Y در شکل (۲-۳ الف) با n علامت گذاری شده است و به عنوان سر ختنی منبع گفته می شود. برای اتصالات خارجی ممکن است سر ختنی در دسترس باشد یا نباشد.

اگر امپدانس هر سیم پیچ فاز قابل صرف نظر نباشد، منبع سه فاز با اضافه کردن امپدانس سیم پیچ به طور سری با منابع ولتاژ سینوسی ایده آل، مدل سازی می شود. از آنجایی که تمام سیم پیچ های ماشین ساختمان یکسانی دارند، فرض می کنیم که امپدانس سیم پیچ ها یکسان باشد. امپدانس سیم پیچ مولدهای سه فاز القایی است. مدل یک منبع سه فاز شامل امپدانس های سیم پیچ در شکل (۲-۴) نشان داده شده است که در آن R_w مقاومت سیم پیچ و X_w راکتانس القایی سیم پیچ است.



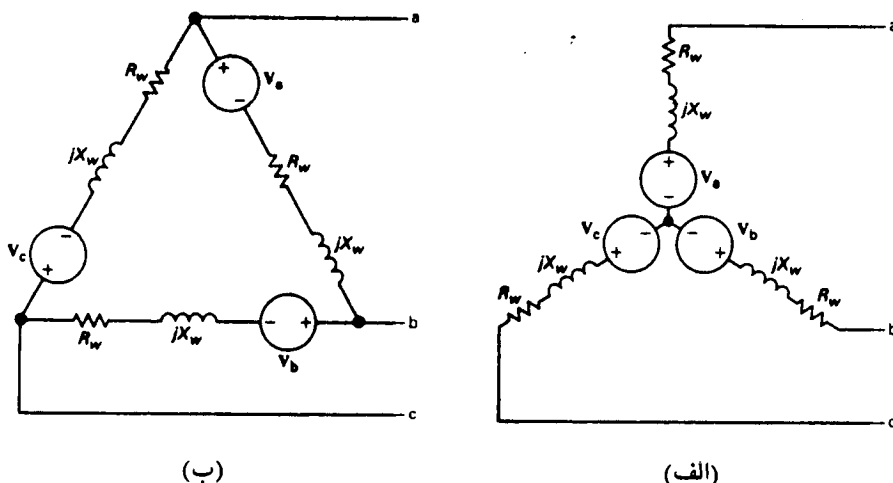
(ب)



(الف)

شکل ۲-۳ دو اتصال اصلی منابع ولتاژ سه فاز ایده آل: (الف) منبع وصل شده به صورت Y؛

(ب) منبع وصل شده به صورت Δ



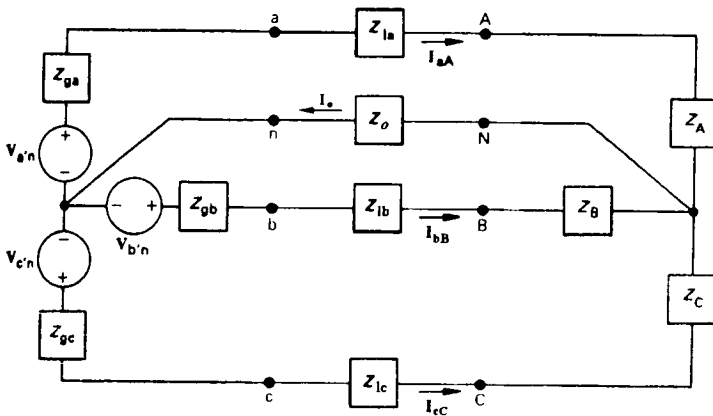
شکل ۲-۴ مدلی از یک منبع سه فاز با امپدانس های سیم پیچی: (الف) منبع وصل شده به صورت Y؛ (ب) منبع وصل شده به صورت Δ.

به علت اینکه یک منبع ولتاژ سه فاز می تواند به صورت Y یا به صورت Δ وصل شده باشد و بار سه فاز نیز می تواند به صورت Y یا Δ وصل شده باشد، مدار اساسی شکل (۲-۱) می تواند چهار صورت متفاوت به خود بگیرد. چهار ترتیب ممکن عبارتند از: (۱) منبع وصل شده به صورت Y و بار وصل شده به صورت Y؛ (۲) منبع وصل شده به صورت Y و بار وصل شده به صورت Δ؛ (۳) منبع وصل شده به صورت Δ و بار وصل شده به صورت Y؛ (۴) منبع وصل شده به صورت Δ و بار وصل شده به صورت Δ.

ما تحلیل مدارهای سه فاز را به صورت اول آغاز می کنیم. پس از تحلیل مدار Y-Y، نشان خواهیم داد که چگونه در مدارهای متعادل، صورت های دیگر را می توان به مدار معادل به صورت Y-Y تبدیل کرد. به عبارت دیگر، تحلیل مدار Y-Y کلید حل تمام صورت های سه فاز متعادل دیگر است.

۲-۲ تحلیل مدار Y-Y

تحلیل خود را از مدار Y-Y با فرض نامتعادل بودن آن آغاز می کنیم! این کار را عمداً انجام می دهیم تا نشان دهیم که منظور ما از متعادل بودن مدار سه فاز چیست و نتایج متعادل بودن در تحلیل مدار چگونه است. مدار کلی Y-Y در شکل (۲-۵) نشان داده شده است که در آنجا سیم چهارمی هم گره خنثی منبع را به گره خنثی بار وصل می کند. سیم چهارم تنها در ترکیب Y-Y امکان پذیر است. همچنین برای سهولت رسم دیاگرام ها، اتصالات Y را به صورت T های خوابیده نشان داده ایم. در شکل (۲-۵)، Z_{ga} ، Z_{gb} و Z_{gc} نشان دهنده امپدانس های درونی متناظر با هر فاز سیم پیچی منابع ولتاژ هستند. Z_{1a} ، Z_{1b}



شکل ۵-۲ یک سیستم سه فاز Y-Y.

و Z_{lc} نشان دهنده امپدانس هر سیم خط فازی است که منبع را به بار وصل می‌کند. Z_o امپدانس سیم خنثی است که گره خنثی منبع را به گره خنثی بار وصل می‌کند. Z_A ، Z_B و Z_C نشان دهنده امپدانس هر فاز بار هستند.

مدار شکل (۵-۲) را می‌توان با یک معادله ولتاژ گره تنها توصیف کرد. با به کار بردن گره خنثی منبع به عنوان گره مبنا و با فرض V_N به عنوان ولتاژ گره میان گره‌های N و n معادله ولتاژ گره را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{V_N}{Z_o} + \frac{V_N - V_{a'n}}{Z_A + Z_{la} + Z_{ga}} + \frac{V_N - V_{b'n}}{Z_B + Z_{lb} + Z_{gb}} + \frac{V_N - V_{c'n}}{Z_C + Z_{lc} + Z_{gc}} = 0 \quad (5-2)$$

قبل از تحلیل بیشتر معادله (۵-۲)، اندکی مکث کرده و ملاحظه کنید که روشهای تحلیل مدار بحث شده در فصلهای قبل مستقیماً به مدارهای سه فاز قابل اعمال هستند. از این رو معرفی روشهای تحلیلی جدید برای تحلیل مدارهای سه فاز لازم نیست. لیکن به طوری که در بقیه این فصل خواهیم دید، اگر یک مدار سه فاز، متعادل باشد، می‌توان بعضی روشهای تحلیلی میان‌بر مهم برای بررسی رفتار سیستم ارائه داد. مدار شکل (۵-۲) یک مدار سه فاز متعادل است، اگر تمام شرایط زیر برقرار باشد:

۱- $V_{a'n}$ ، $V_{b'n}$ و $V_{c'n}$ یک دسته ولتاژهای سه فاز متعادل تشکیل دهند.

۲- $Z_{ga} = Z_{gb} = Z_{gc}$

۳- $Z_{la} = Z_{lb} = Z_{lc}$

۴- $Z_A = Z_B = Z_C$

هیچ محدودیتی بر روی امپدانس سیم خنثی (Z_o) وجود ندارد. مقدار آن هیچ تاثیری بر روی متعادل بودن یا نامتعادل بودن سیستم ندارد.

اگر سیستم متعادل باشد معادله (۵-۲) بیان می‌کند که V_N باید برابر صفر باشد. برای نشان دادن این مطلب فرض کنید:

$$Z_\phi = Z_A + Z_{1a} + Z_{ga} \quad (۶-۲)$$

در این صورت معادله (۵-۲) را دوباره به صورت زیر می‌نویسیم:

$$V_N \left(\frac{1}{Z_\phi} + \frac{3}{Z_\phi} \right) = \frac{V_{a'n} + V_{b'n} + V_{c'n}}{Z_\phi} \quad (۷-۲)$$

سمت راست معادله (۷-۲) برابر صفر است زیرا بنابه فرض، صورت آن یک دسته ولتاژهای سه فاز متعادل بوده و Z_ϕ برابر صفر نمی‌باشد. تنها مقدار V_N که در معادله (۷-۲) صدق می‌کند، صفر است. از این‌رو برای یک مدار سه فاز متعادل داریم:

$$V_N = 0 \quad (۸-۲)$$

معادله (۸-۲) یک نتیجه فوق‌العاده مهم است. اگر V_N صفر باشد، هیچ اختلاف پتانسیلی میان گره خنثی منبع (n) و گره خنثی بار (N) وجود ندارد. از این‌رو جریان گذرنده از سیم خنثی برابر صفر است. بنابراین می‌توان سیم خنثی را از یک مدار $Y - Y$ متعادل حذف نمود ($I_n = 0$) یا اینکه آن را با یک سیم اتصال کوتاه کامل میان گره‌های n و N جایگزین کرد ($V_N = 0$). در مدل‌سازی مدارهای سه فاز متعادل هر دو روش را به راحتی به کار می‌بریم.

اکنون توجه خود را به این مطلب معطوف می‌کنیم که شرط متعادل بودن مدار چه تأثیری بر روی سه جریان خط می‌گذارد. مستقیماً از شکل (۵-۲) نتیجه می‌شود که اگر سیستم متعادل باشد، سه جریان خط چنین خواهند بود:

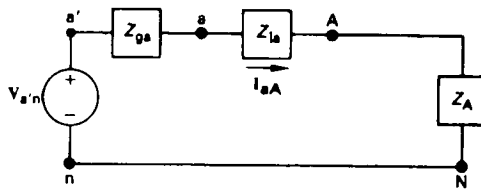
$$I_{aA} = \frac{V_{a'n} - V_N}{Z_A + Z_{1a} + Z_{ga}} = \frac{V_{a'n}}{Z_\phi} \quad (۹-۲)$$

$$I_{bB} = \frac{V_{b'n} - V_N}{Z_B + Z_{1b} + Z_{gb}} = \frac{V_{b'n}}{Z_\phi} \quad (۱۰-۲)$$

$$I_{cC} = \frac{V_{c'n} - V_N}{Z_C + Z_{1c} + Z_{gc}} = \frac{V_{c'n}}{Z_\phi} \quad (۱۱-۲)$$

از این معادلات نتیجه می‌گیریم که در یک سیستم سه فاز متعادل، سه جریان خط، یک دسته جریانهای سه فاز متعادل تشکیل می‌دهند. یعنی جریان در هر خط از لحاظ دامنه و فرکانس یکسان بوده و دقیقاً به اندازه 120° با دو جریان دو خط دیگر اختلاف فاز خواهد داشت. بنابراین اگر جریان I_{aA} را محاسبه کنیم، می‌توانیم جریانهای خط I_{bB} و I_{cC} را بدون محاسبات اضافی بنویسیم. با این بیان اظهار می‌داریم که دنباله فاز نیز معلوم است.

با به کار بردن معادله (۹-۲) می‌توان مدار معادل تک فاز مدار سه فاز متعادل $Y - Y$ را رسم کرد. از معادله (۹-۲) نتیجه می‌شود که جریان در فاز a به سادگی برابر ولتاژ ایجاد شده در فاز a سیم پیچ



شکل ۲-۶ مدار معادل تک فاز.

مولد تقسیم بر امپدانس کل فاز a مدار است. از این رو معادله (۲-۹)، مدار ساده شکل (۲-۶) را توصیف می‌کند که در آن سیم خنثی توسط یک مدار اتصال کوتاه کامل جایگزین شده است. تذکر یک نکته احتیاطی در اینجا لازم است. جریان در سیم خنثی در شکل (۲-۶) برابر جریان در سیم خنثی در مدار سه فاز متعادل نیست. جریان در سیم خنثی چنین است:

$$I_0 = I_{aA} + I_{bB} + I_{cC} \quad (۲-۱۲)$$

در حالی که جریان در سیم خنثی در شکل (۲-۶) برابر I_{aA} است. از این رو مدار شکل (۲-۶) مقدار درست جریان خط را به دست می‌دهد، لیکن تنها مولفه فاز a جریان سیم خنثی را مشخص می‌کند. هر موقع که مدار معادل تک فاز شکل (۲-۶) قابل اعمال باشد، جریانهای خط، یک دسته سه فاز متعادل تشکیل داده، سمت راست معادله (۲-۱۲) مجموعی برابر صفر دارد.

وقتی که ما جریانهای خط در شکل (۲-۵) را بدانیم، محاسبه هر ولتاژ مورد نظر در آن شکل کار نسبتاً ساده‌ای است. کمیت‌های مورد نظر ولتاژ خط نسبت به خط دیگر و ولتاژ خط نسبت به خنثی می‌باشند. ما این روابط را در سرهای بار به دست خواهیم آورد؛ اما نتایج به دست آمده، در سرهای منبع نیز قابل اعمال خواهند بود. ولتاژ خط به خط در سرهای بار برحسب ولتاژ خط به خنثی در سرهای بار چنین است:

$$V_{AB} = V_{AN} - V_{BN} \quad (۲-۱۳)$$

$$V_{BC} = V_{BN} - V_{CN} \quad (۲-۱۴)$$

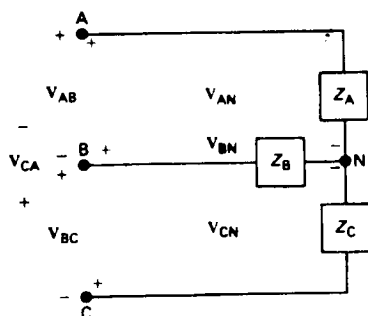
و:

$$V_{CA} = V_{CN} - V_{AN} \quad (۲-۱۵)$$

طرز نمایش دو زیرنویس در معادلات ولتاژ نشان دهنده افت ولتاژ از زیرنویس اول تا زیرنویس دوم می‌باشد. روابط داده شده در معادلات (۲-۱۳) تا (۲-۱۵) در شکل (۲-۷) نشان داده شده است. از آنجایی که ما علاقه‌مند به حالت متعادل هستیم، سیم خنثی را از شکل حذف کرده‌ایم.

برای نشان دادن ارتباط میان ولتاژهای خط به خط و خط به خنثی، یک دنباله فازی مثبت یا دنباله abc را فرض می‌کنیم. به طور دلخواه، ولتاژ خط به خنثی فاز a را به عنوان مرجع انتخاب

می‌کنیم. از این رو:



شکل ۷-۲ ولتاژهای خط به خط و خط به خنثی.

$$V_{AN} = V_{\phi} \angle 0^{\circ} \quad (۱۶-۲)$$

$$V_{BN} = V_{\phi} \angle -120^{\circ} \quad (۱۷-۲)$$

و:

$$V_{CN} = V_{\phi} \angle +120^{\circ} \quad (۱۸-۲)$$

که در آن V_{ϕ} نشان دهنده اندازه ولتاژ خط به خطی است. با جایگزینی معادلات (۱۶-۲) تا (۱۸-۲) به ترتیب در معادلات (۱۳-۲) تا (۱۵-۲) به دست می آوریم:

$$V_{AB} = V_{\phi} \angle 0^{\circ} - V_{\phi} \angle -120^{\circ} = \sqrt{3} V_{\phi} \angle 30^{\circ} \quad (۱۹-۲)$$

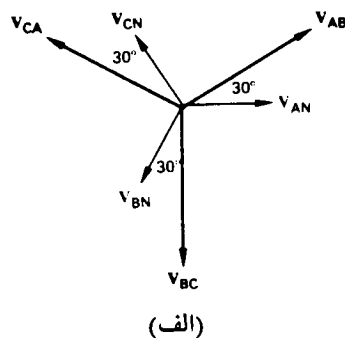
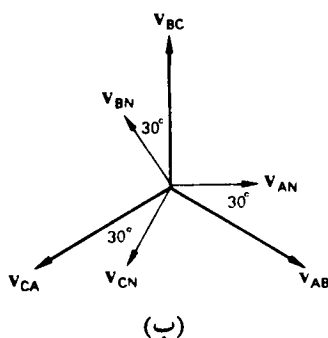
$$V_{BC} = V_{\phi} \angle -120^{\circ} - V_{\phi} \angle 120^{\circ} = \sqrt{3} V_{\phi} \angle -90^{\circ} \quad (۲۰-۲)$$

و:

$$V_{CA} = V_{\phi} \angle 120^{\circ} - V_{\phi} \angle 0^{\circ} = \sqrt{3} V_{\phi} \angle 150^{\circ} \quad (۲۱-۲)$$

معادلات (۱۹-۲) تا (۲۱-۲) نشان می دهند که: (۱) اندازه ولتاژ خط به خط $\sqrt{3}$ برابر اندازه ولتاژ خط به خنثی است. (۲) ولتاژهای خط به خط یک دسته ولتاژهای سه فاز متعادل تشکیل می دهند. (۳) دسته ولتاژهای خط به خط از دسته ولتاژهای خط به خنثی 30° جلو می افتند. این موضوع را به عنوان تمرین به خواننده واگذار می کنیم که نشان دهد برای یک دنباله فازی منفی یا دنباله acb تنها تغییر این است که دسته ولتاژهای خط به خط از دسته ولتاژهای خط به خنثی به مقدار 30° عقب می افتند. در دیاگرام های فازوری شکل (۸-۲) این روابط خلاصه شده اند. بنابراین در یک سیستم متعادل اگر ولتاژ خط به خنثی در نقطه ای از مدار معلوم باشد، ولتاژ خط به خط نیز در همان نقطه مدار معلوم است و برعکس.

قبل از تشریح محاسبات سه فاز متعادل با یک مثال عددی، بعضی توضیحات اضافی درباره اصطلاحات را بیان می کنیم. در یک سیستم $Y-Y$ ولتاژ خط به خنثی ولتاژ فاز نیز خوانده می شود و برای اختصار ولتاژ خط به خط ولتاژ خط نیز خوانده خواهد شد. جریان فاز به صورت جریان در هر فاز بار، یا در سرهای منبع مدار، جریان در هر فاز مولد تعریف می شود. جریان خط به صورت جریان در هر



شکل ۲-۸ دیاگرام فازوری نشان دهنده ارتباط میان ولتاژهای خط به خط و خط به خنثی در یک سیستم متعادل: (الف) دنباله abc، (ب) دنباله acb.

فاز خط تعریف می‌شود. برای ساختار $Y-Y$ جریان فاز و جریان خط یکسان است. از آنجایی که سیستم‌های سه فاز برای کار کردن با توانهای الکتریکی با حجم بالا طراحی می‌شوند، تمام مشخصات ولتاژها و جریانها و محاسبات آنها برحسب مقادیر rms بیان می‌شود. بنابراین هنگامی که یک خط انتقال سه فاز به صورت 345 kV بیان می‌شود، مقدار نامی rms ولتاژ خط به خط برابر 345000 ولت است. در این فصل تمام ولتاژها و جریانها برحسب rms بیان می‌شوند. بالاخره حرف یونانی ϕ برای مشخص کردن کمیت هر فاز به مقدار زیادی در نوشته‌ها به کار می‌رود. بنابراین V_ϕ ، I_ϕ ، Z_ϕ ، P_ϕ و Q_ϕ به ترتیب به صورت ولتاژ فاز، جریان فاز، امپدانس فاز، توان فاز و توان راکتیو فاز تعبیر می‌شوند.

مثال ۱ نشان می‌دهد که برای حل مدار سه فاز $Y-Y$ متعادل، چگونه باید مطالب بیان شده تاکنون را به کار برد.

مثال ۱ یک مولد سه فاز با دنباله مثبت وصل شده به صورت Y دارای امپدانس $0.5 + j0.2$ اهم بر فاز است. ولتاژ درونی هر فاز مولد برابر 120 ولت است. این مولد یک بار سه فاز متعادل وصل شده به صورت Y را تغذیه می‌کند که دارای امپدانس $28 + j39$ اهم بر فاز است. امپدانس خطی که مولد را به بار وصل می‌کند برابر $1.5 + j0.8$ اهم بر فاز است. ولتاژ درونی فاز a مولد به عنوان فاز مبنا مشخص می‌شود.

الف - مدار معادل تک فاز این سیستم سه فاز را رسم کنید.

ب - سه جریان خط I_{aA} ، I_{bB} و I_{cC} را محاسبه کنید.

پ - سه ولتاژ خط به خنثی را در سرهای بار حساب کنید: یعنی V_{AN} ، V_{BN} و V_{CN} .

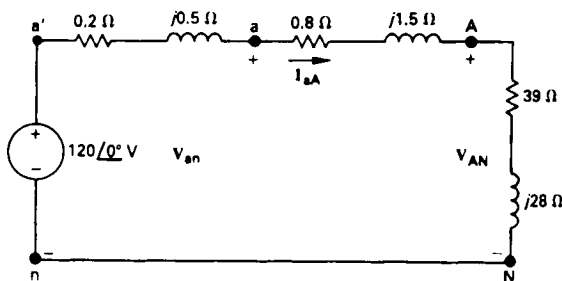
ت - سه ولتاژ خط V_{AB} ، V_{BC} و V_{CA} را در سرهای بار حساب کنید.

ث - ولتاژهای خط به خنثی را در سرهای مولد حساب کنید: یعنی V_{an} ، V_{bn} و V_{cn} .

ج - ولتاژهای خط V_{ab} ، V_{bc} و V_{ca} را در سرهای مولد حساب کنید.

چ - قسمتهای (الف) تا (ج) را با فرض دنباله فاز منفی تکرار کنید.

حل الف - مدار معادل تک فاز در شکل (۹-۲) نشان داده شده است.



شکل ۹-۲ مدار معادل تک فاز برای مثال ۱.

ب - جریان خط فاز a چنین است:

$$I_{aA} = \frac{120 \angle 0^\circ}{(0.2 + 0.8 + 39) + j(0.5 + 1.5 + 28)}$$

$$= \frac{120 \angle 0^\circ}{40 + j30} = 2.4 \angle -36.87^\circ \text{ A}$$

برای یک دنباله فازی مثبت داریم:

$$I_{bB} = 2.4 \angle -156.87^\circ \text{ A}$$

$$I_{cC} = 2.4 \angle 83.13^\circ \text{ A}$$

پ - ولتاژ خط به خنثی در سر A بار چنین است:

$$V_{AN} = (39 + j28)(2.4 \angle -36.87^\circ)$$

$$= 115.22 \angle -1.19^\circ \text{ V}$$

برای یک دنباله فازی مثبت داریم:

$$V_{BN} = 115.22 \angle -121.19^\circ \text{ V}$$

$$V_{CN} = 115.22 \angle +118.81^\circ \text{ V}$$

ت - برای یک دنباله فازی مثبت، ولتاژهای خط به خط از ولتاژهای خط به خنثی 30° جلو می افتد.

بنابراین:

$$\begin{aligned}
 V_{AB} &= (\sqrt{3} \angle 30^\circ) V_{AN} \\
 &= 199,58 \angle 28,81^\circ \text{ V} \\
 V_{BC} &= 199,58 \angle -91,19^\circ \text{ V} \\
 V_{CA} &= 199,58 \angle 148,81^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

ث - ولتاژ خط به خنثی در سر a منبع چنین است:

$$\begin{aligned}
 V_{an} &= 120 - (0,2 + j0,5)(2,4 \angle -36,87^\circ) \\
 &= 120 - 1,29 \angle 31,33^\circ \\
 &= 118,90 - j0,67 \\
 &= 118,90 \angle -0,32^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

برای دنباله فازی مثبت داریم:

$$\begin{aligned}
 V_{bn} &= 118,90 \angle -120,32^\circ \\
 V_{cn} &= 118,90 \angle 119,68^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

ج - ولتاژ خط به خط در سرهای منبع چنین است:

$$\begin{aligned}
 V_{ab} &= (\sqrt{3} \angle 30^\circ) V_{an} \\
 &= 205,94 \angle 29,68^\circ \text{ V} \\
 V_{bc} &= 205,94 \angle -90,32^\circ \text{ V} \\
 V_{ca} &= 205,94 \angle 149,68^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

چ - تغییر دنباله فازی تاثیری بر روی مدار معادل تک فاز ندارد. سه جریان خط چنین هستند:

$$\begin{aligned}
 I_{aA} &= 2,4 \angle -36,87^\circ \text{ A} \\
 I_{bB} &= 2,4 \angle 83,13^\circ \text{ A} \\
 I_{cC} &= 2,4 \angle -156,87^\circ \text{ A}
 \end{aligned}$$

ولتاژهای خط به خنثی در سرهای بار عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 V_{AN} &= 115,22 \angle -1,19^\circ \text{ V} \\
 V_{BN} &= 115,22 \angle 118,81^\circ \text{ V} \\
 V_{CN} &= 115,22 \angle -121,19^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

برای دنباله فازی منفی، ولتاژهای خط به خط 30° از ولتاژهای خط به خنثی عقب می افتند:

$$V_{AB} = (\sqrt{3} \angle -30^\circ) V_{AN}$$

$$= 199,58 \angle -31,19^\circ V$$

$$V_{BC} = 199,58 \angle 88,81^\circ V$$

$$V_{CA} = 199,58 \angle -151,19^\circ V$$

ولتاژهای خط به خنثی در سرهای مولد عبارتند از:

$$V_{an} = 118,90 \angle -0,32^\circ V$$

$$V_{bn} = 118,90 \angle 119,68^\circ V$$

$$V_{cn} = 118,90 \angle -120,32^\circ V$$

ولتاژهای خط به خط در سرهای مولد عبارتند از:

$$V_{ab} = (\sqrt{3} \angle -30^\circ) V_{an}$$

$$= 205,94 \angle -30,32^\circ V$$

$$V_{bc} = 205,94 \angle 89,68^\circ V$$

$$V_{ca} = 205,94 \angle -150,32^\circ V$$

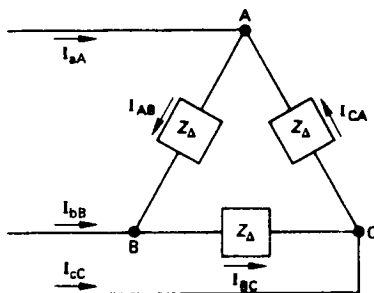
در مثال ۱ توجه کنید که وقتی کمیت فاز a محاسبه شد، مقادیر متناظر فازهای b و c را می‌توان به سادگی با انتقال فاز a به مقدار 120° به دست آورد. برای دنباله فازی مثبت، فاز b، 120° از فاز a عقب می‌افتد در حالی که فاز c، 120° از فاز a جلو می‌افتد. برای یک دنباله فازی منفی، فاز b از فاز a به مقدار 120° جلو می‌افتد و فاز c از فاز a به مقدار 120° عقب می‌افتد. بنابراین محاسبه ولتاژ خط به خط، با داشتن ولتاژ خط به خنثی بسیار ساده است.

۴-۲ تحلیل مدار Y-Δ

اگر در یک مدار سه فاز بار به صورت دلتا وصل شده باشد، می‌توان با به کار بردن تبدیل دلتا به وای (مثلاً به ستاره) آن را به وای تبدیل کرد. وقتی که بار متعادل باشد، امپدانس هر بازوی اتصال وای برابر یک سوم امپدانس هر بازوی اتصال دلتا است. بنابراین:

$$Z_Y = \frac{Z_\Delta}{3} \quad (22-2)$$

وقتی که بار Δ توسط بار معادل Y جایگزین شود، مدار سه فاز را می‌توان با یک مدار معادل تک فاز شکل (۲-۶) مدل سازی کرد.



شکل ۲-۱۰ مدار به کار رفته برای برقراری روابط میان جریانهای

خط و جریانهای فاز در یک بار متعادل Δ .

پس از آنکه مدار متعادل تک فاز را برای محاسبه جریانهای خط به کار بردیم، می توان جریان هر بازوی بار Δ اصلی را به سادگی از تقسیم جریان خط بر $\sqrt{3}$ و انتقال آن به جلو به میزان 30° به دست آورد. این روابط میان جریانهای خط و جریانهای فاز در اتصال Δ را می توان با به کار بردن شکل (۲-۱۰) به دست آورد.

وقتی که باری یا منبعی به صورت دلتا وصل شود، جریان در هر بازوی دلتا برابر جریان فاز و ولتاژ میان دوسر هر بازو، ولتاژ فاز است. از شکل (۲-۱۰) می بینیم که در یک اتصال Δ ولتاژ فاز دقیقاً مساوی ولتاژ خط است.

برای نشان دادن ارتباط میان جریان فاز و جریان خط، یک دنباله مثبت فرض کرده و فرض می کنیم I_ϕ نشان دهنده اندازه جریان فاز باشد. در این صورت:

$$I_{AB} = I_\phi \angle 0^\circ \quad (2-23)$$

$$I_{BC} = I_\phi \angle -120^\circ \quad (2-24)$$

$$I_{CA} = I_\phi \angle +120^\circ \quad (2-25)$$

در نوشتن این معادلات ما به دلخواه I_{AB} را به صورت فاز مبنا انتخاب کردیم.

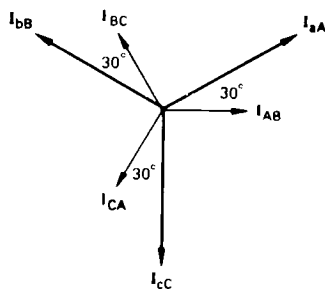
می توان با اعمال مستقیم قانون کیرشف جریان خط را برحسب جریان فاز نوشت. در این صورت

داریم:

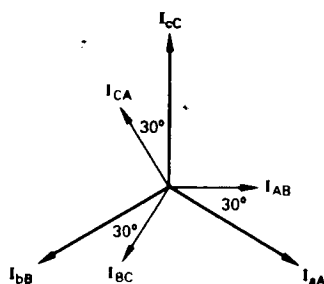
$$\begin{aligned} I_{aA} &= I_{AB} - I_{CA} = I_\phi \angle 0^\circ - I_\phi \angle 120^\circ \\ &= \sqrt{3} I_\phi \angle -30^\circ \end{aligned} \quad (2-26)$$

$$\begin{aligned} I_{bB} &= I_{BC} - I_{AB} = I_\phi \angle -120^\circ - I_\phi \angle 0^\circ \\ &= \sqrt{3} I_\phi \angle -150^\circ \end{aligned} \quad (2-27)$$

$$\begin{aligned} I_{cC} &= I_{CA} - I_{BC} = I_\phi \angle 120^\circ - I_\phi \angle -120^\circ \\ &= \sqrt{3} I_\phi \angle 90^\circ \end{aligned} \quad (2-28)$$



(ب)



(الف)

شکل ۱۱-۲ دیاگرام فازوری نشان دهنده ارتباط میان جریانهای خط و جریانهای فاز در یک بار وصل شده به صورت Δ : (الف) دنباله فازی مثبت؛ (ب) دنباله فازی منفی.

مقایسه معادلات (۲-۲۶) تا (۲-۲۸) با معادلات (۲-۲۳) تا (۲-۲۵) نشان می دهد که اندازه جریان خط $\sqrt{3}$ برابر اندازه جریان فاز بوده و دسته جریانهای خط 30° از دسته جریانهای فاز عقب می افتند. تایید این مطلب را به عهده خواننده می گذاریم که برای یک دنباله فازی منفی، جریان خط $\sqrt{3}$ برابر جریان فاز بوده و 30° از آن جلو می افتد. ارتباط میان جریانهای خط و جریانهای فاز یک بار وصل شده Δ در شکل (۱۱-۲) خلاصه شده است.

مثال ۲ محاسبات مربوط به تحلیل یک مدار سه فاز متعادل شامل منبع وصل شده به صورت Y و بار وصل شده به صورت Δ را نشان می دهد.

مثال ۲ منبع وصل شده به صورت Y در مثال ۱، یک بار وصل شده به صورت Δ را از طریق یک خط توزیع با امپدانس $0.9 + j0.3$ اهم بر فاز تغذیه می کند. امپدانس بار برابر $118.5 + j85.8$ اهم بر فاز است. ولتاژ درونی فاز a مولد را به عنوان فاز مبنا به کار ببرید.

الف - مدار معادل تک فاز سیستم سه فاز را رسم کنید.

ب - جریانهای خط I_{aA} ، I_{bB} و I_{cC} را محاسبه کنید.

پ - ولتاژهای فاز را در سرهای بار محاسبه کنید.

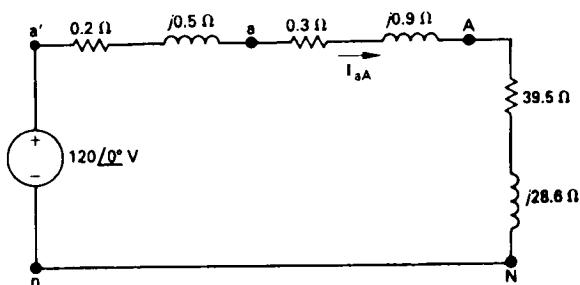
ت - جریانهای فاز بار را محاسبه کنید.

ث - ولتاژهای خط را در سرهای منبع محاسبه کنید.

حل الف - مدار معادل تک فاز در شکل (۱۲-۲) نشان داده شده است. امپدانس بار اتصال معادل Y چنین است:

$$\left(\frac{1}{3}\right)(118.5 + j85.8) = 39.5 + j28.6 \, \Omega/\phi$$

ب - جریان خط فاز a چنین است: 485



شکل ۱۲-۲ مدار معادل تک فاز مثال ۲.

$$I_{aA} = \frac{120 \angle 0^\circ}{(0.2 + 0.3 + 39.5) + j(0.5 + 0.9 + 28.6)} = \frac{120 \angle 0^\circ}{40 + j30} = 2.4 \angle -36.87^\circ \text{ A}$$

بنابراین مستقیماً نتیجه می‌شود:

$$I_{bB} = 2.4 \angle -156.87^\circ \text{ A}$$

$$I_{cC} = 2.4 \angle 83.13^\circ \text{ A}$$

پ - چون بار به صورت Δ وصل شده است، ولتاژهای فاز همان ولتاژهای خط است. برای محاسبه ولتاژ خط ابتدا V_{AN} را محاسبه می‌کنیم:

$$V_{AN} = (39.5 + j28.6)(2.4 \angle -36.87^\circ) = 117.04 \angle -0.96^\circ \text{ V}$$

چون دنباله فازی مثبت است، ولتاژ خط V_{AB} چنین است:

$$V_{AB} = \sqrt{3} \angle 30^\circ V_{AN} = 202.72 \angle 29.04^\circ \text{ V}$$

بنابراین:

$$V_{BC} = 202.72 \angle -90.96^\circ \text{ V}$$

$$V_{CA} = 202.72 \angle 149.04^\circ \text{ V}$$

ت - جریانهای فاز بار را می‌توان مستقیماً از جریانهای خط محاسبه کرد:

$$I_{AB} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ\right) I_{aA} = 1.39 \angle -6.87^\circ \text{ A}$$

وقتی که I_{AB} را بدانیم، جریانهای فاز بار دیگر را می‌دانیم:

$$I_{BC} = 1.39 \angle -126.87^\circ \text{ A}$$

$$I_{CA} = 1.39 \angle 113.13^\circ \text{ A}$$

توجه کنید که می‌توان محاسبه I_{AB} را با به کار بردن مقادیر محاسبه شده قبلی V_{AB} و امپدانس بار وصل شده Δ بررسی کرد. یعنی:

$$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_\phi} = \frac{202.72 \angle 29.04^\circ}{118.54 \angle 35.51^\circ} = 1.39 \angle -6.87^\circ \text{ A}$$

(روشهای محاسبه نوع دیگر از لحاظ حذف اشتباه بسیار سودمند هستند و ما استفاده از آنها را در تمام کارها شامل طراحی و تحلیل شدیداً توصیه می‌کنیم.)

ث - برای محاسبه ولتاژ خط در سرهای منبع، ابتدا V_{an} را محاسبه می‌کنیم. از شکل (۲-۱۲) ملاحظه می‌کنیم که V_{an} برابر افت ولتاژ در دوسر امپدانس خط و دوسر امپدانس بار است. از این رو:

$$V_{an} = (39.8 + j29.5)2.4 \angle -36.87^\circ = 118.90 \angle -0.32^\circ V$$

بنابراین ولتاژ خط V_{ab} چنین است:

$$V_{ab} = \sqrt{3} \angle 30^\circ V_{an} \quad \text{یا} \quad V_{ab} = 205.94 \angle 29.68^\circ V$$

بنابراین:

$$V_{bc} = 205.94 \angle -90.32^\circ V$$

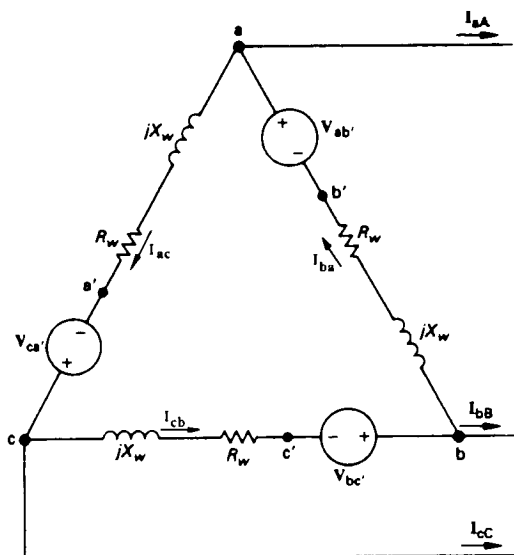
$$V_{ca} = 205.94 \angle 149.68^\circ V$$

۵-۲ تحلیل مدار Δ -Y

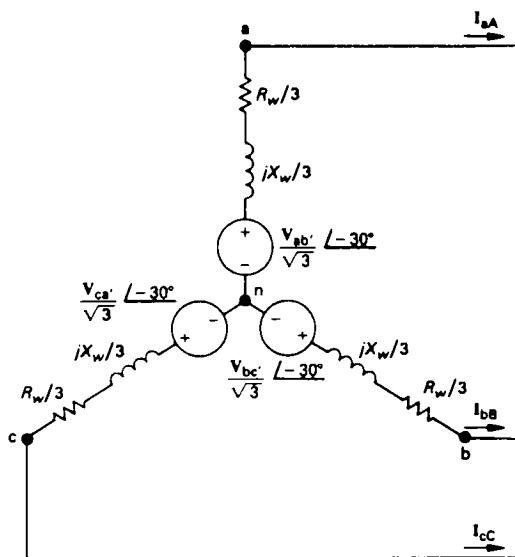
در مدار سه فاز Δ -Y، منبع به صورت دلتا و بار به صورت وای وصل شده است. می‌توان مدار معادل تک فاز را با جایگزین کردن منبع وصل شده به صورت Δ با یک منبع معادل Y به دست آورد. می‌توان منبع معادل Y را از تقسیم ولتاژ فاز درونی منبع Δ بر $\sqrt{3}$ و انتقال این دسته ولتاژهای سه فاز به میزان $30^\circ -$ در صورت مثبت بودن دنباله فازی و $30^\circ +$ در صورت منفی بودن دنباله فازی، به دست آورد. امپدانس درونی معادل Y برابر یک سوم امپدانس درونی منبع Δ است. مدار معادل Y یک منبع وصل شده به صورت Δ با دنباله فازی مثبت در شکل (۲-۱۳) نشان داده شده است.

برای دنباله فازی مثبت، دسته جریانهای فازی منبع Δ (I_{ac} ، I_{cb} ، I_{ba}) در شکل (۲-۱۳) از دسته جریانهای خط I_{aA} ، I_{bB} ، I_{cC} به میزان 30° جلو می‌افتد. اندازه جریان فاز $\frac{1}{\sqrt{3}}$ برابر اندازه جریان خط است. برای دنباله فازی منفی، جریانهای فازی در منبع از جریانهای خط عقب می‌افتند.

برای نشان دادن اینکه منبع Y شکل (۲-۱۳ ب) معادل منبع Δ شکل (۲-۱۳ الف) است، لازم است تنها نشان داده شود که دو مدار شرایط سرهای یکسانی برای هر اتصال خارجی متعادل وصل شده به سرهای a، b و c فراهم می‌آورند. دو شرط آزمایشی که اثبات آنها راحت‌ترین است مدارهای باز و مدارهای اتصال کوتاه است. برای شرایط مدار باز سه جریان خط برابر صفر بوده و دو مدار معادل هستند اگر ولتاژهای یکسانی میان سرهای a، b و c تحویل دهند. برای یک اتصال کوتاه خارجی که سرهای a، b و c را وصل می‌کند، ولتاژهای خط صفر بوده و دو مدار معادل هستند، اگر جریان خط یکسانی تحویل دهند. اثبات اینکه این دو مدار معادل هستند به خواننده واگذار می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۲-۱۳ معادل Y یک منبع سه فاز متعادل، وصل شده به صورت Δ
 (دنباله فازی مثبت): (الف) منبع Δ ؛ (ب) معادل Y.

مثال ۳ یک منبع متعادل وصل شده به صورت Δ با دنباله فازی منفی، دارای امپدانس درونی $z + j0.18$ اهم بر فاز است. در حالت بدون بار، اندازه ولتاژ سر منبع ۶۰۰ ولت است. این منبع به یک بار وصل شده به صورت Y، وصل می شود که امپدانس آن $76.35 - j7.92$ اهم بر فاز است. امپدانس خط توزیع برابر $296 + j0.74$ اهم بر فاز است.

الف - مدار معادل تک فاز سیستم را رسم کنید و $V_{ab'}$ را به عنوان فاز مبنا به کار ببرید.

ب - اندازه ولتاژ خط را در سرهای بار حساب کنید.

پ - سه جریان خط I_{aA} ، I_{bB} و I_{cC} را محاسبه کنید.

ت - جریانهای فاز I_{ba} ، I_{cb} و I_{ac} منبع را محاسبه کنید.

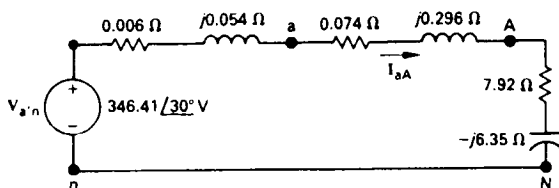
ث - اندازه ولتاژ خط را در سرهای منبع محاسبه کنید.

حل الف - در حالت بی بار، ولتاژ سر معادل ولتاژ درونی منبع است. بنابراین اندازه ولتاژ درونی

منبع Δ ، ۶۰۰ ولت است. با به کار بردن $V_{ab'}$ به عنوان فاز مبنا، ولتاژ درونی فاز a منبع معادل Y را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$V_{a'n} = \frac{V_{ab'}}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ = \frac{600}{\sqrt{3}} \angle 30^\circ \cong 346.41 \angle 30^\circ \text{ V}$$

امپدانس درونی مولد معادل Y برابر $(0.18 + j0.162) \left(\frac{1}{3}\right)$ یا $0.06 + j0.054 \Omega$ اهم بر فاز است. بنابراین مدار معادل تک فاز مطابق شکل (۱۴-۲) است.



شکل ۱۴-۲ مدار معادل تک فاز مثال ۳.

ب - از مدار شکل (۱۴-۲) مستقیماً نتیجه می شود که:

$$I_{aA} = \frac{346.41 \angle 30^\circ}{1.000 - j6.000} = 34.64 \angle 66.87^\circ \text{ A}$$

و:

$$V_{AN} = (7.92 - j6.35)(34.64 \angle 66.87^\circ) = 351.65 \angle 28.15^\circ \text{ V}$$

اندازه ولتاژ خط در سرهای بار چنین است:

$$|V_{AB}| = \sqrt{3} |V_{AN}| = 609.08 \text{ V}$$

پ - با به کار بردن نتایج قسمت (ب) جریانهای خط را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$I_{aA} = 34.64 \angle 66.87^\circ \text{ A}$$

$$I_{bB} = 34.64 \angle 186.87^\circ \text{ A}$$

$$I_{cC} = 34.64 \angle -53.13^\circ \text{ A}$$

ت - جریانهای فاز مولد را می توان مستقیماً از جریانهای خط محاسبه کرد. چون دنباله فازی منفی

است، داریم:

$$I_{ba} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \angle -30^\circ\right) I_{aA} = 20 \angle 36.87^\circ \text{ A}$$

$$I_{cb} = 20 \angle 156.87^\circ \text{ A}$$

$$I_{ac} = 20 \angle -83.13^\circ \text{ A}$$

ث - از مدار شکل (۲-۱۴) داریم:

$$\begin{aligned} V_{an} &= (7.994 - j6.054) I_{aA} \\ &= (7.994 - j6.054) 34.64 \angle 36.87^\circ \\ &= 347.37 \angle 29.73^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

اندازه ولتاژ خط در سرهای منبع چنین خواهد بود:

$$|V_{ab}| = \sqrt{3} |V_{an}| = 601.66 \text{ V}$$

۲-۶ تحلیل مدارهای Δ - Δ

در مدار Δ - Δ هم منبع و هم بار به صورت Δ وصل شده‌اند. مدار تک فاز معادل یک سیستم Δ - Δ متعادل با جایگزین کردن منبع و بار با اتصال‌های معادل Y آنها به دست می‌آید. مانند قبل، مدار معادل Y برای حل جریانهای خط و ولتاژ خط به خنثی به کار می‌رود. وقتی که جریانهای خط را بدانیم، می‌توانیم جریانهای فاز را در بار و منبع با به کار بردن روش بیان شده در بخش‌های ۲-۴ و ۲-۵ به دست آوریم. ولتاژهای خط به خنثی را می‌توان مانند بخش ۲-۳ به ولتاژهای خط به خط تبدیل کرد. تمام این روشها را در مثالهای ۱، ۲ و ۳ تشریح کردیم.

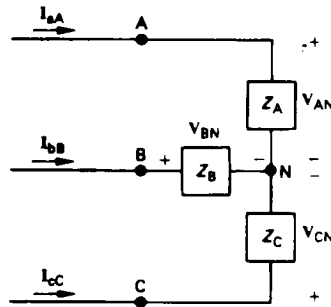
۳- محاسبه توان در مدارهای سه فاز متعادل

تاکنون تحلیل مدارهای سه فاز متعادل را به تعیین ولتاژها و جریانها در یک مدار داده شده محدود کردیم. اکنون محاسبات توان سه فاز را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مطلب را با بحث توان متوسط تحویل داده شده به یک بار متعادل وصل شده به صورت Y آغاز می‌کنیم.

۱-۳ توان متوسط در یک بار Y متعادل

یک بار وصل شده به صورت Y همراه با جریانها و ولتاژهای مربوط در شکل (۳-۱) نشان داده شده است. توان متوسط مربوط به هر فاز را می‌توان با به کار بردن روشهای معرفی شده در فصل ۷ محاسبه کرد. توان متوسط متناظر با فاز a بار به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P_A = |V_{AN}| |I_{aA}| \cos(\theta_{vA} - \theta_{iA}) \quad (1-3)$$



شکل ۱-۳ یک بار Y متعادل به کار رفته برای معرفی محاسبه توان متوسط در یک مدار سه فاز.

که در آن θ_{vA} و θ_{iA} به ترتیب زاویه‌های فازی V_{AN} و I_{aA} هستند. با به کار بردن طرز نمایش معرفی شده در معادله (۱-۳)، توان متناظر با فازهای b و c عبارتند از:

$$P_B = |V_{BN}| |I_{bB}| \cos(\theta_{vB} - \theta_{iB}) \quad (۲-۳)$$

$$P_C = |V_{CN}| |I_{cC}| \cos(\theta_{vC} - \theta_{iC}) \quad (۳-۳)$$

در معادلات (۱-۳) تا (۳-۳) تمام فازورهای جریان و ولتاژ برحسب مقادیر rms توابع سینوسی متناظر آنها نوشته شده‌اند.

در یک سیستم سه فاز متعادل، اندازه همه ولتاژهای خط به خنثی یکسان بوده، همچنین اندازه جریانهای فاز نیز یکسان است. آرگومان تابع کسینوسی نیز برای هر سه فاز یکسان است. برای تاکید این ملاحظات، طرز نمایش زیر را که سادگی‌های بیشتری در بحث محاسبات توان در مدارهای سه فاز متعادل فراهم می‌آورد، معرفی می‌کنیم:

$$V_\phi = |V_{AN}| = |V_{BN}| = |V_{CN}| \quad (۴-۳)$$

$$I_\phi = |I_{aA}| = |I_{bB}| = |I_{cC}| \quad (۵-۳)$$

و:

$$\theta_\phi = \theta_{vA} - \theta_{iA} = \theta_{vB} - \theta_{iB} = \theta_{vC} - \theta_{iC} \quad (۶-۳)$$

به علاوه، توان تحویل شده به هر فاز بار در یک سیستم متعادل یکسان است و از این رو:

$$P_A = P_B = P_C = P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi \quad (۷-۳)$$

که در آن توان متوسط هر فاز را نشان می‌دهد.

توان متوسط کل تحویل شده به یک بار متعادل وصل شده به صورت Y، به سادگی سه برابر توان هر فاز است، یعنی:

$$P_T = 3P_\phi = 3V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi \quad (۸-۳)$$

همچنین سودمند است که توان کل را برحسب مقادیر rms اندازه ولتاژ خط و مقادیر rms اندازه جریان خط بیان کنیم. اگر V_L نشان دهنده مقدار rms اندازه ولتاژ خط و I_L نشان دهنده مقدار rms اندازه جریان خط باشد، در این صورت می‌توان معادله (۸-۳) را به صورت زیر اصلاح کرد:

$$P_T = 3 \left(\frac{V_L}{\sqrt{3}} \right) I_L \cos \theta_\phi$$

$$= \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_\phi \quad (9-3)$$

در به دست آوردن معادله (۹-۳) از این حقیقت استفاده کردیم که برای یک بار متعادل وصل شده به صورت Y، اندازه ولتاژ فاز برابر اندازه ولتاژ خط تقسیم بر $\sqrt{3}$ است و اندازه جریان خط مساوی اندازه جریان فاز است. در به کار بردن معادله (۹-۳) برای محاسبه توان کل تحویل شده به بار، مهم است که به یاد داشته باشیم که θ_ϕ زاویه فاز میان ولتاژ فاز و جریان فاز است.

۲-۳ توان مختلط در یک بار Y متعادل

با به کار بردن روشهای معرفی شده در فصل ۷، می توان توان مختلط و توان راکتیو متناظر با هر فاز یک بار متعادل وصل شده به صورت Y را محاسبه کرد. برای یک بار متعادل، عبارتهای توان راکتیو چنین است:

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin \theta_\phi \quad (10-3)$$

$$Q_T = 3Q_\phi = \sqrt{3} V_L I_L \sin \theta_\phi \quad (11-3)$$

معادله $S = \mathbf{V}_{eff} \mathbf{I}_{eff}^* = P + jQ$ مبنای بیان توان مختلط متناظر با هر فاز است. برای یک بار متعادل داریم:

$$S = \mathbf{V}_{AN} \mathbf{I}_{aA}^* = \mathbf{V}_{BN} \mathbf{I}_{bB}^* = \mathbf{V}_{CN} \mathbf{I}_{cC}^* = \mathbf{V}_\phi \mathbf{I}_\phi^* \quad (12-3)$$

که در آن $\mathbf{V}_\phi$ و $\mathbf{I}_\phi$ نشان دهنده ولتاژ فاز و جریان فاز همان فاز است. بنابراین در حالت کلی داریم:

$$S_\phi = P_\phi + jQ_\phi = \mathbf{V}_\phi \mathbf{I}_\phi^* \quad (13-3)$$

$$S_T = 3S_\phi = \sqrt{3} V_L I_L \angle \theta_\phi \quad (14-3)$$

۳-۳ محاسبات توان در یک بار Δ متعادل

در صورتی که بار به صورت Δ وصل شده باشد، محاسبه توان — توان راکتیو یا توان مختلط — اساساً مشابه حالت بار وصل شده به صورت Y است. یک بار وصل شده به صورت دلتا به همراه جریانه‌ها و ولتاژهای مربوط در شکل (۲-۳) نشان داده شده است که از آن توانهای متناظر با هر فاز به صورت زیر به دست می آید:

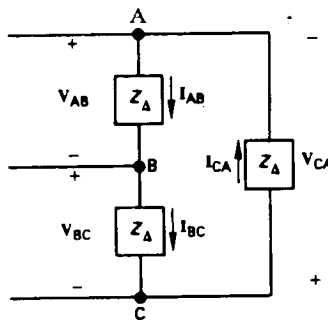
$$P_A = |\mathbf{V}_{AB}| |\mathbf{I}_{AB}| \cos(\theta_{vAB} - \theta_{iAB}) \quad (15-3)$$

$$P_B = |\mathbf{V}_{BC}| |\mathbf{I}_{BC}| \cos(\theta_{vBC} - \theta_{iBC}) \quad (16-3)$$

$$P_C = |\mathbf{V}_{CA}| |\mathbf{I}_{CA}| \cos(\theta_{vCA} - \theta_{iCA}) \quad (17-3)$$

برای یک بار متعادل داریم:

$$|\mathbf{V}_{AB}| = |\mathbf{V}_{BC}| = |\mathbf{V}_{CA}| = V_\phi \quad (18-3)$$



شکل ۲-۳ بار وصل شده به صورت Δ به کار رفته در بحث محاسبات توان.

$$|I_{AB}| = |I_{BC}| = |I_{CA}| = I_\phi \quad (۱۹-۳)$$

$$\theta_{vAB} - \theta_{iAB} = \theta_{vBC} - \theta_{iBC} = \theta_{vCA} - \theta_{iCA} = \theta_\phi \quad (۲۰-۳)$$

و:

$$P_A = P_B = P_C = P_\phi = V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi \quad (۲۱-۳)$$

قابل ذکر است که معادله (۲۱-۳) همان معادله (۷-۳) است. این مطلب معادل با این بیان است "که در یک بار متعادل، توان متوسط هر فاز برابر حاصلضرب مقادیر rms ولتاژ فاز و rms جریان فاز و کسینوس زاویه میان ولتاژ فاز و جریان فاز است."

توان کل تحویل شده به یک بار متعادل وصل شده به صورت Δ چنین است:

$$\begin{aligned} P_T &= 3P_\phi = 3V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi \\ &= 3V_L \left(\frac{I_L}{\sqrt{3}} \right) \cos \theta_\phi \\ &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_\phi \end{aligned} \quad (۲۲-۳)$$

توجه کنید که معادله (۲۲-۳) همان معادله (۹-۳) است.

عبارت‌های مربوط به توان راکتیو و توان مختلط نیز دارای همان صورت به دست آمده برای بار

وصل شده به صورت Y است:

$$Q_\phi = V_\phi I_\phi \sin \theta_\phi \quad (۲۳-۳)$$

$$Q_T = 3Q_\phi = 3V_\phi I_\phi \sin \theta_\phi \quad (۲۴-۳)$$

$$S_\phi = P_\phi + jQ_\phi = V_\phi I_\phi^* \quad (۲۵-۳)$$

$$S_T = 3S_\phi = \sqrt{3} V_L I_L \angle \theta_\phi \quad (۲۶-۳)$$

مثالهای ۴ تا ۶ محاسبه توان را در یک مدار سه فاز متعادل تشریح می‌کنند.

مثال ۴ الف - توان متوسط هر فاز را که به بار وصل شده به صورت Y مثال ۱ تحویل داده می‌شود، حساب کنید.

ب - کل توان متوسط تحویل داده شده به بار را حساب کنید.

- پ - کل توان متوسط تلف شده در خط را حساب کنید.
 ت - کل توان متوسط تلف شده در مولد را حساب کنید.
 ث - کل تعداد ولت آمپرهای راکتیو مغناطیس کننده جذب شده توسط بار را حساب کنید.
 ج - کل توان مختلط تحویل داده شده توسط منبع را حساب کنید.
- حل الف -** از مثال ۱ داریم: $V_\phi = 115/22V$, $I_\phi = 2/4A$, و $\theta_\phi = -1/19 - (-36/87) = 35/68^\circ$
- بنابراین:

$$P_\phi = (115/22)(2/4) \cos 35/68^\circ = 224/64 \text{ وات}$$

توان هر فاز را می توان از رابطه $R_\phi I_\phi^2$ نیز حساب کرد:

$$P_\phi = (39)(2/4)^2 = 224/64 \text{ وات}$$

- ب - کل توان متوسط تحویل داده شده به بار برابر $P_T = 3P_\phi = 673/92 \text{ W}$ است. چون ولتاژ خط را در مثال ۱ حساب کردیم، بنابراین می توان معادله $(9-3)$ را نیز به کار برد:

$$P_T = (\sqrt{3})(199/58)(2/4) \cos 35/68^\circ = 673/92 \text{ W}$$

- پ - کل توان تلف شده در خط چنین است:

$$P_{\text{خط}} = (3)(2/4)^2 (0/8) = 13/824 \text{ W}$$

- ت - کل توان متوسط تلف شده در مولد چنین است:

$$P_{\text{مولد}} = (3)(2/4)^2 (0/2) = 3/456 \text{ W}$$

- ث - کل ولت آمپر راکتیو مغناطیس کننده که توسط بار جذب می شود، چنین است:

$$Q_T = (\sqrt{3})(199/58)(2/4) \sin 35/68^\circ = 483/84 \text{ VAR}$$

- ج - کل توان مختلط مربوط به منبع چنین است:

$$S_T = 3S_\phi = -3(120)(2/4) \angle 36/87^\circ$$

$$= -691/20 - j518/40 \text{ VA}$$

- علامت منفی نشان می دهد که توان درونی و توان راکتیو مغناطیس کننده، به مدار تحویل می شود. می توان نتیجه را با محاسبه کل توان و توان راکتیو جذب شده توسط مدار مطابقت داد. بنابراین:

$$P = 673/92 + 13/824 + 3/456$$

$$= 691/20 \text{ W} \quad (\text{مطابقت دارد})$$

$$Q = 483/84 + 3(2/4)^2 (1/5) + 3(2/4)^2 (0/5)$$

$$= 483/84 + 25/92 + 8/64$$

$$= 518/40 \text{ VAR} \quad (\text{مطابقت دارد})$$

مثال ۵ الف - کل توان مختلط تحویل داده شده به بار وصل شده به صورت Δ مثال ۲ را حساب کنید.

ب - چند درصد از توان متوسط ارسالی مولد به بار تحویل داده می شود؟

حل الف - با به کار بردن مقادیر فاز a از حل مثال ۲ داریم:

$$V_\phi = V_{AB} = 202.72 \angle 29.04^\circ \text{ V}$$

$$I_\phi = I_{AB} = 1.39 \angle -61.87^\circ \text{ A}$$

با به کار بردن معادلات (۳-۲۵) و (۳-۲۶) داریم:

$$S_T = 3(202.72 \angle 29.04^\circ)(1.39 \angle 61.87^\circ)$$

$$= 682.56 + j494.208 \text{ VA}$$

ب - کل توان ارسالی مولد برابر مجموع توان کل تحویل داده شده به بار به اضافه توان کل تلف شده در خط است. بنابراین:

$$P_{\text{ورودی}} = 682.56 + 3(2.4)^2(0.3) = 687.744 \text{ W}$$

درصدی از توان متوسط در ورودی خط توزیع که به بار تحویل داده می شود برابر $\frac{682.56}{687.744}$ یا ۹۹.۲۵٪ است.

مثال ۶ یک بار متعادل سه فاز، ۴۸۰ کیلووات با ضریب توان پس فاز ۰.۸ نیاز دارد. بار از خطی با

امپدانس $0.025 + j0.05 \Omega$ اهم بر فاز تغذیه می شود. ولتاژ خط در سرهای بار برابر ۶۰۰ ولت است.

الف - مدار معادل تک فاز سیستم را رسم کنید.

ب - اندازه جریان خط را محاسبه کنید.

پ - اندازه ولتاژ خط را در سر ارسالی آن محاسبه کنید.

ت - ضریب توان را در سر ارسالی خط محاسبه کنید.

حل الف - مدار شکل (۳-۳) مدار معادل تک فاز را نشان می دهد. ما به دلخواه ولتاژ خط به

خنثی را در سر بار به عنوان مبنا انتخاب می کنیم.

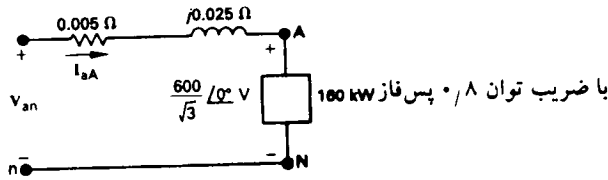
ب - جریان خط I_{aA} عبارت است از:

$$\left(\frac{600}{\sqrt{3}}\right) I_{aA}^* = (160 + j120) 10^2$$

یا:

$$I_{aA}^* = 577.35 \angle 36.87^\circ \text{ A}$$

بنابراین $I_{aA} = 577.35 \angle -36.87^\circ \text{ A}$. اندازه جریان خط برابر اندازه I_{aA} است:



شکل ۳-۳ مدار معادل تک فاز مثال ۶.

$$I_L = 577.35 \text{ A}$$

برای I_L راه حل دیگری با استفاده از عبارت زیر به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} P_T &= \sqrt{3} V_L I_L \cos \theta_p \\ &= \sqrt{3} (600) I_L (0.8) = 480,000 \text{ W} \\ I_L &= \frac{480,000}{\sqrt{3} (600) (0.8)} = \frac{1000}{\sqrt{3}} = 577.35 \text{ A} \end{aligned}$$

پ - برای محاسبه اندازه ولتاژ خط در سرهای ارسالی آن، نخست V_{an} را حساب می کنیم. از شکل (۳-۳) داریم:

$$\begin{aligned} V_{an} &= V_{AN} + Z_L I_{aA} \\ &= \frac{600}{\sqrt{3}} + (0.005 + j0.025)(577.35 \angle -36.87^\circ) \\ &= 357.51 \angle 1.57^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$V_L = \sqrt{3} |V_{an}| = 619.23 \text{ V}$$

ت - ضریب توان در سر ارسالی خط برابر کسینوس زاویه فاز میان V_{an} و I_{aA} است:

$$\begin{aligned} \text{pf} &= \cos[1.57^\circ - (-36.87^\circ)] \\ &= \cos 38.44^\circ = 0.783 \text{ پس فاز} \end{aligned}$$

راه دیگر محاسبه ضریب توان آن است که ابتدا توان مختلط را در سر ارسالی خط محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} S_\phi &= (160 + j120)10^3 + (577.35)^2(0.005 + j0.025) \\ &= 161.67 + j128.33 \text{ kVA} \\ &= 206.41 \angle 38.44^\circ \text{ kVA} \end{aligned}$$

ضریب توان چنین است:

$$\text{pf} = \cos 38.44^\circ = 0.783 \text{ پس فاز}$$

بالاخره، اگر کل توان مختلط را در سر ارسالی خط حساب کنیم، پس از آنکه ابتدا اندازه جریان خط را حساب کردیم، می توانیم این مقدار را برای محاسبه 4.96 به کار ببریم. یعنی:

$$\sqrt{3} V_L I_L = 3(206.41) \times 10^3$$

$$V_L = \frac{3(206.41) \times 10^3}{\sqrt{3}(577.35)} = 619.23 \text{ V}$$

۴-۳ توان لحظه‌ای در مدارهای سه فاز

اگرچه ما اساساً به محاسبات توان متوسط، راکتیو و مختلط علاقه‌مند هستیم، محاسبه‌ی کل توان لحظه‌ای نیز اهمیت دارد. کل توان لحظه‌ای در یک مدار سه فاز متعادل یک خاصیت قابل توجه دارد: این توان با زمان تغییر نمی‌کند!

برای نشان دادن این خاصیت، فرض کنید ولتاژ لحظه‌ای خط به خنثی v_{AN} به عنوان مبنا انتخاب شود و مانند قبل θ_ϕ زاویه فاز $\theta_{vA} - \theta_{iA}$ باشد. در این صورت، برای دنباله‌ی فازی مثبت توان لحظه‌ای در هر فاز چنین است:

$$p_A = v_{AN} i_{aA} = V_\phi I_\phi \cos \omega t \cos(\omega t - \theta_\phi)$$

$$p_B = v_{BN} i_{bB} = V_\phi I_\phi \cos(\omega t - 120^\circ) \cos(\omega t - \theta_\phi - 120^\circ)$$

و:

$$p_C = v_{CN} i_{cC} = V_\phi I_\phi \cos(\omega t + 120^\circ) \cos(\omega t - \theta_\phi + 120^\circ)$$

که در آن V_ϕ و I_ϕ به ترتیب نشان دهنده‌ی مقادیر rms ولتاژ خط به خنثی و جریان خط هستند. کل توان لحظه‌ای برابر مجموع توانهای لحظه‌ای فاز است که به صورت $\frac{1}{\sqrt{3}} V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi$ ساده می‌شود. یعنی:

$$p_T = p_A + p_B + p_C = \frac{1}{\sqrt{3}} V_\phi I_\phi \cos \theta_\phi$$

به دست آوردن این رابطه ساده شده به عنوان تمرین به خواننده واگذار می‌شود.

یک خاصیت مهم مدارهای سه فاز آن است که کل توان لحظه‌ای ثابت است. بنابراین گشتاور ایجاد شده بر روی محور یک موتور سه فاز ثابت است و این بدین معناست که ارتعاشات در ماشین‌آلاتی که به وسیله‌ی موتورهای سه فاز تغذیه می‌شوند، کمتر است.

۴- کاربرد اسپایس در حل مدارهای سه فاز

برنامه تحلیل مدار اسپایس را می‌توان برای تحلیل مدارهای فازوری سه فاز نیز به کار برد. برای به دست آوردن فازور جریانهای خط و فاز منبع و بار، منابع ولتاژ صفر ولتی را می‌توان به عنوان آمپر متر در مدار قرار داد. اما باید مقادیر عناصر مداری که هر فاز بار را تشکیل می‌دهند معلوم باشند؛ یعنی بجای اینکه امپدانس خالص هر فاز را بدانیم باید عناصر RLC مداری و ترکیب آنها را بدانیم. البته این مطلب معمولاً مشکلی ایجاد نمی‌کند، زیرا اگر مقادیر امپدانس خالص هر فاز هم داده شده باشند، می‌توان

مدارهای ساده RL یا RC سری را چنان ترکیب کرد که این امپدانس‌ها را به دست دهند. در حقیقت می‌توان امپدانس‌های منبع را هم در هر فاز مولد قرار داد بدون آنکه مشکلی از لحاظ حل به وجود بیاید.

مثال ۷ با استفاده از برنامه اسپایس، توان متوسط کل تحویل داده شده به بار سه فاز نامتعادل نشان داده شده در شکل (۴-۱ الف) را به دست آورید. مولد سه فاز با امپدانس درونی هر فاز شامل مقاومت 0.15Ω سری با خود القایی 8 میلی هانری مدل‌سازی شده است.

حل برای آنکه توان متوسط کل تحویل داده شده به بار را تعیین کنیم، از برنامه اسپایس برای تعیین فازورهای جریان هر فاز بار یعنی $\hat{I}_A$ ، $\hat{I}_B$ و $\hat{I}_C$ استفاده می‌کنیم. سپس توان متوسط تلف شده در مقاومت‌های فاز را با هم جمع می‌کنیم:

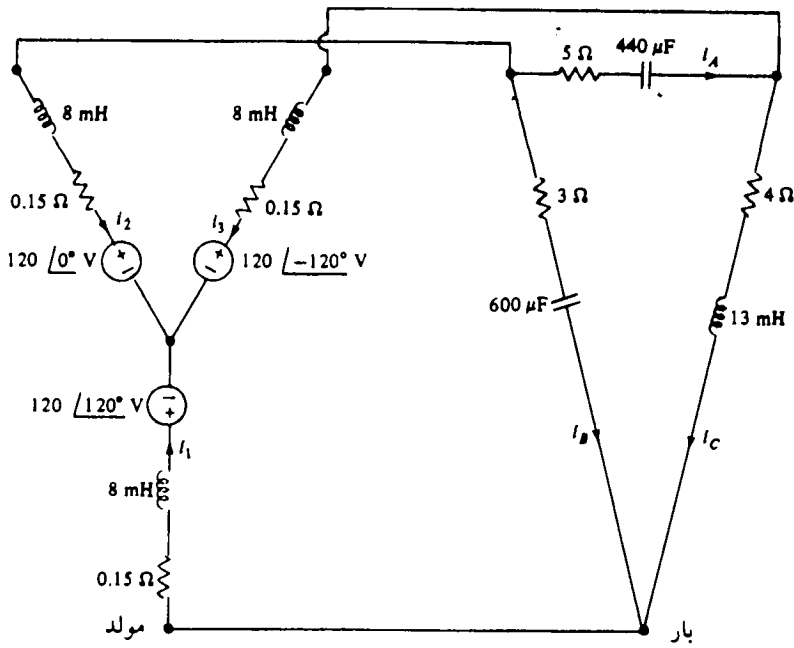
$$P_{\text{ave بار}} = |\hat{I}_A|^2 \times 5 + |\hat{I}_B|^2 \times 3 + |\hat{I}_C|^2 \times 4$$

مدار آماد شده اسپایس در شکل (۴-۲ ب) نشان داده شده است، که از آن برنامه اسپایس را به دست می‌آوریم:

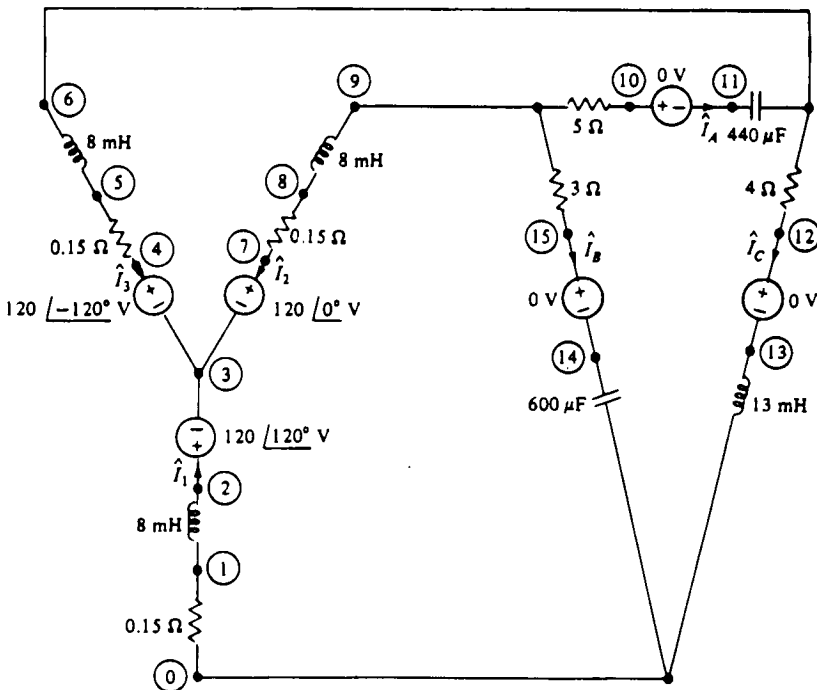
Example Three-phase Circuit

```

R1  0  1  0.15
L1  1  2  8M
V1  2  3  AC  120  120
R2  7  8  0.15
L2  8  9  8M
V2  7  3  AC  120
R3  4  5  0.15
L3  5  6  8M
V3  4  3  AC  120  -120
RB  9  15  3
VB  15  14
CB  14  0  600U
RA  9  10  5
VA  10  11
CA  11  6  440U
RC  6  12  4
VC  12  13
LC  13  0  13M
.AC  DEC  1  60  60
.PRINT AC IM(VA) IP(VA) IM(VB) IP(VB) IM(VC) IP(VC)
.END
```



(الف)



(ب)

$$\hat{I}_A = 15/29 \angle -34/01^\circ$$

$$\hat{I}_B = 45/95 \angle -51/49^\circ$$

$$\hat{I}_C = 22/62 \angle -177/2^\circ$$

بنابراین توان متوسط کل تلف شده در بار چنین است:

$$P_{ave \text{ بار}} = (15/29)^2 \times 5 + (45/95)^2 \times 3 + (22/62)^2 \times 4$$

$$= 9549/79 \text{ وات}$$

جریانهای وارد شونده به سرهای مثبت منابع ولتاژ مولد را نیز می توان با قرار دادن دستور زیر در برنامه بالا به دست آورد:

.PRINT AC IM(V1) IP(V1) IM(V2) IP(V2) IM(V3) IP(V3)

نتایج عبارتند از:

$$\hat{I}_1 = 37/55 \angle -80/78^\circ$$

$$\hat{I}_r = 60/71 \angle 132/9^\circ$$

$$\hat{I}_r = 36/05 \angle -11/92^\circ$$

بنابراین توان متوسط کل تحویل داده شده به وسیله منابع مولد چنین است:

$$P_{ave \text{ مولد}} = -\text{Re}(\hat{V}_1 \hat{I}_1^*) - \text{Re}(\hat{V}_r \hat{I}_r^*) - \text{Re}(\hat{V}_r \hat{I}_r^*)$$

$$= -\text{Re}(120 \angle 120^\circ \times 37/55 \angle -80/78^\circ) - \text{Re}(120 \angle 0^\circ \times 60/71 \angle -132/9^\circ)$$

$$- \text{Re}(120 \angle -120^\circ \times 36/05 \angle 11/92^\circ)$$

$$= 10514/62 \text{ وات}$$

اختلاف $964/84 \text{ W}$ $P_{ave \text{ بار}} - P_{ave \text{ مولد}}$ توان مصرف شده در مقاومت های $0/15 \Omega$ مولد است:

$$P_{ave} = |\hat{I}_1|^2 \times 0/15 + |\hat{I}_r|^2 \times 0/15 + |\hat{I}_r|^2 \times 0/15$$

$$= 959/3 \text{ W}$$

مثال ۷ مطلبی را که تا به حال باید بدیهی بوده باشد، نشان داده است: برنامه های تحلیل مدار مانند اسپیس را می توان برای تحلیل مداری بسیار پیچیده به کار برد، اما هنوز باید مفاهیم اصلی و اصول تحلیل مدار را درک کنیم تا بتوانیم این برنامه ها را صحیح تر و موثرتر به کار گیریم.

خلاصه

- میانبرهای تحلیلی: کلید تمام میانبرهای تحلیلی تبدیل مدار سه فاز متعادل به ساختار Y-Y و سپس جایگزینی ساختار Y-Y با یک مدار معادل تک فاز است.

- مدار معادل تک فاز: مدار معادل تک فاز برای محاسبه جریان خط و ولتاژ خط به خنثی در ساختار Y-Y تک فاز به کار می‌رود. فاز a معمولاً به عنوان فاز مبنا انتخاب می‌شود.
 - انتقال دادن محاسبات تک فاز: جریان خط و هر ولتاژ خط به خنثی را که از فاز a مدار معادل تک فاز محاسبه می‌شود، می‌توان برای یافتن هر جریان یا ولتاژ در مدار سه فاز متعادل بر مبنای حقایق زیر به کار گرفت:
 - ۱- در یک سیستم متعادل جریانه‌ها و ولتاژهای فاز b و c با جریان و ولتاژ متناظر فاز a یکسان هستند به جز آنکه ۱۲۰ درجه انتقال فاز دارند. در مدارهای با دنباله فازی مثبت، کمیت فاز b از کمیت فاز a به اندازه ۱۲۰° عقب می‌افتد و کمیت فاز c از کمیت فاز a به اندازه ۱۲۰° جلو می‌افتد. برای مدارهای با دنباله فازی منفی فازهای b و c نسبت به فاز a جابه‌جا می‌شوند.
 - ۲- دسته ولتاژهای خط نسبت به دسته ولتاژهای خط به خنثی ۳۰° ± اختلاف فاز دارند. علامت + یا - به ترتیب متناظر با دنباله فازی مثبت و منفی است.
 - ۳- اندازه ولتاژ خط $\sqrt{3}$ برابر اندازه ولتاژ خط به خنثی است.
 - ۴- دسته جریانه‌های خط نسبت به دسته جریانه‌های فاز در منابع و بارهای وصل شده به صورت Δ به مقدار ۳۰° ± اختلاف فاز دارند. علامت - یا + به ترتیب متناظر با دنباله فازی مثبت و منفی است.
 - ۵- اندازه جریان خط $\sqrt{3}$ برابر اندازه جریان فاز در منبع یا بار وصل شده به صورت Δ است.
- محاسبات توان در مدارهای سه فاز مشتمل بر روشهای زیر است:
- توان هر فاز: روشهای محاسبه توان متوسط، توان راکتیو و توان مختلط هر فاز با روشهای فصل ۷ یکسان هستند.
 - توان کل: توان کل حقیقی، راکتیو و مختلط را می‌توان یا با ضرب کردن توان متناظر هر فاز در ۳ و یا با استفاده از عبارتهای مربوط به جریان خط و ولتاژ خط داده شده در معادلات (۳-۹)، (۳-۱۱) و (۳-۱۴) تعیین کرد.
 - توان لحظه‌ای: توان لحظه‌ای کل در یک مدار سه فاز متعادل ثابت بوده و مساوی ۱/۵ برابر توان متوسط هر فاز است.

مسائل

- ۱- عبارتهای حوزه زمانی ولتاژهای خط به خنثی در سرهای بار وصل شده به صورت Y چنین هستند:

$$v_{AN} = 310 \cos(\omega t + 60^\circ)$$

$$v_{BN} = 310 \cos(\omega t + 180^\circ)$$

فصل هشتم

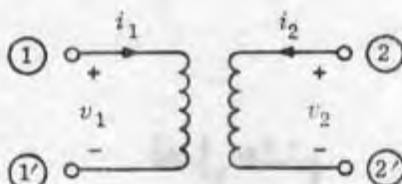
عناصر تزویج کننده و مدارهای تزویج شده

در فصل دوم سه نوع اصلی عناصر مدار، که مقاومت، خازن و سلف می باشد را معرفی کردیم. تمام این عناصر دارای دوسر می باشند (یا یک قطبی هستند) و بنابراین بوسیله روابطی که ولتاژ شاخه آنها را به جریان شاخه مربوط میکند مشخص می شوند. در فصلهای سوم تا هفتم مدارهای خاصی که شامل چنین عناصر دو سری بودند را تجزیه و تحلیل نمودیم. حال، قبل از ارائه روشهای کلی تجزیه و تحلیل مدار، می خواهیم بعضی دیگر از عناصر مفید مدار، مانند سلفهای تزویج شده^(۱) ترانسفورماتور ایده آل، و منابع کنترل شده (یا منابع وابسته) را معرفی کنیم. تفاوت این عناصر با مقاومت، سلف و خازن در آنست که این عناصر پیش از یک شاخه دارند و جریان و ولتاژ یک شاخه به ولتاژها و جریانهای شاخه های دیگر مربوط است. به همین جهت آنها **عناصر تزویج کننده**^(۲) نامیده میشوند. در این فصل، مشخصه ها و خواص این عناصر را خواهیم دید. علاوه بر آن، به منظور نشان دادن بعضی روشهای تجزیه و تحلیل برای مدارهایی که شامل عناصر تزویج کننده می باشند، مثالهایی بیان خواهیم کرد.

۱- سلفهای تزویج شده

دو سیم پیچی که در مجاورت یکدیگر قرار دارند، مطابق شکل (۱-۱)، را در نظر بگیرید. برای منظورهای کنونی، این موضوع که سیم پیچی ها بدور یک هسته از ماده مغناطیسی پیچیده شده باشند یا نه، هیچگونه اهمیتی ندارد. معهذاً، فرض می کنیم که سیم پیچی ها نسبت به یکدیگر، و یا نسبت به هسته ای که ممکن است بدوران پیچیده شده باشند، حرکت نمیکنند.

برای ولتاژ و جریان «جهت های قرار دادی» را مطابق شکل (۱-۱) انتخاب میکنیم.



شکل ۱-۱- سیم‌پیچی‌های تزویج شده و جهت‌های قرار دادی آنها

توجه کنید که این جهت‌های قرار دادی، «جهت‌های قرار دادی متناظر» برای هر سیم‌پیچی می‌باشند. این جهت‌ها دربارهٔ جهت‌های واقعی ولتاژ و جریان، و یا ولتاژ نسبی سرها هیچگونه اطلاعاتی به ما نمی‌دهند. جهت‌های قرار دادی تنها برای معین کردن علامت کمیتی که پدیدهٔ واقعی را نمایش می‌دهند لازم می‌باشند.

بمنظور استفاده‌های بعدی باید توجه کرد که اگر در مدار مغناطیسی دو سیم‌پیچی، ماده فرو مغناطیسی داشته باشیم، و وقتی که مقادیر جریانه‌ها باندازه کافی بزرگ باشند، روابط میان شارهای Φ_1 و Φ_2 و جریانه‌های i_1 و i_2 دیگر خطی نمی‌باشند. در این مورد، معادلات بصورت زیر می‌باشند:

$$\Phi_1 = f_1(i_1, i_2)$$

$$\Phi_2 = f_2(i_1, i_2)$$

که در آن f_1 و f_2 توابعی غیر خطی از جریانه‌های i_1 و i_2 می‌باشند. بموجب قانون فاراده:

$$v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{\partial f_1}{\partial i_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial i_2} \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{\partial f_2}{\partial i_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{\partial f_2}{\partial i_2} \frac{di_2}{dt}$$

در اینجا باید تاکید نمود که چهار مشتق جزئی بالا توابعی از i_1 و i_2 می‌باشند. واضح است که وقتی چنین معادلات «غیرخطی» بین شار و جریان داریم مسأله بسیار پیچیده است، و ما تا فصل هفدهم، بیش از این سیم‌پیچی‌های تزویج شده غیر خطی را در نظر نخواهیم گرفت.

۱-۱- توصیف سلفهای تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان

فرض کنید یک جفت سلف تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان داشته باشیم*. چون سلفها خطی میباشند، هرشار بایستی تابع خطی جریانها باشد، و چون سلفها تغییر ناپذیر با زمان میباشند، ضرایب این توابع خطی بایستی مقادیر ثابت باشند (یعنی صریحاً بزمان بستگی نداشته باشند). بنابراین میتوان نوشت:

$$\Phi_1(t) = L_{11}i_1(t) + M_{12}i_2(t)$$

$$\Phi_2(t) = M_{21}i_1(t) + L_{22}i_2(t)$$

که در آن ثابتهای L_{11} ، L_{22} ، M_{12} و M_{21} به زمان و به جریانهای i_1 و i_2 بستگی ندارند. L_{11} ضریب خود القای^(۱) سلف ۱^{'۱} و L_{22} ضریب خود القای سلف ۲^{'۲} است. M_{12} و M_{21} ضرایب القاء متقابل^(۲) برای سلفهای تزویج شده ۱^{'۱} و ۲^{'۲} نامیده میشوند. اگر جریانها برحسب آمپر و شارها برحسب ویر بیان شوند، L_{11} ، L_{22} ، M_{12} و M_{21} برحسب هانری اندازه گیری میشوند. دوفیزیک، از بررسی انرژی آموختیم که دوضریب القاء متقابل همیشه برابرند، یعنی $M_{12} = M_{21}$. اگر مقدار مشترک آنها را M بنامیم میتوان نوشت:

$$(۱-۱) \quad \Phi_1 = L_{11}i_1 + Mi_2$$

$$(۱-۲) \quad \Phi_2 = Mi_1 + L_{22}i_2$$

از معادلات قانون فاراده بلافاصله نتیجه میشود:

$$(۱-۳) \quad v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

* ما لغت «سلف» را بجای «سیمپیچی» بکار می‌بریم تا نشان دهیم که با مدلهای مدار سروکار داریم. سیمپیچی‌ها عناصر فیزیکی را مشخص میکنند که معمولاً دارای مقداری اتلاف انرژی و ظرفیت پراکنده میباشند. میتوان سیمپیچی‌ها را از ترکیب سلفها، مقاومتها و خازنها مدل سازی نمود.

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$(۱-۴) \quad v_r = M \frac{di_1}{dt} + L_{rr} \frac{di_r}{dt}$$

در حالت دائمی سینوسی، اگر ولتاژها و جریانهای سینوسی v_1 ، v_r ، i_1 و i_r را به ترتیب با فازورهای متناظرشان V_1 ، V_r ، I_1 و I_r نشان دهیم، این معادلات بصورت زیر درسی آیند:

$$(۱-۵) \quad V_1 = j\omega L_{11} I_1 + j\omega M I_r$$

$$(۱-۶) \quad V_r = j\omega M I_1 + j\omega L_{rr} I_r$$

که در آن ω فرکانس زاویه‌ای است.

تعبصره - هرچند ضرایب خود القاء L_{11} و L_{rr} همواره اعداد مثبتی هستند، ضریب القای متقابل M ، بسته به اینکه سیم‌پیچی‌ها چگونه پیچیده شده باشند، میتواند مثبت و یا منفی باشد.

«علامت ضریب القاء متقابل» علامت ضریب القاء متقابل M را تنها میتوان با درنظر گرفتن دقیق وضع فیزیکی و جهات قرار دادی تعیین نمود. فرض کنید سلف دوم ①' ① را مدار باز کنیم، یعنی جریان i_r متحد با صفر است. معادلات (۱-۲) و (۱-۴) بصورت زیر درسی آیند:

$$\Phi_r = M i_1$$

و:

$$v_r = M \frac{di_1}{dt}$$

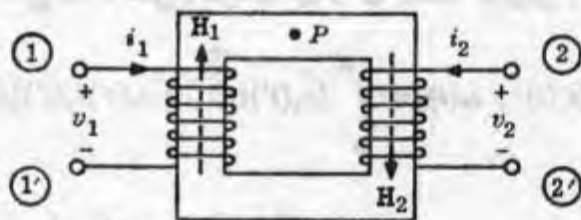
اگر یک جریان «افزایشی» از سر ① وارد سلف ۱ شود، در اینصورت $\frac{di_1}{dt} > 0$ میباشد و چون $v_r = M \left(\frac{di_1}{dt} \right)$ ، واضح است که علامت v_r با علامت M یکسان میباشد. مثلاً، ممکن است پتانسیل سر ① سلف ۲ از پتانسیل سر ①' بیشتر باشد. در این حالت، جهت قرار دادی ما لازم میدارد که $v_r > 0$ ، و بنابراین $M > 0$ باشد. بنابراین، علامت M هم به وضع فیزیکی «و هم» به جهت قرار دادی انتخاب شده بستگی دارد.

اکنون مسأله تعیین علامت M را با توجه به انرژی بررسی می‌کنیم. یک جفت سلف تزویج شده مشخص با جهات قرار دادی برای ولتاژ و جریان داده شده است. (شکل (۱-۲) را ببینید). فرض می‌کنیم که نفوذ پذیری مغناطیسی^(۱) هسته خیلی بیشتر از نفوذ پذیری مغناطیسی فضای آزاد باشد. تحت این شرایط، تقریباً تمام انرژی مغناطیسی در هسته ذخیره می‌شود. حال، می‌خواهیم براساس این داده‌ها، تعیین کنیم که علامت M در معادلات (۱-۳) و (۱-۴) بایستی مثبت باشد یا منفی.

با در نظر گرفتن انرژی مغناطیسی ذخیره شده در مواقعی که $i_1 > 0$ و $i_2 > 0$ است، به یک قاعده برای انتخاب علامت خواهیم رسید. در فیزیک آموختیم که هرگاه $\vec{H}$ بردار میدان مغناطیسی در یک نقطه P از هسته مغناطیسی باشد، در این صورت انرژی ذخیره شده در جزء حجم dv که شامل نقطه P است برابر $\frac{\mu}{2} |\vec{H}|^2 dv$ خواهد بود، که در آن μ نفوذ پذیری مغناطیسی هسته می‌باشد. فرض کنید با استفاده از مولدهای مناسبی، جریانهای ثابت و مثبت i_1 و i_2 را داشته باشیم و گیریم $\vec{H}_1$ میدان مغناطیسی ناشی از i_1 تنها، و $\vec{H}_2$ میدان مغناطیسی ناشی از i_2 تنها باشد. آنگاه انرژی مغناطیسی ذخیره شده در dv چنین است:

$$\frac{\mu}{2} |\vec{H}_1 + \vec{H}_2|^2 dv = \left(\frac{\mu}{2} |\vec{H}_1|^2 + \mu \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 + \frac{\mu}{2} |\vec{H}_2|^2 \right) dv$$

که در آن $\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2$ نمایشگر حاصلضرب عددی دو بردار $\vec{H}_1$ و $\vec{H}_2$ می‌باشد.



شکل ۱-۲- تشریح تعیین علامت M

نظریه^{*} اساسی مدارها و شبکه‌ها

در این معادله $\frac{\mu}{\gamma} |\vec{H}_1|^2 dv$ انرژی مغناطیسی ذخیره شده ناشی از جریان i_1 تنها است و $\frac{\mu}{\gamma} |\vec{H}_2|^2 dv$ انرژی مغناطیسی ذخیره شده ناشی از جریان i_2 تنها است. پس، جمله $\mu \vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2 dv$ انرژی مغناطیسی ذخیره شده ناشی از وجود توأم i_1 و i_2 است. بنابراین اگر $\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_2$ مثبت باشد (یعنی، قدر مطلق زاویه بین میدانهای مغناطیسی $\vec{H}_1$ و $\vec{H}_2$ از 90° کمتر باشد تا کسینوس آن مثبت گردد)، انرژی ذخیره شده در dv وقتی که i_1 و i_2 «همزمان» جاری شوند از مجموع انرژیهای ذخیره شده در dv وقتی که هریک از i_1 و i_2 بتنهایی جریان داشته باشند بزرگتر است. بعنوان مثال، در شکل (۱-۲)، قانون دست راست نشان میدهد که $\vec{H}_1$ و $\vec{H}_2$ جهت‌های یکسان دارند، بنابراین انرژی ذخیره شده در dv وقتی که هر دوی i_1 و i_2 جریان داشته باشند، از مجموع انرژیهای ذخیره شده وقتی که i_1 و i_2 بتنهایی جریان داشته باشند «بزرگتر» است.

اکنون انرژی ذخیره شده را بدون در نظر گرفتن میدان و با در نظر گرفتن مدار محاسبه میکنیم. برای سادگی فرض کنید $i_1(0) = 0$ و $i_2(0) = 0$. بنابراین، بموجب معادلات (۱-۱) و (۱-۲)، در $t = 0$ شارها برابر صفر است و در لحظه $t = 0$ هیچ انرژی ذخیره نشده است. انرژی ذخیره شده تابعی از مقادیر لحظه‌ای i_1 و i_2 است و ما انرژی ذخیره شده در لحظه t را بصورت $\mathcal{E}[i_1(t), i_2(t)]$ مینویسیم. جهات قرار دادی متناظر لازم میدارند که $v_1(t)i_1(t)$ ، توان لحظه‌ای داده شده «بوسیله» محیط خارج «به» سلفی با سرهای ① و ①' بوده، و $v_2(t)i_2(t)$ ، توان لحظه‌ای داده شده «بوسیله» محیط خارج «به» سلفی با سرهای ② و ②' باشد. بنابراین:

$$\mathcal{E}[i_1(t), i_2(t)] = \int_0^t [v_1(t')i_1(t') + v_2(t')i_2(t')] dt'$$

از معادلات (۱-۳) و (۱-۴) بدست می‌آوریم که:

$$g[i_1(t), i_2(t)] = \int_0^t \left[L_{11} i_1 \frac{di_1}{dt'} + M \left(i_1 \frac{di_2}{dt'} + i_2 \frac{di_1}{dt'} \right) + L_{22} i_2 \frac{di_2}{dt'} \right] dt'$$

چون $i_1(0)$ و $i_2(0)$ مساوی صفر فرض شده اند بدست می آوریم که :

$$(1-7) \quad g[i_1(t), i_2(t)] = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2(t) + M i_1(t) i_2(t) + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2(t)$$

این رابطه را میتوان بصورت زیر نوشت :

$$(1-8) \quad g(i_1, i_2) = g(i_1, 0) + M i_1 i_2 + g(0, i_2)$$

که در آن $g(i_1, 0)$ انرژی ذخیره شده در حالتی است که $i_2 = 0$ باشد و جریان i_1 در سلف ۱ جاری شود، و $g(0, i_2)$ انرژی ذخیره شده در حالتی است که $i_1 = 0$ باشد و جریان i_2 در سلف ۲ جاری شود. از معادله (۱-۸) نتیجه می گیریم که اگر i_1 و i_2 مثبت بوده و $M > 0$ باشد، انرژی کل ذخیره شده از مجموع انرژیهای ذخیره شده در حالتی که به ترتیب جریان i_1 به تنهایی و جریان i_2 به تنهایی جاری شود، بزرگتر است. بدین ترتیب، صحت قاعده زیر را، برای تعیین علامت M ، بررسی کردیم :

«یک جفت سلف تزویج شده را در نظر گرفته جهات قراردادی برای ولتاژها و جریانها را چنان انتخاب می کنیم که توان داده شده به سلفها از محیط خارج مساوی $v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t)$ باشد. (انتخاب جهات قراردادی متناظر این مطلب را تضمین میکند). اگر یک جریان یک آمپری در هر سلف در جهت قراردادی عبور کند و اگر انرژی ذخیره شده در این شرایط از مجموع انرژیهای ذخیره شده در حالتی که هر یک از جریانهای یک آمپری به تنهایی عبور میکنند بزرگتر باشد، ضریب القاء متقابل M مثبت است.»

در دیاگرامهای مدار، اغلب از نقطه ها^(۱) بعنوان یک قرار داد برای نشان دادن

علامت M استفاده میشود. این قرارداد چنین است :

«ابتدا، برای هر سلف از جهات قراردادی متناظر استفاده کنید. سپس، به یک سر از هر سلف یک نقطه تخصیص دهید بقسمی که وقتی جهات قرارداد i_1 و i_2 هر دو از سر نقطه دار وارد سیم پیچی بشوند (یا از آن خارج گردند)، M مثبت باشد».

دروغ نشان داده شده در شکل (۱-۲)، برای جهات قرارداد داده شده به i_1 و i_2 ، ضریب القاء متقابل M مثبت است و بایستی دو نقطه در دوسر ① و ②، یا دوسر ③ و ④ گذاشته شود.

۱-۲- ضریب تزویج

برای توصیف روابط میان جریانها و شارها در سلفهای تزویج شده خطی و تغییر ناپذیر با زبان با دو سیم پیچی^(۱)، به سه پارامتر L_{11} ، L_{22} و M نیاز داریم. میدانیم که ضرایب خود القاء L_{11} و L_{22} همیشه مثبت هستند درحالیکه ضریب القاء متقابل M میتواند مثبت یا منفی باشد. نسبت قدر مطلق ضریب القاء متقابل به واسطه هندسی دو ضریب خود القاء، سنجشی برای درجهٔ تزویج میباشد. بنابراین، ضریب تزویج^(۱) سلفهای تزویج شده با دو سیم پیچی را با رابطه زیر تعریف میکنیم :

$$k \triangleq \frac{|M|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}}$$

ضریب k یک عدد «نامنفی» است که به جهات قرارداد دادی انتخاب شده برای جریانهای سلفها بستگی ندارد. اگر دو سلف در فاصلهٔ زیادی از یکدیگر در فضا قرار داشته باشند، ضریب القاء متقابل بسیار کوچک است و k نزدیک صفر میباشد. اگر دو سلف شدیداً تزویج شده باشند، مانند حالتیکه دو سیم پیچی بر روی یک هسته پیچیده شده است، قسمت اعظم شار مغناطیسی برای دو سلف مشترک میباشد، و k نزدیک واحد است. با بررسی انرژی ذخیره شده در سلفها نشان خواهیم داد که ضریب تزویج k که در بالا تعریف شد،

همواره کوچکتر یا برابر واحد است. اگر این ضریب برابر واحد باشد، گویند که سلفها کاملاً تزویج شده‌اند^(۱).

اکنون عبارت انرژی ذخیره شده را که در معادله (۱-۷) داده شده است بررسی میکنیم. از روش جبری کامل کردن مربعات استفاده خواهیم کرد، در این صورت:

$$\begin{aligned} g(i_1, i_2) &= \frac{1}{r} L_{11} i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{r} L_{22} i_2^2 \\ &= \frac{1}{r} L_{11} \left(i_1 + \frac{M}{L_{11}} i_2 \right)^2 + \frac{1}{r} \left(L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}} \right) i_2^2 \end{aligned}$$

توجه کنید که برای هر مقدار i_1 و i_2 ، جمله $\left(i_1 + \frac{M}{L_{11}} i_2 \right)^2$ همواره نامنفی است. بخاطر بیاورید که انرژی $g(i_1, i_2)$ ذخیره شده در سلفهای تزویج شده بایستی برای «هر» انتخاب i_1 و i_2 نامنفی باشد. بنابراین، نتیجه می‌شود که $L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}}$ بایستی نامنفی باشد. اثبات این مطلب بطریقه برهان خلف^(۲) میباشد.

فرض کنید $L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}}$ منفی باشد و گیریم که $i_2 = 1$ و $i_1 = -\frac{M}{L_{11}}$ انتخاب شود. در این صورت $\left(i_1 + \frac{M}{L_{11}} i_2 \right)^2$ صفر میشود و $\left(L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}} \right) i_2^2$ منفی است، و ما به نتیجه غیر ممکن $g\left(-\frac{M}{L_{11}}, 1\right) < 0$ میرسیم. و بالتجیه این شرط را خواهیم داشت:

$$L_{22} - \frac{M^2}{L_{11}} \geq 0$$

و این رابطه با $L_{11} L_{22} \geq M^2$ معادل است، و یا:

$$(۱-۹) \quad k = \frac{|M|}{\sqrt{L_{11} L_{22}}} \leq 1$$

بطور خلاصه، بررسی انرژی لازم میدارد که ضرایب خود القاء یک جفت سلف خطی تزویج

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

شده مثبت بوده و ضریب تزویج آنها کوچکتر یا برابر واحد باشد.

۱-۳- سلفهای با چند سیم پیچی و ماتریس ضرایب القاء آنها

اگر بیش از دو سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان بایکدیگر تزویج شوند، مانند آنچه در شکل (۱-۳) نشان داده شده است، رابطه میان جریانها و شارها بوسیله یک دسته از معادلات خطی، بصورت زیر داده میشود:

$$\Phi_1 = L_{11}i_1 + L_{12}i_2 + L_{13}i_3$$

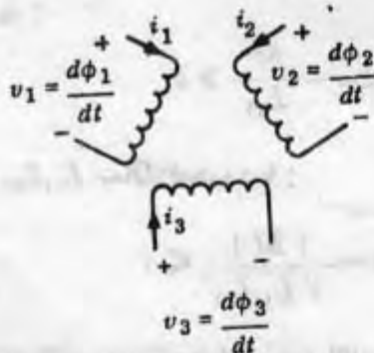
$$\Phi_2 = L_{21}i_1 + L_{22}i_2 + L_{23}i_3 \quad (۱-۱۰ \text{ الف})$$

$$\Phi_3 = L_{31}i_1 + L_{32}i_2 + L_{33}i_3$$

در معادلات (۱-۱۰ الف)، L_{11} ، L_{22} و L_{33} بترتیب ضرایب خود القاء سلفهای ۱، ۲ و ۳ میباشند. $L_{12} = L_{21}$ و $L_{23} = L_{32}$ و $L_{13} = L_{31}$ ضرایب القاء متقابل هستند. عبارت دقیق تر، L_{12} ضریب القاء متقابل بین سلف ۱ و سلف ۲ را نشان میدهد. گاهی راحت تر است که معادله (۱-۱۰ الف) را بصورت ماتریسی زیر بنویسیم:

$$\Phi = \mathbf{L} \mathbf{i} \quad (۱-۱۰ \text{ ب})$$

که در آن Φ بردار شار و $\mathbf{i}$ بردار جریان نامیده میشود، و $\mathbf{L}$ یک ماتریس مربعی



شکل ۱-۳- سلفهای با چند سیم پیچی

است که ماتریس ضرایب القاء^(۱) نامیده میشود. بنابراین :

$$(۱-۱۰) \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \Phi_3 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{i}_3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix}$$

مرتبه ماتریس ضرایب القاء $\mathbf{L}$ با تعداد سلفها برابر است. از آنجائیکه سلفها تغییرناپذیر با زمان میباشند، عناصر $\mathbf{L}$ (یعنی L_{ij} ها) ثابت هستند. برحسب ولتاژها، یک بردار ولتاژ $\mathbf{v}$ وجود دارد که بوسیله رابطه زیر به جریان $\dot{\mathbf{i}}$ مربوط میشود :

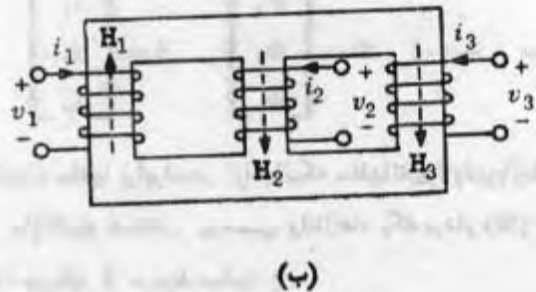
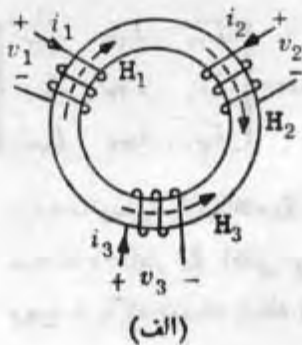
$$(۱-۱۱) \quad \mathbf{v} = \mathbf{L} \frac{d\dot{\mathbf{i}}}{dt}$$

از آنجائیکه ماتریس ضرایب القاء $\mathbf{L}$ همواره متقارن است ($L_{12} = L_{21}$ و غیره)، دسته‌ای از سلفهای تزویج شده با سه سیم پیچی، بجای نه پارامتر، بوسیله شش پارامتر مشخص میشوند. علامتهای ضرایب القاء متقابل L_{12} ، L_{13} و L_{23} را میتوان با بررسی جهت میدان مغناطیسی القاء شده تعیین کرد.

مثال ۱-۱ = شکل (۱-۴ الف) سه سلف را که روی یک هسته آهنی پیچیده شده‌اند نشان میدهد. جهت قرار دادی ولتاژ و جریان برای این سه سلف را مطابق شکل انتخاب میکنیم. جهت میدانهای مغناطیسی ایجاد شده در اثر جریانهای مثبتی که از سلفها میگذرند را میتوان بوسیله قانون دست راست تعیین نمود. بعنوان مثال، پیکان مشخص شده با علامت $\vec{H}_1$ جهت میدان مغناطیسی ایجاد شده در اثر جریان مثبت $\dot{i}_1$ راوتنیکه $\dot{i}_2 = \dot{i}_3 = 0$ است نشان میدهد. چنانکه در شکل نشان داده شده است $\vec{H}_2$ و $\vec{H}_3$ دارای جهات یکسان هستند ولی $\vec{H}_3$ جهت مخالف دارد. بنابراین L_{13} مثبت میباشد درحالیکه L_{12} و L_{23} منفی هستند.

تمرین - در سلفهای تزویج شده با سه سیم پیچی شکل (۱-۴ ب)، علامتهای ضرایب القاء متقابل L_{12} ، L_{13} و L_{23} را تعیین کنید.

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها



شکل ۴-۱- مثالهایی از سلفهای تزویج شده با سه سیم‌پیچی

در اینجا مفید است که یک ماتریس ضرایب القاء معکوس^(۱) را بصورت زیر تعریف کنیم:

$$\Gamma \triangleq \mathbf{L}^{-1}$$

با این تعریف، معادله (۱-۱۰) بدین صورت درمی‌آید:

$$\mathbf{i} = \Gamma \Phi \quad (1-12)$$

بعنوان مثال، معادلات اسکالر برای سلفهای تزویج شده با دو سیم‌پیچی برحسب عناصر ماتریس ضرایب القاء معکوس چنین می‌باشند:

$$(1-13) \quad \begin{cases} i_1 = \Gamma_{11}\Phi_1 + \Gamma_{12}\Phi_2 \\ i_2 = \Gamma_{21}\Phi_1 + \Gamma_{22}\Phi_2 \end{cases}$$

که در آن، از تعریف یک ماتریس معکوس و یا از قاعده کرامر، داریم:

$$(1-14) \quad \Gamma_{11} = \frac{L_{22}}{\det \mathbf{L}}, \quad \Gamma_{22} = \frac{L_{11}}{\det \mathbf{L}}$$

و:

$$(1-14) \quad \Gamma_{12} = \Gamma_{21} = \frac{-L_{12}}{\det \mathbf{L}}$$

که در آن $\det \mathbf{L}$ نشان دهنده دترمینان ماتریس ضرایب القاء $\mathbf{L}$ میباشد. Γ_{ij} ها ضرایب القاء معکوس نامیده میشوند. معادله (۱-۱۳) برحسب ولتاژها چنین میشود:

$$i_1(t) = \Gamma_{11} \int_0^t v_1(t') dt' + \Gamma_{12} \int_0^t v_2(t') dt' + i_1(0)$$

(۱۰-۱ الف)

$$i_2(t) = \Gamma_{21} \int_0^t v_1(t') dt' + \Gamma_{22} \int_0^t v_2(t') dt' + i_2(0)$$

این معادلات، در هر لحظه t ، جریانهای سلفها را برحسب ولتاژها و جریانهای اولیه بیان میکنند. باین دلیل، در تجزیه و تحلیل گره، ماتریس ضرایب القاء معکوس از ماتریس ضرایب القاء مفیدتر است.

در حالت دائمی سینوسی، میتوان فازورهای جریان I_1 و I_2 را برحسب فازورهای

ولتاژ V_1 و V_2 بدین صورت نوشت:

$$I_1 = \frac{\Gamma_{11}}{j\omega} V_1 + \frac{\Gamma_{12}}{j\omega} V_2$$

(۱۰-۱ ب)

$$I_2 = \frac{\Gamma_{21}}{j\omega} V_1 + \frac{\Gamma_{22}}{j\omega} V_2$$

که در آن ω فرکانس زاویه ای است.

تبصره - بعنوان آخرین مطلب، بایستی تأکید نمود که ماتریس ضرایب القاء بخودی خود رفتار ولتاژ و جریان شاخه ها را بطور کامل مشخص نمیکند، و برای آنکه بتوان معادلات شبکه را بطور صحیح نوشت باید ماتریس ضرایب القاء و جهات قراردادی جریانهای سلفها، «هردو»، را بدانیم. جهات قراردادی ولتاژها از قرار داد قبلی ما درباره اینکه هروقت جهات قراردادی متناظر را بکار ببریم، توان داده شده «بوسیله» محیط خارج «به» سلفها، مساوی

$$514 \quad v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t)$$

۴-۱- اتصال سری و موازی سلفهای تزویج شده

اکنون توجه خود را به مسأله محاسبه ضریب القاء^(۱) معادل دو سلف خطی تزویج شده که بطور سری یا موازی بهم وصل شده‌اند معطوف می‌داریم.

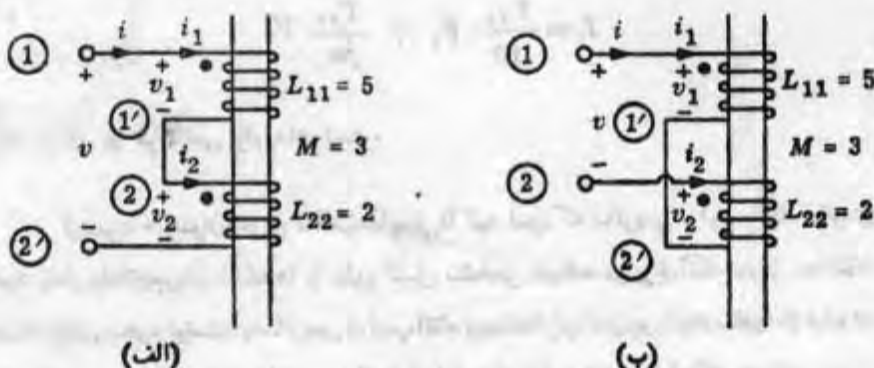
مثال ۲- شکل (۱-۵) دو سلف تزویج شده که بطور سری بهم متصل شده‌اند را نشان می‌دهد. برای تعیین ضریب القاء بین سرهای ① و ①'، ابتدا علامت ضریب القاء متقابل را تعیین می‌کنیم. از جهت‌های قراردادی انتخاب شده برای دو جریان i_1 و i_2 مشاهده می‌شود که میدانهای مغناطیسی $\vec{H}_1$ و $\vec{H}_2$ ، به ترتیب ناشی از جریانهای i_1 و i_2 ، هم جهت هستند و این موجب مثبت بودن M می‌گردد. (قرار داد نقطه را هم میتوان بکار برد، چون هر دو جریان i_1 و i_2 از سر نقطه دار وارد سلف می‌شوند، M مثبت است). از معادلات جریان و شار، داریم:

$$\Phi_1 = L_{11}i_1 + Mi_2 = 5i_1 + 3i_2$$

(۱-۱۶)

$$\Phi_2 = Mi_1 + L_{22}i_2 = 3i_1 + 2i_2$$

که در آن ضرایب القاء برحسب هائری بیان شده‌اند. چون دو سلف بطور سری بهم متصل شده‌اند، KCL لازم می‌دارد که:



شکل ۵-۱- اتصال سری سلفهای تزویج شده

$$i = i_1 = i_2$$

KVL لازم می‌دارد که $v = v_1 + v_2$ ، و قانون فاراده بیان می‌دارد که $v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}$ و

$v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt}$. بنابراین، اگر Φ شاری باشد که $v = \frac{d\Phi}{dt}$ برقرار گردد، بدست می‌آید:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi_1}{dt} + \frac{d\Phi_2}{dt}$$

و اگر شارهای اولیه برابر صفر باشند، با انتگرال گیری بدست می‌آید:

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

و از معادله (۱-۱۶) داریم:

$$\Phi = 8i_1 + 5i_2 = 13i$$

بنابراین، ضریب القاء اتصال سری چنین است:

$$L = \frac{\Phi}{i} = 13 \text{ هانری}$$

اکنون فرض کنید که دو سلف را مطابق شکل (۱-۵ ب) بهم وصل کنیم. سر ۱' سلف اول به سر ۱' سلف دوم وصل شده است. برای تعیین ضریب القاء اتصال سری بین سرهای ۱ و ۱'، از KCL مشاهده می‌کنیم که:

$$i = i_1 = -i_2$$

KVL لازم می‌دارد که $v = v_1 - v_2$. از آنجائیکه $v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}$ و $v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt}$ است، با قرار دادن

$v = \frac{d\Phi}{dt}$ بدست خواهیم آورد:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{d\Phi_2}{dt}$$

مجدداً فرض می‌کنیم که شارهای اولیه برابر صفر باشند. با انتگرال گیری بدست می‌آید:

$$\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = 2i_1 + i_2 = i$$

بنابراین ضریب القاء اتصال سری در شکل (۱-۵) ب) چنین است :

$$L = \frac{\Phi}{i} = 1 \quad \text{هائری}$$

«در نتیجه»، ضریب القاء اتصال سری دو سلف تزویج شده به سادگی با قاعده زیر بدست می‌آید :

$$L = L_{11} + L_{22} \pm 2 |M|$$

که در آن، علامت مثبت وقتی برقرار است که شارهای ایجاد شده در اثر جریان مشترک در هر سلف جهات یکسان داشته باشند، و علامت منفی وقتی برقرار است که این شارها جهات مخالف داشته باشند.

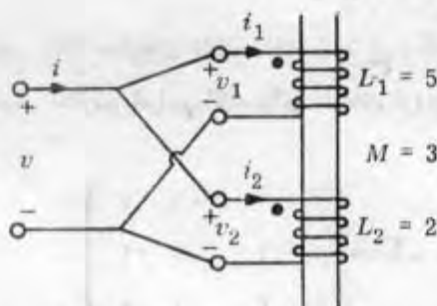
مثال ۳- در شکل (۱-۶)، دو سلف را بطور موازی وصل می‌کنیم. برای تعیین

ضریب القاء اتصال موازی ساده‌تر است که ضریب القاء معکوس سلفهای تزویج شده را بدست آوریم تا ضریب القاء معکوس اتصال موازی را از روی آنها محاسبه کنیم. ضرایب القاء معکوس، از معادله (۱-۱۴)، چنین هستند :

$$\Gamma_{11} = \frac{2}{\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}} = 2 \quad \Gamma_{22} = \frac{0}{\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}} = 0$$

ضریب القاء متقابل معکوس با Γ_{12} نشان داده می‌شود و مقدار آن چنین است :

$$\Gamma_{12} = \frac{-2}{\det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}} = -2$$



شکل ۶-۱- مثال ۳ : اتصال موازی سلفهای تزویج شده

$$i_1 = \Gamma_{11}\Phi_1 + \Gamma_{12}\Phi_2 = 2\Phi_1 - 2\Phi_2$$

$$i_2 = \Gamma_{21}\Phi_1 + \Gamma_{22}\Phi_2 = -2\Phi_1 + 5\Phi_2$$

با مراجعه به شکل (۶-۱) مشاهده میکنیم که KVL لازم میدارد :

$$v_1(t) = v_2(t) \quad \text{برای همه } t$$

اگر فرض کنیم : $i_1(0) = \Phi_1(0) = 0$ و $i_2(0) = \Phi_2(0) = 0$ باشد ، با انتگرال گیری ولتاژها بدست می آید :

$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t) \quad \text{برای همه } t$$

اگر مقدار مشترك Φ_1 و Φ_2 را Φ بنامیم ، از روابط میان شار و جریان داریم :

$$i = i_1 + i_2 = -\Phi_1 + 2\Phi_2 = \Phi$$

بنابراین ، ضریب القاء اتصال موازی شکل (۶-۱) چنین است :

$$L = \frac{\Phi}{i} = 1 \quad \text{هائری}$$

«در نتیجه» ، ضریب القاء معکوس اتصال موازی دو سلف تزویج شده باقاعده زیر داده

میشود :

$$\Gamma = \Gamma_{11} + \Gamma_{22} \pm 2 | \Gamma_{12} |$$

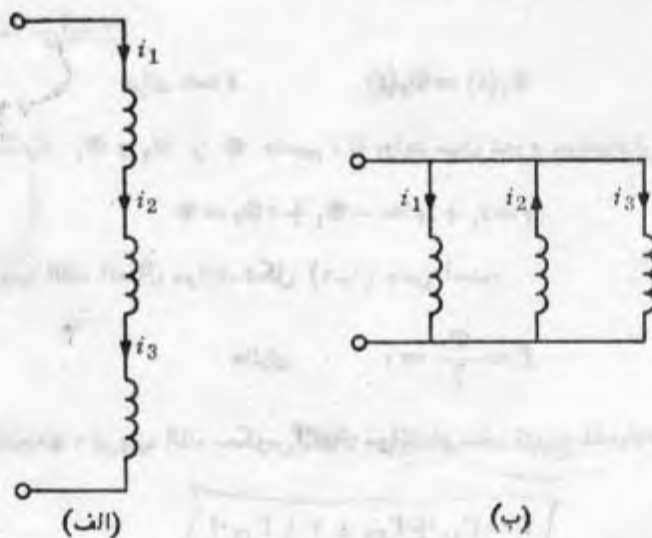
که در آن علامت مثبت وقتی برقرار است که شارهای بوجود آمده از جریان هرسلف (ناشی از ولتاژ مشترك v) جهت های مخالف داشته باشند ، و علامت منفی وقتی برقرار است که این شارها جهت های یکسان داشته باشند .

تمرین - ضرایب القاء مدارهای نشان داده شده در شکل‌های (۱-۷ الف) و (۱-۷ ب) را محاسبه کنید. ماتریس ضرایب القاء برای سلف‌های تزویج شده با سه سیم‌پیچی چنین است :

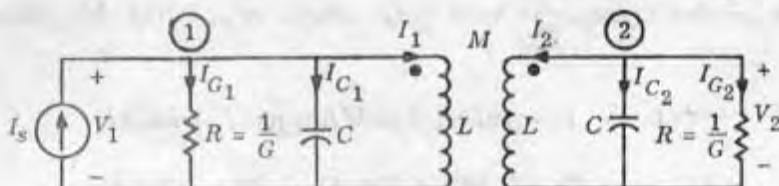
$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

۱-۵- مدار تطبیق شده مضاعف

یک مدار بسیار مفید که در سیستم‌های ارتباطی بکار میرود مدار تطبیق شده مضاعف^(۱) شکل (۱-۸) می‌باشد. ما تجزیه و تحلیل ساده شده‌ای از این مدار را بیان خواهیم کرد تا طرز بکار بردن تجزیه و تحلیل گره در یک مدار با سلف‌های تزویج شده را نشان دهیم و همچنین مفهومی حالت دائمی فصل هفتم را مرور کنیم. دو مدار تشدید موازی بطور مغناطیسی تزویج شده‌اند. برای سادگی فرض می‌کنیم



شکل ۱-۷- اتصالات سری و موازی سلف‌های تزویج شده با سه سیم‌پیچی



شکل ۱-۸ - مدار تطبیق شده مضاعف

که دو مدار تشدید همانند باشند. ماتریس ضرایب القاء سلفهای تزویج شده بصورت زیر داده شده است:

$$(۱-۱۷) \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & L \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن k ضریب تزویج، و M مثبت است (داده‌های شکل (۱-۸) را ببینید). در تجزیه و تحلیل گره ساده‌تر است که از ماتریس ضرایب القاء معکوس استفاده شود:

$$(۱-۱۸) \quad \Gamma = \mathbf{L}^{-1} = \frac{1}{(1-k^2)L} \begin{bmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{bmatrix}$$

اگر فرض کنیم ورودی یک سینوسی باشد:

$$i_s(t) = \text{Re}(I_s e^{j\omega t})$$

در این صورت، خروجی حالت دائمی سینوسی، یک ولتاژ $v_r(t)$ بصورت زیر خواهد بود:

$$v_r(t) = \text{Re}(V_r e^{j\omega t})$$

میخواهیم برای تمام ω ، پاسخ حالت دائمی سینوسی را تعیین کنیم. یعنی میخواهیم تابع شبکه را تعیین نمائیم:

$$(۱-۱۹) \quad H(j\omega) = \frac{V_r}{I_s}$$

در تجزیه و تحلیل حالت دائمی، ما از نمایش فازوری برای تمام جریانها و ولتاژهای شاخه‌ها استفاده می‌کنیم. از معادلات (۱-۵)، (۱-۶) و (۱-۹)، رابطه میان فازورهای

نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

جریان و فازورهای ولتاژ، برای سلفهای تزویج شده با دوسیم پیچی، بسادگی چنین است:

$$(۲۰-۱) \quad V_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 = j\omega L I_1 + j\omega L k I_2$$

$$(۲۰-۲) \quad V_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 = j\omega L k I_1 + j\omega L I_2$$

که در آن V_1 و V_2 فازورهای ولتاژ در دو سر دو مدار تشدید میباشند، و I_1 و I_2 فازورهای جریان داخل سلفها هستند. با استفاده از معادلات (۱۵-۱) و (۱۸-۱)، برحسب ضرایب القاء معکوس بدست می‌آوریم:

(۲۱-۱) الف)

$$I_1 = \frac{1}{j\omega} \Gamma_{11} V_1 + \frac{1}{j\omega} \Gamma_{12} V_2 = \frac{1}{j\omega L(1-k^2)} (V_1 - k V_2)$$

(۲۱-۲) ب)

$$I_2 = \frac{1}{j\omega} \Gamma_{21} V_1 + \frac{1}{j\omega} \Gamma_{22} V_2 = \frac{1}{j\omega L(1-k^2)} (-k V_1 + V_2)$$

در تجزیه و تحلیل گره در حالت دائمی، دو فازور ولتاژ گره V_1 و V_2 را بعنوان متغیرهای شبکه انتخاب میکنیم و معادلات KCL را برحسب فازورهای جریان در دو گره ① و ② مینویسیم. در گره ① داریم:

$$I_{G_1} + I_{C_1} + I_1 = I_s$$

که در آن:

$$I_{G_1} = G V_1 \quad I_{C_1} = j\omega C V_1$$

و I_1 توسط معادله (۲۱-۱) الف) داده شده است. برحسب فازورهای ولتاژ داریم:

$$(۲۲-۱) \quad \left[G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)} \right] V_1 - \frac{k}{j\omega L(1-k^2)} V_2 = I_s$$

و در گره ② داریم:

$$I_2 + I_{C_2} + I_{G_2} = 521$$

که در آن :

$$I_{C_r} = j\omega C V_r \quad I_{G_r} = G V_r$$

و I_r توسط معادله (۱-۲۱) ب داده شده است. برحسب فازورهای ولتاژ داریم :

$$(1-23) \quad -\frac{k}{j\omega L(1-k^2)} V_1 + \left[G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L(1-k^2)} \right] V_r = 0$$

بنابراین دو معادله خطی جبری با ضرایب مختلط (۱-۲۲) و (۱-۲۳) را برحسب دو مجهول V_1 و V_r داریم. فازور ولتاژ خروجی V_r را میتوان، بلافاصله، طبق قاعده کرامر، برحسب فازور جریان ورودی I_r حل نمود. باوجود این، به علت متقارن بودن مدار و معادلات، روش ساده تری برای حل این معادلات وجود دارد. دو متغیر جدید را چنین تعریف می کنیم :

$$(1-24) \quad 2V_+ = V_1 + V_r \quad 2V_- = V_1 - V_r$$

یا :

$$(1-25) \quad V_1 = V_+ + V_- \quad V_r = V_+ - V_-$$

با جمع کردن معادلات (۱-۲۲) و (۱-۲۳) بدست می آید :

$$(1-26) \quad \left[G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L(1+k)} \right] V_+ = \frac{I_r}{2}$$

با تفریق کردن (۱-۲۲) از (۱-۲۳) بدست می آید :

$$(1-27) \quad \left[G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L(1-k)} \right] V_- = \frac{I_r}{2}$$

معادلات (۱-۲۶) و (۱-۲۷) درست بهمان صورت معادلات دو مدار تشدید RLC موازی تنها، به ترتیب با ضرایب القاء $L(1+k)$ و $L(1-k)$ ، میباشند. از آنجا که فازور ولتاژ خروجی $V_r = V_+ - V_-$ است، میتوان آنرا بعنوان اختلاف دو فازور خروجی دو مدار تشدید مختلف که تزویج نشده اند در نظر گرفت.

اکنون، برای ساده کردن نتایج، فرکانسهای تشدید و ضرایب کیفیت دو مدار تشدید تنها را معرفی می کنیم. گیریم :

نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$(1-28) \quad \omega_+^r = \frac{1}{LC(1+k)} \quad \omega_-^r = \frac{1}{LC(1-k)}$$

که در آن $\omega_+ < \omega_-$ است. گیریم:

$$(1-29) \quad Q_+ = \omega_+ CR \quad Q_- = \omega_- CR$$

در این صورت، از (۱-۲۶) و (۱-۲۷) نتیجه می‌شود که:

$$(1-30) \quad V_+ = \frac{1}{r} I_s R \frac{1}{1 + jQ_+ \left(\frac{\omega}{\omega_+} - \frac{\omega_+}{\omega} \right)}$$

و:

$$(1-31) \quad V_- = \frac{1}{r} I_s R \frac{1}{1 + jQ_- \left(\frac{\omega}{\omega_-} - \frac{\omega_-}{\omega} \right)}$$

بنابراین، فازور ولتاژ خروجی چنین است:

$$(1-32) \quad V_r = \frac{1}{r} I_s R \left[\frac{1}{1 + jQ_+ \left(\frac{\omega}{\omega_+} - \frac{\omega_+}{\omega} \right)} - \frac{1}{1 + jQ_- \left(\frac{\omega}{\omega_-} - \frac{\omega_-}{\omega} \right)} \right]$$

و تابع شبکه چنین است:

$$(1-33) \quad H(j\omega) = \frac{V_r}{I_s} = \frac{1}{r} R \left[\frac{1}{1 + jQ_+ \left(\frac{\omega}{\omega_+} - \frac{\omega_+}{\omega} \right)} - \frac{1}{1 + jQ_- \left(\frac{\omega}{\omega_-} - \frac{\omega_-}{\omega} \right)} \right]$$

اگر ضرایب کیفیت Q_+ و Q_- خیلی بزرگتر از واحد بوده و ضریب تزویج کوچک باشد، تابع شبکه داده شده در معادله (۱-۳۳) را میتوان بازهم ساده‌تر نمود. معه‌ذا، برای بدست آوردن فرمولهای ساده شده اقدام می‌نماییم کرد. تنها می‌خواهیم خاطرنشان کنیم که مدار تطبیق شده مضاعف می‌تواند پهنای باند عرض‌تری از مدار تشدید می‌کننده



شکل ۹-۱- منحنی اندازه نوعی یک مدار تطبیق شده مضاعف

فصل قبل بررسی کردیم ایجاد نماید. منحنی اندازه نوعی $|H(j\omega)|$ در شکل (۹-۱) نشان داده شده است. نوکهای منحنی تقریباً متناظر با ω_+ و ω_- ، دو مدار RLC تشدید تنها، که در معادله (۱-۲۸) تعریف شدند، میباشد.

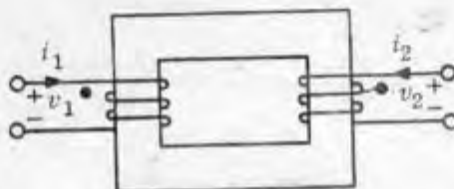
۲- ترانسفورماتورهای ایده آل

ترانسفورماتور ایده آل نمایش ایده آلی ترانسفورماتورهای فیزیکی است که در بازار موجود است. با توجه به چنین ترانسفورماتورهای فیزیکی، ترانسفورماتور ایده آل با سه فرض ایده آل سازی زیر مشخص میشود:

- (۱) ترانسفورماتور ایده آل انرژی تلف نمیکند.
 - (۲) دارای هیچگونه شارنشستی^(۱) نیست، یعنی ضریب تزویج برابر واحد است.
 - (۳) ضریب خود القاء هرسیم پیچی بینهایت است.
- ترانسفورماتور ایده آل مدل بسیار مفیدی از نظر محاسبات مدار میباشد چون با وصل کردن چند عنصر اضافی (G ، L ، R) به سرهای آن میتوان با دقت مناسبی رفتار سرهای ترانسفورماتور فیزیکی را نمایش داد.

۲-۱- ترانسفورماتور ایده آل با دو سیم پیچی

اکنون بطور حسی نشان میدهم که چگونه از پیچیدن دو سیم پیچی بر روی یک هسته مغناطیسی، مطابق شکل (۲-۱)، و با بینهایت قرار دادن ضریب نفوذ مغناطیسی، یک ترانسفورماتور ایده آل بدست می آید. فرض میکنیم که سیم پیچی هادارای اتلاف و ظرفیت



شکل ۱-۲ = یک ترانسفورماتور که از پیچیدن دو سیم‌پیچی روی یک هسته مشترک بدست آمده است .

پراکنده (۱) نباشند . برای ساده کردن بررسی‌های بعدی ، جهات قرار دادی برای جریانها را طوری اختیار میکنیم که ضریب القاء متقابل مثبت باشد . اگر ضریب نفوذ مغناطیسی هسته بینهایت باشد ، دراین صورت تمام میدان مغناطیسی در هسته محبوس خواهد بود و هر خط القاء مغناطیسی که از یک حلقه سیم‌پیچی ۱ بگذرد ، از یکایک حلقه‌های سیم‌پیچی ۲ خواهد گذشت . بنابراین ، اگر Φ شار گذرنده از یک سیم‌پیچی با یک حلقه که در محلی دلخواه روی هسته قرار دارد باشد ، و n_1 و n_2 بترتیب تعداد دورهای سیم‌پیچی‌های ۱ و ۲ باشند ، دراین صورت شار کل Φ_1 و Φ_2 که بترتیب از سیم‌پیچی‌های ۱ و ۲ میگذرد چنین است :

$$\Phi_1 = n_1 \Phi \quad \text{و} \quad \Phi_2 = n_2 \Phi$$

چون $v_1 = \frac{d\Phi_1}{dt}$ و $v_2 = \frac{d\Phi_2}{dt}$ است ، برای تمام زمانهای t و تمام ولتاژهای v_1 و v_2 داریم :

$$(۱-۲) \quad \boxed{\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{n_1}{n_2}}$$

اکنون به محاسبه Φ برحسب «نیروی محرکه مغناطیسی» (۲) (mmf) و رلوکتانس مغناطیسی» (۳) $\mathcal{R}$ توجه کنید . مشابه قانون اهم برای یک مقاومت خطی ، رلوکتانس $\mathcal{R}$ ،

نیروی محرکه مغناطیسی و شار Φ را با رابطه زیر بهم ارتباط میدهد:

$$\text{mmf} = \mathcal{R}\Phi$$

با توجه به فرض ما در مورد انتخاب جهات قراردادی برای جریانهای i_1 و i_2 ، mmf با $n_1 i_1 + n_2 i_2$ برابر است، و بنابراین:

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = \mathcal{R}\Phi$$

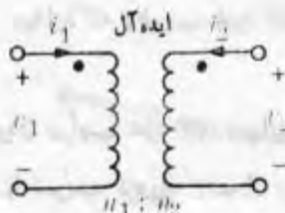
اکنون اگر نفوذ پذیری مغناطیسی بینهایت شود، $\mathcal{R}$ صفر میگردد، چون رلوکتانس با μ تناسب معکوس دارد. واضح است که:

$$n_1 i_1 + n_2 i_2 = 0$$

یا، برای تمام t و تمام جریانهای i_1 و i_2 :

$$(2-2) \quad \boxed{\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = -\frac{n_2}{n_1}}$$

معادلات (۲-۱) و (۲-۲) بعنوان معادلات «تعریف کننده» دوترانسفورماتور ایده آل انتخاب می شوند. بنابراین، هر موقع که اصطلاح ترانسفورماتور ایده آل با دو سیم پیچی را بکار میبریم، منظور ما یک دستگاه دو قطبی خواهد بود که معادلات ولتاژ و جریان آن (۲-۱) و (۲-۲) میباشند. بخصوص، به علامت منفی در (۲-۲) توجه کنید. در دیگرام های مداری، ترانسفورماتورهای ایده آل با مدار نشان داده شده در شکل (۲-۲) نمایش داده میشود.



شکل ۲-۲- ترانسفورماتور ایده آل، مطابق تعریف،

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{n_2}{n_1} \quad \text{و} \quad \frac{i_1}{i_2} = -\frac{n_2}{n_1}$$

تبصره ۱- چون معادلات (۲-۱) و (۲-۲) را میتوان بصورت «توابع خطی» که v_1 را برحسب v_2 و i_1 را برحسب i_2 بیان میکنند تعبیر نمود و چون ضرایب n_1 و n_2 به زمان بستگی ندارند، از این جهت ترانسفورماتور ایده‌آل یک عنصر مدار «خطی تغییر ناپذیر بازمان» میباشد.

تبصره ۲- از (۲-۱) و (۲-۲)، برای تمام جریانها و ولتاژها و برای تمام t داریم:

$$v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = 0 \quad (2-3)$$

بنابراین، در تمام لحظات، مجموع توانهای ورودی از هر قطب برابر صفر است. هیچ انرژی ذخیره نمیشود، و هیچ انرژی تلف نمیگردد. همانقدر توان که از یک جفت سر وارد ترانسفورماتور میشود، از جفت سر دیگر خارج میگردد. این حقایق، اغلب با گفتن اینکه ترانسفورماتور ایده‌آل یک عنصر «بی اتلاف و بدون ذخیره انرژی» است، و بنابراین بدون حافظه میباشد، مشخص میشوند. توجه کنید که خازن‌ها و سلف‌ها وجفت‌هایی از سلف‌ها با تزویج متقابل، (حتی وقتی که $k=1$ است) نیز عناصر بی‌اتلاف میباشند، ولی، انرژی ذخیره «میکند».

تبصره ۳- از (۲-۱)، ولتاژ v_1 دوسر سیم پیچی ۱ به i_1 یا به i_2 بستگی ندارد و تنها به v_2 بستگی دارد. بطریق مشابه، از (۲-۲)، جریان i_1 تنها به i_2 بستگی دارد، و از v_1 و v_2 مستقل است. بخصوص، اگر میخواستیم ضریب خود القاء سلف ۱ را اندازه‌گیری کنیم (پس سلف ۲ مدار باز بوده، بنابراین $i_2=0$ است)، آنگاه معادله (۲-۲) لازم میدارد که ولتاژ v_1 اعمال شده به سلف ۱ هر چه قدر که باشد، بطور متحد $i_1(t)=0$ برقرار باشد. این حقیقت لازم میدارد که «ضریب خود القاء هر سلف یک ترانسفورماتور ایده‌آل بینهایت باشد».

تبصره ۴- علاوه بر دارا بودن ضرایب خود القاء بینهایت، یک ترانسفورماتور ایده‌آل با دوسیم پیچی، یک جفت سلف با ضریب تزویج $k=1$ میباشد. انرژی ذخیره شده برای سلف‌های تزویج شده را میتوان بصورت زیر نوشت: (معادله (۱-۷) را ببینید):

$$\begin{aligned}
 g(i_1, i_2) &= \frac{1}{\gamma} (L_{11}i_1^2 + 2\sqrt{L_{11}L_{22}}i_1i_2 + L_{22}i_2^2) \\
 &\quad + \left(\frac{|M|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}} - 1 \right) \sqrt{L_{11}L_{22}} i_1i_2 \\
 &= \frac{1}{\gamma} (\sqrt{L_{11}} i_1 + \sqrt{L_{22}} i_2)^2 + (k-1) \sqrt{L_{11}L_{22}} i_1i_2
 \end{aligned}$$

در نتیجه معادله (۲-۳)، برای یک ترانسفورماتور ایده آل، g متعده با صفر است. بنابراین:

$$k=1 \quad (2-4)$$

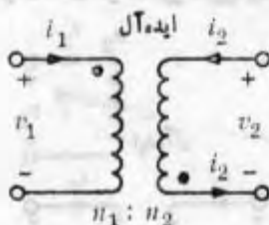
و:

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{\sqrt{L_{22}}}{\sqrt{L_{11}}}$$

توجه کنید که معادله آخر با (۲-۲) سازگار است چون L_{22} و L_{11} به ترتیب با n_2^2 و n_1^2 متناسب هستند.

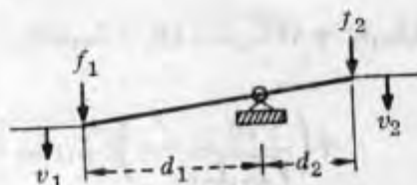
تبصره ۵- در نتیجه انتخاب جهات قرار دادی ما، معادلات (۲-۱) و (۲-۲) دارای علامتهای نشان داده شده هستند. اگرما جهات قرار دادی را مطابق شکل (۲-۳) انتخاب کنیم (توجه کنید که i_2 از طرف سرفقه گذاری شده از سیم پیچی خارج میشود)، معادلات چنین میشوند:

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{n_1}{n_2} \quad \text{و} \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



شکل ۲-۳ = ترانسفورماتور ایده آل، با توجه به محل نقاط،

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{528}{n_2} \quad \text{و} \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{n_2}{n_1}$$



شکل ۴-۲- تشابه مکانیکی یک ترانسفورماتور ایده‌آل با

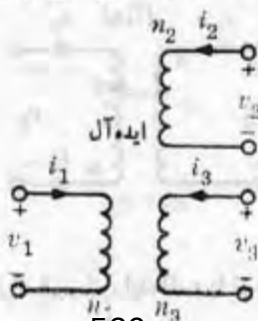
$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{d_1}{d_2} \quad \text{و} \quad \frac{f_1}{f_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

تبصره ۲- ترانسفورماتور ایده‌آل مشابه الکتریکی یک اهرم مکانیکی است که از یک لولای بدون مالش و یک میله بی‌جرم و فوق‌العاده سخت تشکیل شده باشد. (شکل (۲-۴) را ببینید). واضح است که با چنین فرضیه‌ای، روابط میان نیروهای f و سرعت‌های v چنین است:

$$\frac{f_1(t)}{f_2(t)} = \frac{d_2}{d_1} \quad \frac{v_1(t)}{v_2(t)} = -\frac{d_1}{d_2}$$

نداشتن مالش متناظر با نبودن اتلاف انرژی در ترانسفورماتور ایده‌آل می‌باشد. فوق‌العاده سخت بودن میله با فرض نداشتن ظرفیت پراکنده در ترانسفورماتور ایده‌آل متناظر است، و بی‌جرم بودن میله متناظر با نداشتن انرژی مغناطیسی ذخیره شده در ترانسفورماتور ایده‌آل می‌باشد.

تبصره ۷- بعنوان آخرین توضیح، بایستی تذکر داد که میتوان ترانسفورماتورهای باچندسیم پیچی در نظر گرفت. بعنوان مثال، ترانسفورماتورها با یک هسته سه سیم پیچی (شکل (۲-۵))



529

شکل ۲-۵- یک ترانسفورماتور ایده‌آل با سه سیم پیچی

عناصر تزویج کننده و مدارهای تزویج شده

را در نظر بگیرید. معادلات آن چنین هستند:

$$\frac{v_1}{n_1} = \frac{v_2}{n_2} = \frac{v_3}{n_3} \quad n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3 = 0$$

این ترانسفورماتور ایده‌آل با یک هسته و سه سیم پیچی، بازهم یک عنصر «خطی تغییر ناپذیر با زمان، و بی اتلاف و بدون ذخیره انرژی است».

۲-۲- خواص تغییر دهنده گی امپدانس

۱- یک بار مقاومتی^(۱) با مقاومت R_L که به سیم پیچی ثانویه^(۲) یک ترانسفورماتور ایده‌آل، مطابق شکل (۲-۶)، متصل است را در نظر بگیرید. مقاومت ورودی چنین است:

$$R_{in} = \frac{v_1}{i_1} = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)v_2}{-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)i_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(\frac{v_2}{-i_2}\right)$$

اما:

$$v_2 = -R_L i_2$$

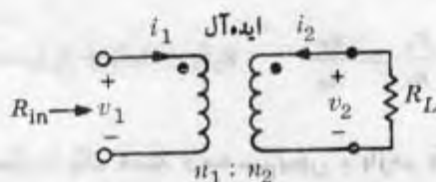
بنابراین:

$$(2-5) \quad R_{in} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 R_L$$

۲- اکنون رفتار حالت دائمی سینوسی مدار خطی تغییر ناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۲-۷) را در نظر می گیریم. بار، یک امپدانس یک قطبی $Z_L(j\omega)$ است،

$$(2-6) \quad Z_{in}(j\omega) = \frac{V_1}{I_1} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(\frac{V_2}{-I_2}\right) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 Z_L(j\omega)$$

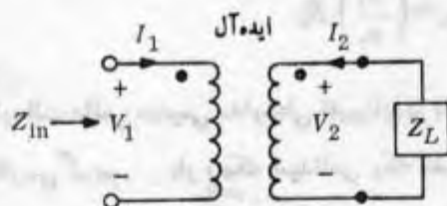
معادلات (۲-۵) و (۲-۶) تعبیر جالبی دارند. بدین معنی، که ترانسفورماتورهای



شکل ۶-۲- مقاومت ورودی یک ترانسفورماتور ایده‌آل ختم شده با :

$$R_{in} = \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 R_L$$

ایده‌آل امپدانس ظاهری^(۱) یک بار را تغییر می‌دهند و میتوان آنها را برای تطبیق امپدانس مدارهای با امپدانس متفاوت بکاربرد. بعنوان مثال، امپدانس ورودی یک بلندگو معمولاً در حدود ۸ اهم است که برای اتصال مستقیم به بسیاری از تقویت کننده‌هایی که با لاسپ‌خلاء و یا ترانزیستور کار میکنند، و امپدانس خروجی مثلاً ۸۰۰ اهم دارند، مقدار بسیار کوچکی است. اگر یک ترانسفورماتور بین خروجی تقویت کننده قدرت و ورودی بلندگو قرار داده شود، و نسبت دورها چنان انتخاب گردد که تفاوت امپدانس بین خروجی تقویت کننده و ورودی بلندگو را ترمیم کند، تقویت کننده امپدانس مناسبی برای بکار



شکل ۷-۲- امپدانس ورودی یک ترانسفورماتور ایده‌آل ختم شده با

$$Z_{in} = \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 Z_L$$

انداختن بلندگو خواهد داشت. نسبت دورهای لازم برابر $10 = \sqrt{\frac{800}{8}}$ $\frac{n_1}{n_2}$ میباشد.

تمرین ۱- نشان دهید که اگر در شکل (۲-۷) بجای سربالایی ثانویه، سربائینی آن «نقطه گذاری» شده باشد، روابط (۲-۵) و (۲-۶) بازهم معتبر خواهند بود.

تمرین ۲- مدار شکل (۲-۸) را در نظر بگیرید، که در آن یک ترانسفورماتور ایده آل به دو سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان با ضرایب خود القاء L_a و L_b ، مطابق شکل نشان داده شده، متصل میباشد. ثابت کنید که این مدار دو قطبی معادل یک جفت سلف تزویج شده با ماتریس ضرایب القاء زیر میباشد:

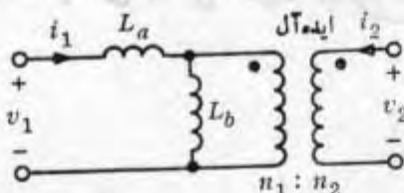
$$\begin{bmatrix} L_a + L_b & \frac{n_2}{n_1} L_b \\ \frac{n_2}{n_1} L_b & \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 L_b \end{bmatrix}$$

تمرین فوق این حقیقت مهم را نشان میدهد که سلفهای تزویج شده را میتوان با سلفهای تزویج نشده و یک ترانسفورماتور ایده آل جایگزین کرد.

۳- منابع کنترل شده

۳-۱- توصیف چهار نوع از منابع کنترل شده

تا اینجا ما تنها با منابع ولتاژ ناپسته و منابع جریان ناپسته مواجه بوده ایم. منابع



شکل ۲-۸- یک مدار دو قطبی که معادل یک جفت سلف تزویج شده است

نا بسته، ورودی‌های مدار را تشکیل می‌دهند. در این بخش، نوع دیگری از منابع را که «منبع کنترل شده»^(۱) و یا «منبع وابسته»^(۲) نامیده میشوند معرفی خواهیم کرد. یک منبع کنترل شده برای ساختن مدل عناصر الکترونیکی، مانند ترانزیستور، ضروری است. بموجب تعریف، یک منبع کنترل شده عنصری است که دو شاخه دارد، که در آن شاخه ۲ یک منبع ولتاژ و یا یک منبع جریان است، و شاخه ۱ یک مدار باز و یا یک مدار اتصال کوتاه میباشد. شکل موج منبع در شاخه ۲ تابعی از ولتاژ دو سر مدار باز (در شاخه ۱) و یا تابعی از جریان گذرنده از مدار اتصال کوتاه (در شاخه ۱) میباشد. عبارت دیگر، منبع قرار گرفته در شاخه ۲ بوسیله ولتاژ و یا جریان شاخه دیگر، یعنی شاخه ۱، «کنترل میشود». البته چهار امکان وجود دارد که در شکل (۳-۱) نشان داده شده‌اند، که در آن، علامتهای لوزی شکل منابع «کنترل شده» را نمایش می‌دهند. در شکل‌های (۳-۱ الف) و (۳-۱ ب) منابع شاخه ۲ منابع جریان میباشند که جریان آنها بترتیب به جریان شاخه ۱، که مدار اتصال کوتاه است، و ولتاژ شاخه ۱، که مدار باز است بستگی دارد. این منابع کنترل شده، بترتیب «منبع جریان کنترل شده با جریان» و «منبع جریان کنترل شده با ولتاژ» نامیده میشوند. در شکل‌های (۳-۱ ب) و (۳-۱ ت) منابع شاخه ۲ منابع ولتاژ میباشند. ولتاژ آنها بترتیب به ولتاژ شاخه ۱، که مدار باز است، و به جریان شاخه ۱، که مدار اتصال کوتاه است، بستگی دارد. این منابع کنترل شده بترتیب «منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ»، و «منبع ولتاژ کنترل شده با جریان» نامیده میشوند.

این چهار نوع منبع کنترل شده بوسیله معادلاتی که در شکل نشان داده شده‌اند مشخص میشوند. چهار ضریب تناسب α ، g_m ، μ و r_m در شکل (۳-۱) بترتیب نشان دهنده نسبت جریان، رسانایی انتقالی، نسبت ولتاژ و مقاومت انتقالی میباشند. بنابراین داریم:

منبع جریان کنترل شده با جریان : $\alpha = \frac{i_2}{i_1}$

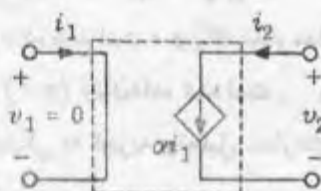
منبع جریان کنترل شده با ولتاژ : $g_m = \frac{i_2}{v_1}$

(۳-۱)

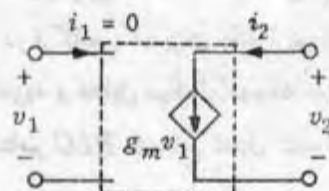
منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ : $\mu = \frac{v_2}{v_1}$

منبع ولتاژ کنترل شده با جریان : $r_m = \frac{v_2}{i_1}$

این منابع کنترل شده، که با معادلات (۳-۱) مشخص شده‌اند و در آنها α



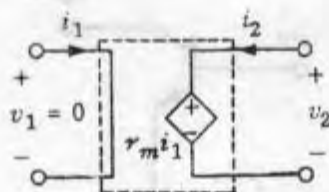
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

شکل ۳-۱- چهار نوع منبع کنترل شده. چون خرابی α ، g_m ، μ و r_m ثابت هستند این

منابع کنترل شده عناصر خطی تغییر ناپذیر با زمان می‌باشند. (الف) $v_1 = 0$ و

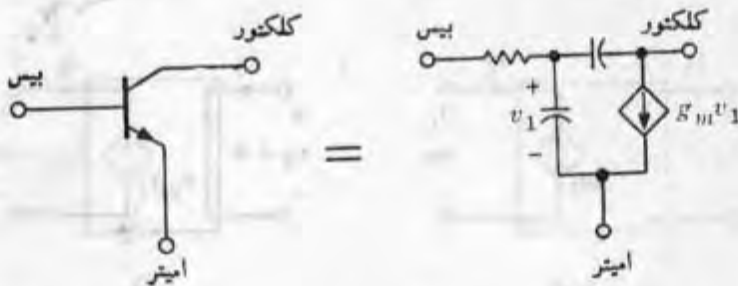
$i_2 = \alpha i_1$ ، منبع جریان کنترل شده با جریان (ب) $i_1 = 0$ و $i_2 = g_m v_1$ ،

منبع جریان کنترل شده با ولتاژ، (پ) $i_1 = 0$ و $v_2 = \mu v_1$ ، منبع ولتاژ کنترل

شده با ولتاژ، (ت) $v_1 = 0$ و $v_2 = r_m i_1$ ، منبع ولتاژ کنترل شده با جریان.

نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

μ ، g_m و r_m مقادیر ثابت میباشند، عناصر خطی تغییر ناپذیر با زمان هستند. یک منبع کنترل شده غیر خطی مشخصه‌ای مانند $i_p = f(i_1)$ دارد که در آن $f(0)$ یک تابع غیر خطی است. یک منبع کنترل شده خطی تغییر پذیر با زمان مشخصه‌ای مانند $i_p = \alpha(t)i_1$ دارد که در آن $\alpha(0)$ یک تابع داده شده از زمان است. منابع کنترل شده خطی تغییر پذیر با زمان برای نمایش دادن بعضی مدولاتورها^(۱) مفید میباشند. با وجود این، برای سادگی، تنها منابع کنترل شده خطی تغییر ناپذیر با زمان در اینجا بررسی خواهند شد. وسایل الکترونیکی مانند ترانزیستورها و لامپهای خلاء را میتوان، وحتیکه بصورت خطی سیگنال کوچک کار کنند، با یکبار بردن مقاومتهای خطی، خازنهای خطی و یک منبع کنترل شده خطی، مانند آنچه در شکل (۳-۱) نشان داده شده است، مدل سازی نمود. مدار معادل سیگنال کوچک نوعی یک ترانزیستور با امیتر زمین^(۲) شده در شکل (۳-۲) در نشان داده شده است، و یک مدار معادل خطی در فرکانس کم برای یک تریود^(۳) در شکل (۳-۳) نشان داده شده است. بنابراین، تجزیه و تحلیل سیگنال کوچک مدارهای الکترونیکی به تجزیه و تحلیل مدارهای خطی با عناصر RLC و منابع کنترل شده تبدیل میشود.



شکل ۳-۲- مدار معادل خطی سیگنال کوچک یک ترانزیستور با امیتر زمین شده که در آن

از یک منبع جریان کنترل شده با ولتاژ استفاده شده است.

۴۹۱

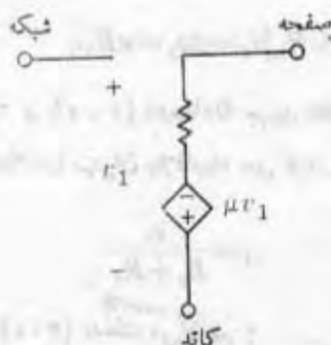
عناصر تزویج کننده و مدارهای تزویج شده

تبصره ۵ - دلایل بکار بردن علائم مختلف برای منابع ناپسته و وابسته چنین است:

۱- منابع ناپسته نقش کاملاً متفاوتی از منابع وابسته ایفاء میکنند. منابع ناپسته ورودیهای مدار هستند، و نعایش دهنده مولدهای سیگنال میباشد. یعنی آنها تأثیر محیط خارج بر روی مدار را نعایش میدهند. چون مشخصه های منابع ناپسته خطوط سوازی محور v یا محور i در صفحه $v-i$ میباشد از اینجهت آنها عناصر غیر خطی میباشد (معمولاً تغییر پذیر با زمان هستند). منابع وابسته برای مدل سازی پدیده هایی که در دستگاهای الکترونیکی رخ میدهد بکار میروند. منابع وابسته تزویج میان یک متغیر مدار در شاخه ۱ و یک متغیر مدار در شاخه ۲ را نعایش میدهند. منابع وابسته نوعی در شکل (۳-۱) داده شده اند. منابعی که در شکل (۳-۱) نشان داده شده اند عناصر چهار سر «خطی» تغییر ناپذیر با زمان میباشد.

۲- مدارهای خطی ممکن است شامل منابع ناپسته و منابع وابسته، هر دو، باشند. معهذا منابع وابسته بایستی خطی باشند، درحالیکه منابع ناپسته خطی نیستند.

۳- درقضایای شبکه های معادل تونن و نرتن (فصل شانزدهم)، منابع «وابسته» نقش کاملاً متفاوتی از منابع «ناپسته» ایفا میکنند.



شکل ۳-۳- مدار معادل لامپ تریود که در آن از یک منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ استفاده شده است.

۳-۲- مثالهایی از تجزیه و تحلیل مدار

در تجزیه و تحلیل مدار، هنگام نوشتن معادلات مدار، منابع کنترل شده را مانند منابع ناپسته در نظر می‌گیریم. این امر بوسیله دومتال زیر نشان داده خواهد شد.

مثال ۱- مدار سادهٔ نشان داده شده در شکل (۳-۱) را در نظر بگیرید. منبع کنترل

شدهٔ این مدار یک منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ می باشد، که در آن i_1 و i_2 و دوشاخهٔ آنرا نمایش می‌دهند، و چنین مشخص می‌شود:

$$v_r = \mu v_1 \quad (3-2)$$

که‌ریم که ورودی منبع ناپسته v_s و خروجی ولتاژ v_L دوسر مقاومت R_L باشد. چون دوشاخ وجود دارد، میتوان دو معادلهٔ مش را با جریانهای مش i_1 و i_2 بعنوان متغیرهای آنها نوشت. این دو معادله چنین هستند:

$$(R_s + R_1)i_1 = v_s \quad (3-3)$$

$$(R_r + R_L)i_2 = v_r \quad (3-4)$$

از آنجائیکه منبع کنترل شده با معادلهٔ (۳-۲) مشخص شده است، میتوان معادلهٔ (۳-۴) را بصورت زیر نوشت:

$$(R_r + R_L)i_2 = \mu v_1 = \mu R_1 i_1 \quad (3-5)$$

بنابراین، معادلات (۳-۳) و (۳-۵) دو معادلهٔ جبری خطی بر حسب دوجریان مجهول i_1 و i_2 میباشند. این معادلات را میتوان بلافاصله حل کرد. از (۳-۳) داریم:

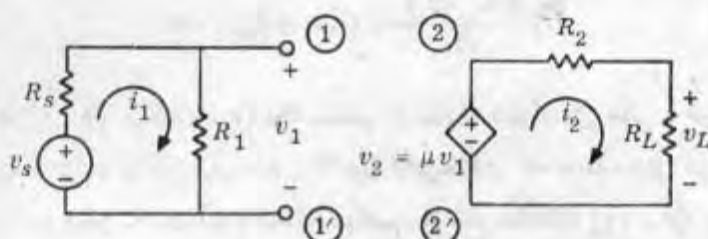
$$i_1 = \frac{v_s}{R_s + R_1} \quad (3-6)$$

بجایگذاری (۳-۶) در (۳-۵) بدست می‌آوریم:

$$i_2 = \frac{\mu v_s R_1}{(R_s + R_1)(R_r + R_L)}$$

بنابراین ولتاژ خروجی چنین است:

$$v_L = R_L i_2 = 537 \frac{\mu v_s R_1 R_L}{(R_s + R_1)(R_r + R_L)} \quad (3-7)$$



شکل ۳-۴ - مثال ۱: یک مدار ساده با یک منبع کنترل شده

تبصره ۱- اگر ثابت μ بزرگ باشد و مقاومتها بطرز مناسبی انتخاب شده باشند، ولتاژ خروجی v_L میتواند از ولتاژ ورودی v_s بسیار بزرگتر باشد. در این حالت مدار یک تقویت کننده ولتاژ ساده را نمایش میدهد.

تبصره ۲- مدار شکل (۳-۴) شامل دو مش می باشد که بیکدیگر متصل نیستند. منبع کنترل شده بعنوان عنصر تزویج کننده میان مشهای ۱ و ۲، ویا میان ورودی و خروجی، عمل میکند.

مثال ۲- مدار شکل (۳-۵) را در نظر بگیرید. منبع کنترل شده در مدار یک منبع جریان کنترل شده با ولتاژ می باشد، که در آن ①' ① و ②' ② دو شاخه آنها نمایش میدهند، و بوسیله رابطه زیر مشخص میشود:

$$i_2 = g_m v_1 \quad (3-8)$$

میخواهیم معادله دیفرانسیلی که منبع جریان ورودی i_2 و ولتاژ v_1 را بهم مربوط میکند بدست آوریم. در اینجا از تجزیه و تحلیل گره استفاده میکنیم. گیریم v_1 و v_2 دو ولتاژ گره باشند. دو معادله گره چنین هستند:

$$G_1 v_1 + C_1 \frac{dv_1}{dt} + C_2 \frac{d(v_1 - v_2)}{dt} = i_s \quad (3-9)$$

$$C_2 \frac{d(v_2 - v_1)}{dt} + G_2 v_2 = -i_2 \quad (3-10)$$

در معادله (۳-۱۰) بجای جریان i_2 میتوان 538 رابطه (۳-۸) را قرار داد و بنابراین معادله (۳-۱۰) بدین صورت درمی آید:

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

$$(۳-۱۱) \quad C_r \frac{d(v_r - v_1)}{dt} + G_r v_r + g_m v_1 = 0$$

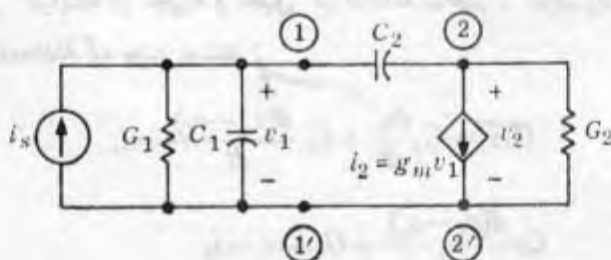
معادلات (۳-۹) و (۳-۱۱) یک سیستم دو معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت برحسب v_1 و v_r را تشکیل می‌دهند. اکنون از این حقیقت که جملهٔ مشتق در دو معادله یکسان است (بجز علامت آنها) استفاده می‌کنیم. از جمع معادلات (۳-۱۱) و (۳-۹) بدست می‌آوریم:

$$(۳-۱۲) \quad (G_1 + g_m)v_1 + C_1 \frac{dv_1}{dt} - i_s = -G_r v_r$$

با مشتق‌گیری از (۳-۱۲) و جایگذاری $\frac{dv_r}{dt}$ در (۳-۹)، معادلهٔ دیفرانسیل لازم را برحسب v_1 بدست می‌آوریم. بنابراین:

$$(۳-۱۳) \quad \frac{d^2 v_1}{dt^2} + \left(\frac{G_1 + g_m + G_r}{C_1} + \frac{G_1}{C_1} + \frac{G_r}{G_r} \right) \frac{dv_1}{dt} + \frac{G_1 G_r}{C_1 C_r} v_1 = \frac{1}{C_1} \frac{di_s}{dt} + \frac{G_r}{C_1 C_r} i_s$$

شرط اولیه لازم را میتوان باسانی از اطلاعات داده شده یعنی $v_1(0) = V_1$ و $v_r(0) = V_r$ بدست آورد. برای تعیین $\frac{dv_1}{dt}(0)$ در معادله (۳-۱۲)، $t=0$ قرار می‌دهیم و بدست می‌آوریم:



شکل ۳-۵- مثال ۲: یک مدار ساده ولتاژ یک منبع کنترل شده که با استفاده از

$$\frac{dv_1}{dt}(0) = \frac{1}{C_1} [i_s(0) - G_2 V_2 - (g_m + G_1) V_1]$$

با این دو شرط اولیه، و برای هر i_s داده شده، محاسبه جواب معادله (۱۳-۳) و همچنین جایگزین نمودن نتیجه آن در معادله (۱۲-۳) برای بدست آوردن v_2 کار ساده‌ای است.

۳-۳- خواص دیگر منابع کنترل شده

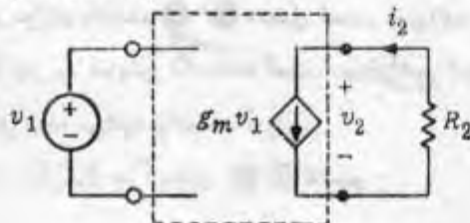
چنانکه در بخش (۱-۳) گفته شد، منابع کنترل شده نشان داده شده در شکل (۱-۳)، عناصر خطی تغییر ناپذیر با زمان میباشند. آنها عناصر تزویج کننده هستند چون ولتاژها و جریانهای دوشاخه مختلف را بهم ربط میدهند. چون معادلاتی که منابع کنترل شده را مشخص مینمایند (شکل (۱-۳) را ببینید) معادلات جبری خطی برحسب متغیرهای ولتاژها و جریانها میباشند، منابع کنترل شده را میتوان بعنوان عناصر دوقطبی مقاومتی در نظر گرفت. با در نظر داشتن اینکه ما از جبهات قراردادی متناظر استفاده میکنیم، توان لحظه‌ای که وارد مدار دوقطبی میشود چنین است:

$$p(t) = v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) \quad (14-3)$$

چون شاخه ۱ یعنی شاخه ورودی مدار اتصال کوتاه ($v_1=0$) و یا مدار باز ($i_1=0$) است توان لحظه‌ای برای هر چهار نوع منبع کنترل شده چنین است:

$$p(t) = v_2(t)i_2(t)$$

گیریم شاخه ۱ یک منبع جریان کنترل شده با ولتاژ را به یک منبع ولتاژ ناپسته و شاخه ۲ یعنی شاخه خروجی را به یک مقاومت خطی با مقاومت R_2 وصل کنیم. این امر در شکل



شکل ۳-۳- مداری که نشان میدهد منابع کنترل شده ممکن است به محیط خارج انرژی

نظریه^۲ اساسی مدارها و شبکه‌ها

(۳-۶) نشان داده شده است. با توجه به جهات قراردادی برای v_r و i_r ، از قانون اهم نتیجه می‌شود:

$$v_r = -i_r R_r \quad (3-10)$$

با جایگزینی معادله (۳-۱۰) در (۳-۱۴) بدست می‌آوریم:

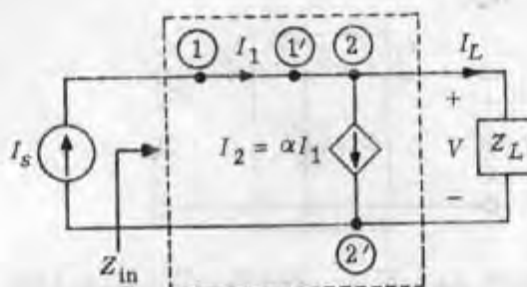
$$p(t) = -i_r^2(t) R_r$$

بنابراین، توان لحظه‌ای وارد شونده به مدار دوقطبی همواره منفی است. عبارت دیگر، منبع کنترل شده با شدت $R_r i_r^2(t)$ به مقاومت R_r توان تحویل می‌دهد. بنابراین با کنترل ولتاژ ورودی v_r مدار، در شکل (۳-۶)، می‌توان بوسیله منبع ولتاژ وابسته v_r هر مقدار انرژی به مقاومت بار R_r تحویل داد. به‌عبارت دیگر، در فصل دوم عنصر «پسیو» را بعنوان عنصری که نتواند به محیط خارج انرژی تحویل دهد تعریف نمودیم. از آنجائیکه یک منبع کنترل شده را می‌توان بعنوان یک عنصر مقاومتی دوقطبی در نظر گرفت و با توجه باینکه این عنصر می‌تواند به محیط خارج انرژی تحویل دهد، از اینرو منبع کنترل شده یک عنصر «اکتیو» است.

در بخش قبل دیدیم مداری که شامل یک منبع کنترل شده و مقاومت‌های پسیو باشد می‌تواند ولتاژها را تقویت کند. اکنون مثال دیگری، برای نشان دادن اینکه از به‌کار بردن منابع کنترل شده امکانات جالب دیگری نیز بدست می‌آید، بیان می‌کنیم.

مثال ۳- تجزیه و تحلیل حالت دائمی سینوسی مدار ساده شکل (۳-۷) را در نظر بگیرید. منبع کنترل شده بوسیله دوشاخه $\textcircled{1}$ و $\textcircled{1}'$ نمایش داده شده است. امپدانس Z_L بطور موازی با شاخه $\textcircled{1}$ متصل است. ورودی، منبع جریان وابسته است که جریان آن با فازور I_r نمایش داده شده است. می‌خواهیم امپدانس ورودی Z_{in} که بوسیله منبع ورودی دینده می‌شود را بدست آوریم. با استفاده از KCL در گره‌های $\textcircled{1}$ و $\textcircled{1}'$ داریم:

$$I_2 = I_1 \quad \text{و} \quad I_1 = \alpha I_1 + I_r \quad (3-11)$$



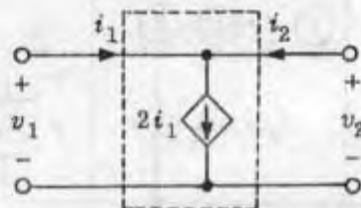
شکل ۷-۳- مثال : یک مدار دوقطبی که بوسیله یک منبع کنترل شده حاصل شده است

$$(۷-۲) \quad Z_{in} = \frac{V}{I_s} = \frac{Z_L I_L}{I_s}$$

با ترکیب معادلات (۷-۲) و (۷-۳) داریم :

$$(۷-۳) \quad Z_{in} = (1 - \alpha) Z_L$$

میتوان مشاهده کرد که اگر پارامتر α برابر ۲ باشد، معادله (۷-۳) نشان میدهد که Z_{in} با منفی Z_L برابر است. بنابراین، اگر Z_L امپدانس یک مدار یک قطبی پسیو را نشان دهد، $Z_{in} = -Z_L$ امپدانس یک مدار یک قطبی اکتیو را نمایش میدهد. در فصل هفتم نشان دادیم که یک شرط لازم برای اینکه امپدانس نقطه تحریک Z_L پسیو باشد این است که، برای تمام مقادیر ω ، $\text{Re}[Z_L(j\omega)] \geq 0$ باشد. از آنجائیکه $Z_{in} = -Z_L$ است، و بنابراین، وقتی که $\alpha = 2$ باشد، $\text{Re}[Z_{in}(j\omega)] \leq 0$ و بنابراین، مدار دوقطبی داخل مربع خط چین شده در شکل (۷-۳) «مبدل امپدانس منفی»^(۱) نامیده میشود. یک مبدل امپدانس منفی، یک دستگاه دوقطبی با این خاصیت است که امپدانس ورودی اش برابر منفی هر امپدانسی است که در قطب خروجی به آن متصل باشد. درحقیقت، مبدل امپدانس منفی خود یک عنصر دوقطبی تزویج کننده است. اگر قسمت داخل مربع خط چین شده مدار شکل (۷-۳) را، مطابق آنچه در شکل (۸-۳) نشان داده شده است با $\alpha = 2$ مجدداً رسم کنیم و جریانها و ولتاژها را مطابق شکل، مجدداً تعریف کنیم، توصیف یک مبدل امپدانس منفی بصورت زیر میباشد:



شکل ۳-۸ - یک مبدل امپدانس منفی که بوسیله یک منبع کنترل شده حاصل شده است.

$$(۳-۱۹)$$

$$v_1 = v_2 \quad i_1 = i_2$$

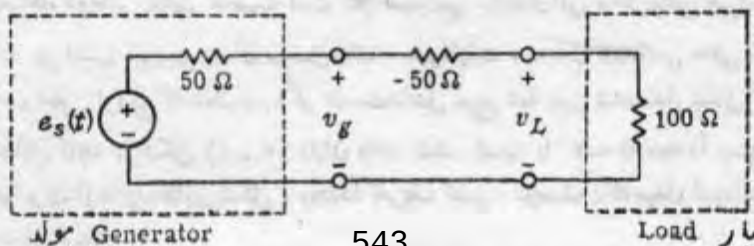
چنانکه در فصلهای دوم و پنجم دیدیم، یک مقاومت منفی یک عنصر اکتیو است. این نکته در تمرین زیر مجدداً تأکید میشود. این مطلب در طرح تقویت‌کننده‌ها و بعضی سیستمهای ارتباطی کابلی مورد استفاده قرار گرفته است.

تمرین - مدار نشان داده شده در شکل (۳-۹) را در نظر بگیرید.

الف - برای حالتی که e_s مقدار ثابتی برابر ۱۰ ولت میباشد، توانی که مولد تحویل میدهد، توانی که مقاومت منفی دریافت میکند، و توانی که مقاومت بار دریافت میکند را محاسبه کنید.

ب - مسأله را برای حالتی که $e_s(t) = 10 \cos \omega t$ میباشد تکرار کنید (توان لحظه‌ای و توان متوسط، هر دو، را محاسبه کنید).

پ - دربارهٔ چگونگی تقسیم انرژی در مدار چه میتوانید بگوئید؟



شکل ۳-۹ - تمرینی که نشان میدهد مقاومت منفی به بار توان تحویل میدهد

خلاصه

● عناصر تزویج کننده نوعی عبارت از سلفهای تزویج شده، ترانسفورماتورهای ایده آل، و منابع کنترل شده میباشند. عناصر تزویج کننده بیش از یک شاخه و بیش از دوسر دارند، که تعداد آنها معمولاً چهار میباشند. آنها بوسیله معادلاتی که ولتاژ شاخه و جریان شاخه آنها را بهم مربوط میسازند تعریف میگردند.

● معادلاتی که یک جفت سلف تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان را تعریف میکنند عبارتند از:

$$v_1 = L_{11} \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$v_2 = M \frac{di_1}{dt} + L_{22} \frac{di_2}{dt}$$

برای تکمیل مشخصات، جریانهای اولیه $i_1(0)$ و $i_2(0)$ لازم است. ● انرژی ذخیره شده در یک جفت سلف تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان چنین است:

$$g(i_1, i_2) = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + M i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2$$

اگر این سلفها پسیو باشند، ضرایب خود القاء L_{11} و L_{22} مثبت میباشند، درحالیکه ممکن است M مثبت و یا منفی باشد. مقدار M به ضریب تزویج k ، که بوسیله رابطه زیر تعریف میشود، مربوط است:

$$k \triangleq \frac{|M|}{\sqrt{L_{11} L_{22}}}$$

پسیو بودن لازم میدارد که $0 \leq k \leq 1$ باشد.

● سلفهای خطی تغییر ناپذیر با زمان را میتوان برحسب ماتریس ضرایب القاء $\mathbf{L}$ توصیف نمود. بنابراین:

$$\mathbf{v} = \mathbf{L} \frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

۵۰۰

نظریه* اساسی مدارها و شبکه‌ها

همچنین، میتوان آنها را برحسب ماتریس ضرایب القاء معکوس Γ تعریف نمود. بنابراین:

$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{i}(0) + \Gamma \int_0^t \mathbf{v}(t') dt'$$

رابطه زیر همواره برقرار است:

$$\Gamma = \mathbf{L}^{-1}$$

● معادلات تعریف کننده یک ترانسفورماتور ایده‌آل با دو سیم پیچی چنین است:

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{-i_2(t)}{i_1(t)}$$

که در آن n_1 و n_2 به ترتیب تعداد دور در سیم پیچی اول و سیم پیچی دوم میباشد. این معادلات وقتی برقرار است که جهات قراردادی i_1 و i_2 هر دو به سرتقطه گذاری شده داخل (و یا از آن خارج) شوند. اگر این وضع برقرار نباشد، بجای n_1 ، $-n_1$ قرار دهید.

● یک ترانسفورماتور ایده‌آل یک عنصر خطی تغییر ناپذیر با زمان است، و انرژی تلف و یا ذخیره نمی‌کند.

● یک ترانسفورماتور ایده‌آل را میتوان بعنوان یک جفت سلف تزویج شده خطی تغییر ناپذیر با زمان، با ضرایب خود القاء بینهایت، و ضریب تزویجی برابر بایک در نظر گرفت.

● چهار نوع اصلی منبع کنترل شده خطی تغییر ناپذیر با زمان چنین است:

منبع جریان کنترل شده با جریان: $v_1 = 0$ ، $i_2 = \alpha i_1$

منبع جریان کنترل شده با ولتاژ: $i_1 = 0$ ، $i_2 = g_m v_1$

منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ: $i_1 = 0$ ، $v_2 = \mu v_1$

منبع ولتاژ کنترل شده با جریان: $v_1 = 0$ ، $v_2 = r_m i_1$

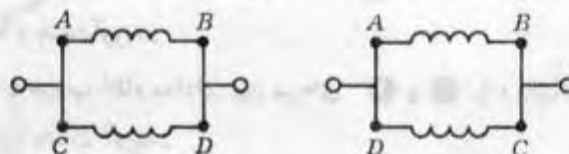
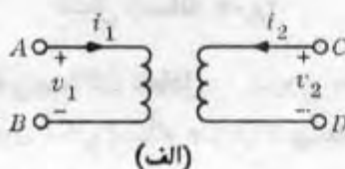
که در آن، α ، g_m ، μ و r_m مقادیر ثابت میباشند.

مسائل

۱- اتصال سری و موازی سلفهای تزویج شده یک جفت سلف تزویج شده (با جهات قراردادی نشان داده شده در شکل (مسئله ۱-۸ الف)) دارای ماتریس ضرایب القاء زیر می باشد :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

ضریب القاء معادل چهار اتصال نشان داده شده در شکل (مسئله ۱-۸ ب) را بدست آورید.

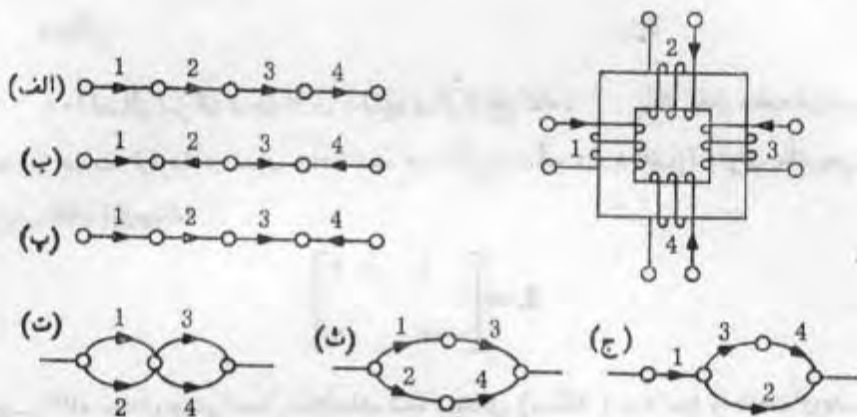


(ب)

شکل (مسئله ۱-۸)

۲- علامت M ، اتصالهای سری و موازی در شکل (مسئله ۲-۸) ترتیب قرار گرفتن فیزیکی سیم پیچی سلفها روی یک هسته مشترک رسم شده است. مقدار هوزریب خود القاء برابر ۲ هانری ، و قدر مطلق ضریب القاء متقابل مساوی ۱ هانری است. ضریب القاء خالص مدارهای (الف) تا (ج) را بدست آورید. در شکلهای (الف) ، (ب) و غیره پیکان ها، جهت قراردادی هر سیم پیچی را نشان میدهد.

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها



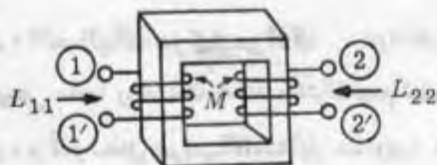
شکل (مسئله ۸-۲)

۳ - علامت M ، ضریب القاء معادل، تزویج مغناطیسی میان دوسلف خطی تغییر ناپذیر با زمان، مطابق شکل (مسئله ۳ - ۸)، بوسیلهٔ یک هسته تأمین میشود. مقادیر ضرایب خود القاء عبارتند از $L_{11} = 2$ هانری و $L_{22} = 3$ هانری، و ضریب القاء متقابل $M = 1$ هانری است.

الف - ضریب القاء معادل بین سرهای ① و ② را، وقتی که ③ و ④ بهم وصل شده باشند، بدست آورید.

ب - ضریب القاء معادل بین سرهای ① و ② را، وقتی که ③ و ④ بهم وصل شده باشند، بدست آورید.

پ - با به کار بردن یک پل القایی تنها، روشی برای اندازه گیری ضریب القاء متقابل بین سیم پیچی‌ها پیشنهاد کنید.



شکل (مسئله ۸-۳)

۴ - ماتریس ضرایب القاء دو سلفی معادل سلفهای مدارهای نشان داده شده در شکل (مسئله ۴ - ۸) خطی و تغییر ناپذیر با زمان هستند.

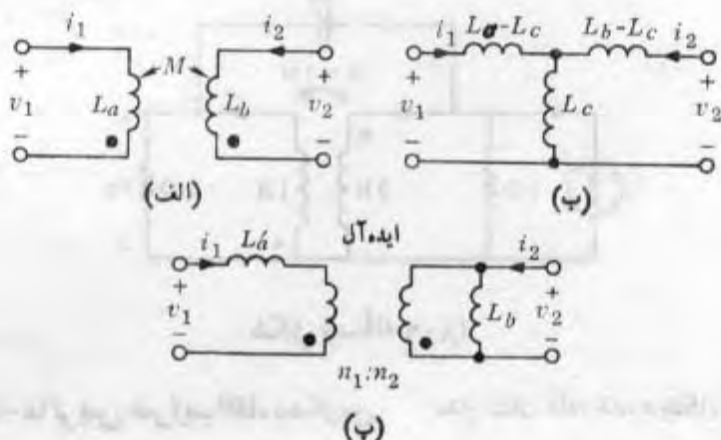
۵۰۳

عناصر تزویج کننده و مدارهای تزویج شده

الف - ماتریس ضرایب القاء را برای هر مدار بدست آورید.

ب - نشان دهید که اگر $L_c = M$ باشد، مدارهای (الف) و (ب) ماتریس ضرایب

القاء یکسان دارند.



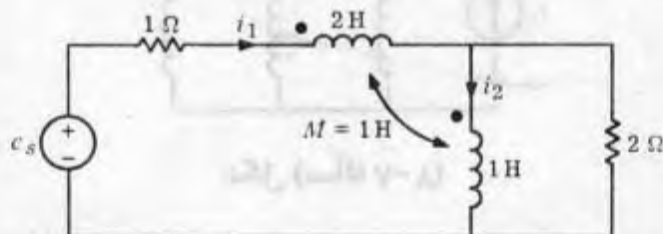
شکل (مسأله ۴-۸)

پ - چه رابطه ای باید L'_a و $\frac{n_1}{n_2}$ با L_a و M داشته باشند تا مدارهای (الف) و

(ب) دارای ماتریس ضرایب القاء یکسان باشند؟

۵ - تجزیه و تحلیل مش مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۵-۸) در حالت

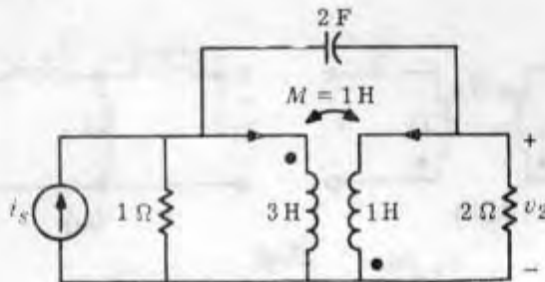
دائمی سینوسی است، که در آن، ورودی یک منبع ولتاژ $v_s(t) = \cos(2t + 30^\circ)$ می باشد جریانهای حالت دائمی i_1 و i_2 را بدست آورید.



548
شکل (مسأله ۵-۸)

نظریه اساسی مدارها و شبکه‌ها

۶- تجزیه و تحلیل گره برای مدار نشان داده شده در شکل (مسئله ۶-۸) معادلات گره را بنویسید. اگر $i_s(t) = \cos t$ باشد، ولتاژ حالت دائمی سینوسی $v_2(t)$ را تعیین کنید.

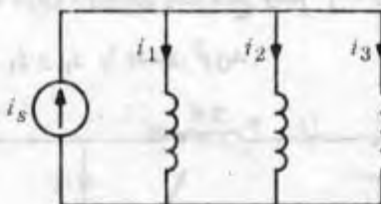


شکل (مسئله ۶-۸)

۷- ماتریس ضرایب القاء معکوس مدار نشان داده شده در شکل (مسئله

۷-۸) داده شده است. جریانهای حالت دائمی $i_1(t)$ ، $i_2(t)$ و $i_3(t)$ را برای منبع جریان ورودی $i_s(t) = \sin t$ تعیین کنید. ماتریس ضرایب القاء سه ملف تزویج شده چنین است:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$



شکل (مسئله ۷-۸)

۸- انرژی ذخیره شده فرض کنید در مدار مسئله ۷، i_3 یک منبع جریان ثابت

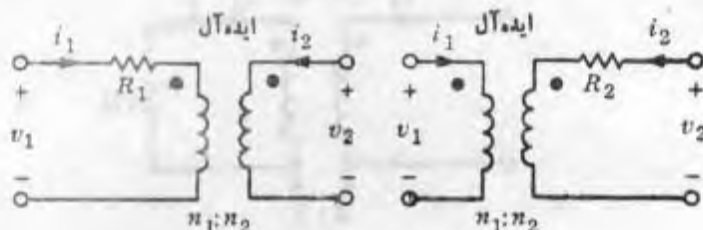
بوده و $i_1 = 2$ ، $i_2 = 1$ و $i_3 = -3$ آمپر باشند. انرژی ذخیره شده در سلفها چقدر است؟

۵۰۵

عناصر تزویج کننده و مدارهای تزویج شده

۹- ترانسفورماتور ایده آل و دو قطبی های معادل عبارتی برای R_T

بیاید بطوریکه دو قطبی های نشان داده شده در شکل (مسأله ۹ - ۸) معادل باشند



شکل (مسأله ۹ - ۸)

۱۰- خاصیت تغییر امپدانس ترانسفورماتور ایده آل، محاسبه توان

متوسط مدار نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۰ - ۸) خطی و تغییر ناپذیر با

زمان میباشد.

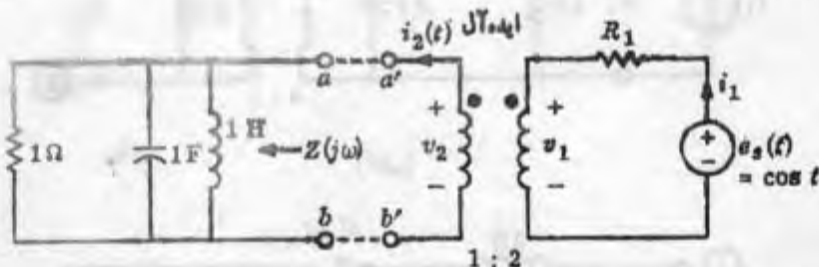
الف - $Z(j\omega)$ را، و تئیکه aa' و bb' وصل نشده اند، بدست آورید.

ب - در حالتیکه aa' و bb' وصل شده باشند، با فرض اینکه تمام ولتاژها و جریانه های

شاخه هاسینوسی و با فرکانسی برابر فرکانس e_s باشند، برای $R_1 = 2$ اهم، i_1 را بدست آورید.

پ - آن مقدار R_1 که موجب حداکثر اتلاف توان متوسط در مقاومت R میشود را

بدست آورید.



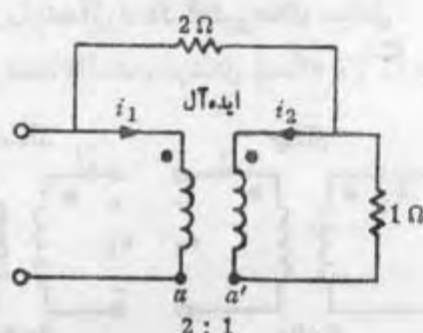
شکل (مسأله ۱۰ - ۸)

۱۱ - معادلات تعریف کننده ترانسفورماتور ایده آل الف - مقاومت

معادل مدار یک قطبی نشان داده شده در شکل (مسأله ۱۱ - ۸) را تعیین کنید.

ب - مسأله را برای حالتی که نقاط a و a' با یک اتصال کوتاه بهم وصل شده باشند

نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها



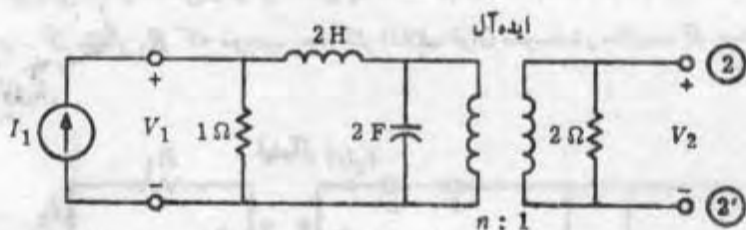
شکل (مسئله ۱۱-۸)

۱۲- خواص نقطه تحریک و انتقالی ترانسفورماتور ایده‌آل

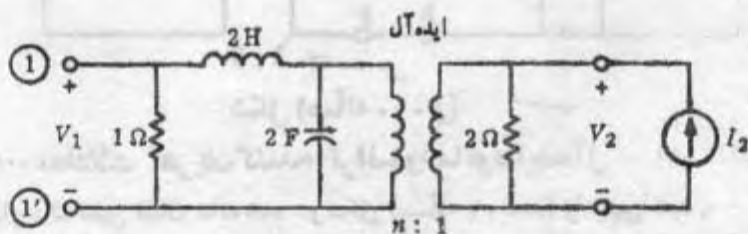
برای مدارهای نشان داده شده در شکل (مسئله ۱۲ - ۸) امپدانس‌های زیر را [با یکبار بردن شکل (الف)]

$$Z_{11}(j\omega) = \frac{V_1}{I_1} \text{ و } Z_{21}(j\omega) = \frac{V_2}{I_1}$$

و امپدانسهای زیر را [با یکبار بردن شکل (ب)] محاسبه کنید :



(الف)



(ب)

شکل (مسئله ۱۲-۸)

$$Z_{rr}(j\omega) = \frac{V_r}{I_r} \text{ و } Z_{1r}(j\omega) = \frac{V_1}{I_r}$$

که در آن V_1 و V_r فازورهایی هستند که بترتیب ولتاژهای خروجی سینوسی $v_1(t)$ و $v_r(t)$ را نمایش می‌دهند، و I_1 و I_r فازورهایی هستند که بترتیب جریانهای ورودی $i_1(t)$ و $i_r(t)$ را نمایش می‌دهند. توجه کنید که در شکل (الف) ۱ و ۱' سرهای ۱ و ۱' مدار باز می‌باشند، و در شکل (ب) سرهای ۱ و ۱' مدار باز می‌باشند.

۱۳- خواص نقطه تحریک و انتقالی سلفهای تزویج شده یک

جفت سلف خطی تغییر ناپذیر با زمان که با ماتریس ضرایب القاء مشخص شده‌اند را در نظر بگیرید. (شکل (مسئله ۱۳ - ۸) را ببینید).

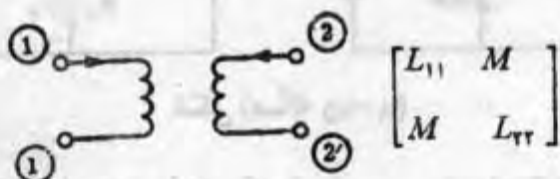
الف - نشان دهید که امپدانس نقطه تحریک $Z_{10}(j\omega)$ (که در دوسر ۱ و ۱' موقعی که ۱ و ۱' باز است دیده می‌شود) و امپدانس نقطه تحریک $Z_{r0}(j\omega)$ (که در دوسر ۱ و ۱' موقعی که ۱ و ۱' باز است دیده می‌شود) در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{Z_{10}(j\omega)}{L_{11}} = \frac{Z_{r0}(j\omega)}{L_{rr}}$$

ب - نشان دهید که:

$$\frac{Z_{1s}(j\omega)}{L_{11}} = \frac{Z_{rs}(j\omega)}{L_{rr}}$$

که در آن $Z_{1s}(j\omega)$ امپدانس ورودی دیده شده بین دوسر ۱ و ۱' موقعی که ۱ و ۱' اتصال کوتاه شده باشند، و $Z_{rs}(j\omega)$ امپدانس ورودی دیده شده بین دوسر ۱ و ۱' موقعی که ۱ و ۱' اتصال کوتاه شده باشند هستند.



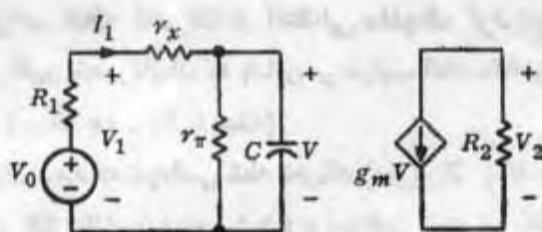
نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها

۱۴- تقویت کننده ترانزیستوری شکل (مسئله ۱۴ - ۸) مدار معادل

سیگنال کوچک یک تقویت کننده ترانزیستوری ساده را نشان می‌دهد. V_0 و V_1 ، I_1 ، V_1 نشان دهنده فازورهای سینوسی با فرکانس ω می‌باشند،

الف - امپدانس نقطه تحریک $Z_{in}(j\omega) = \frac{V_1}{I_1}$ را حساب کنید.

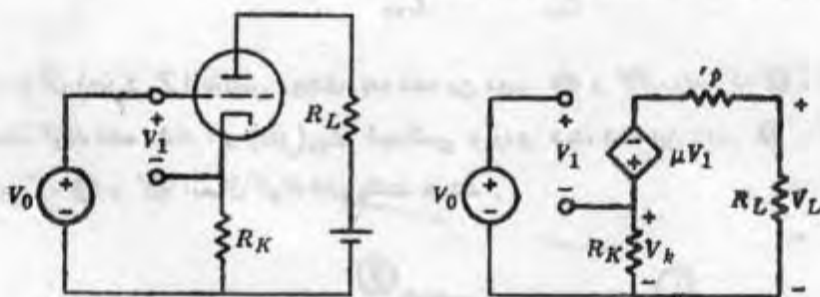
ب - نسبت انتقالی ولتاژها $H(j\omega) = \frac{V_2}{V_0}$ را حساب کنید.



شکل (مسئله ۱۴ - ۸)

۱۵- تقویت کننده لامپی شکل (مسئله ۱۵ - ۸) یک مدار تقویت کننده لامپی

و مدار معادل سیگنال کوچک آنرا نشان می‌دهد. نسبت‌های ولتاژهای $\frac{V_L}{V_0}$ و $\frac{V_k}{V_0}$ را بر حسب مقاومت‌های داده شده و ثابت μ حساب کنید.



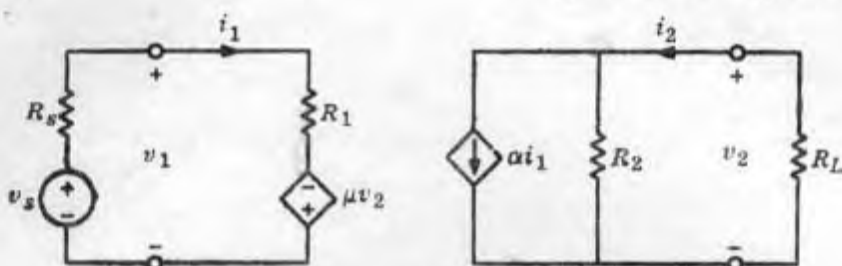
شکل (مسئله ۱۵ - ۸)

۱۶- منابع وابسته مدار شکل (مسئله ۱۶ - ۸) مدل دیگری از یک تقویت

کننده ترانزیستوری در فرکانس‌های پایین را نمایش می‌دهد. ولتاژهای v_1 و v_2 را تعیین کنید.

۵۰۹

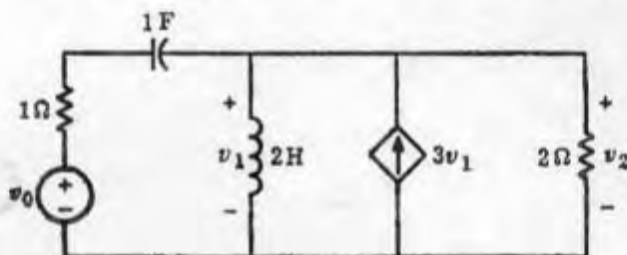
عناصر تزویج کننده و مدارهای تزویج شده



شکل (مسئله ۱۶-۸)

۱۷- منبع وابسته و تابع شبکه برای مدار نشان داده شده در شکل (مسئله

۱۷-۸) تابع شبکه $H(j\omega) \triangleq \frac{V_r}{V_0}$ را تعیین کنید، که در آن V_0 و V_r فازورهای هستند که به ترتیب ولتاژهای سینوسی $v_0(t)$ و $v_r(t)$ را نمایش می‌دهند.



شکل (مسئله ۱۷-۸)

۱۸- ترانسفورماتور ایده آل و منابع وابسته یک ترانسفورماتور ایده آل

با دو سیم پیچی و نسبت دورهای $n:1$ را می‌توان بوسیله مدلی که از دو منبع وابسته تشکیل می‌شود نمایش داد. براساس معادلات تعریف کننده ترانسفورماتور ایده آل و منابع وابسته، مدل مناسبی برای ترانسفورماتور ایده آل چنان تعیین کنید که از دو منبع وابسته که بطور مناسبی انتخاب شده باشند استفاده کند.