

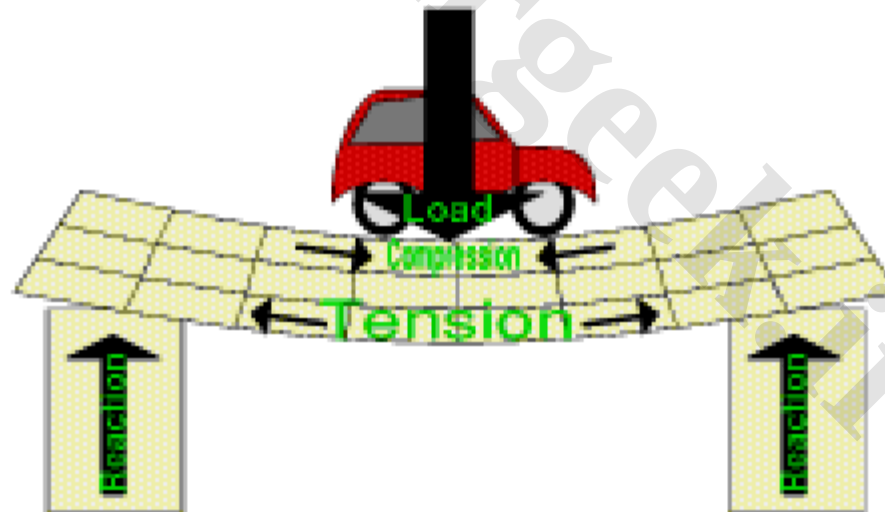
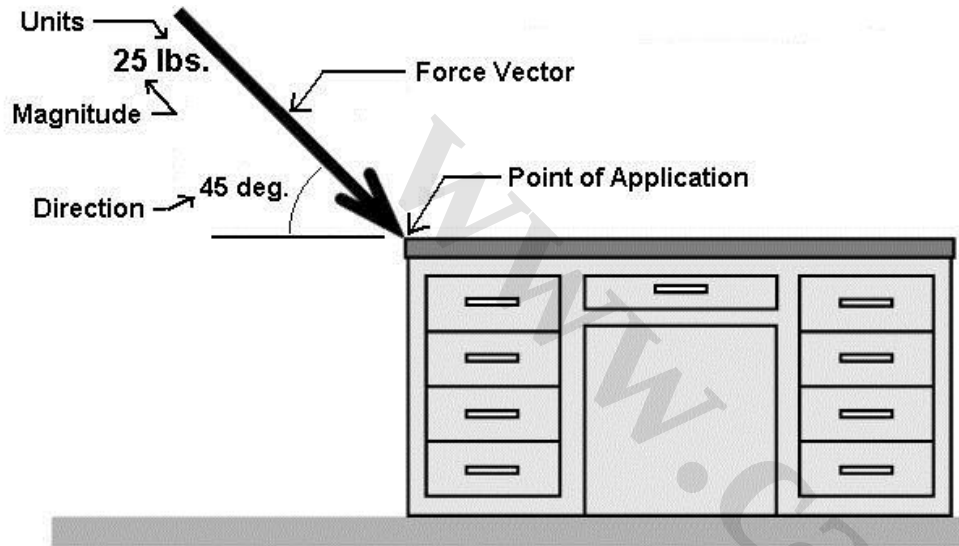
استاتیک



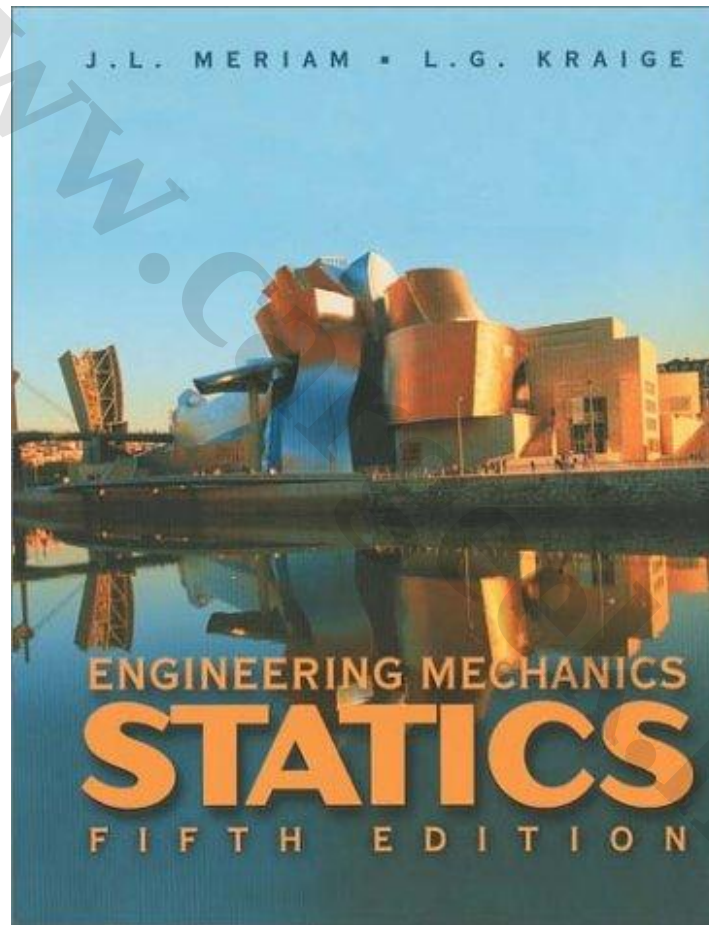
استاتیک شاخه‌ایی از علم مکانیک است که به

مطالعه و بررسی وضعیت اجسام در حال سکون می‌پردازد.

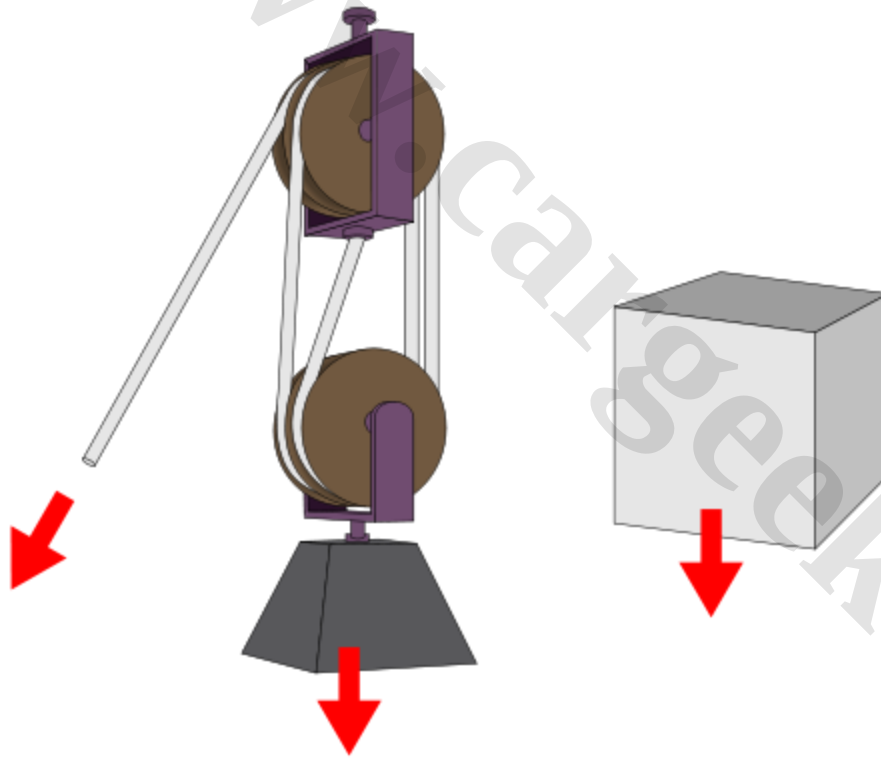




- کتاب مریام



مبانی استاتیک



مفاهیم اولیه

• فضا:

– مکان هندسی مجموعه نقاطی است که در آن میدان سه بعدی برای نقاط به کار برده می شود.

• زمان:

- زمان کمیتی است که مدت! انجام یافتن عملی را نشان می دهد.

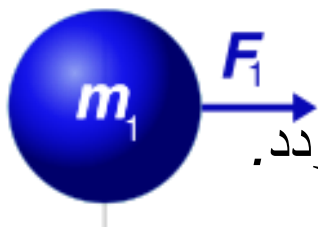
• جسم صلب:

- جسمی ایست که بین ذرات آن هیچ گونه جابجایی نسبی وجود نداشته باشد.

• نیرو:

- تاثیر یک جسم بر جسم دیگر را نیرو می گویند.

- نیرو با جهت، بزرگی و نقطه اثرش مشخص می گردد.



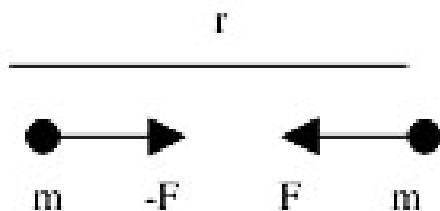
کمیت‌های عددی و برداری

- کمیت‌های عددی (اسکالر):

– کمیت‌هایی هستند که تنها دارای بزرگی (اندازه) می‌باشند.
مانند جرم، زمان و دما.

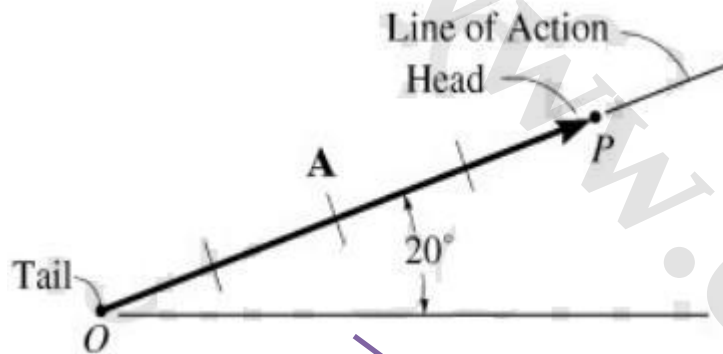
- کمیت‌های برداری:

– کمیت‌هایی هستند که علاوه بر اندازه دارای جهت نیز هستند. مانند سرعت، جابجایی و نیرو.



خواص کمیت‌های برداری

۱. نحوه نمایش یک کمیت برداری



• بردار $\vec{p}$

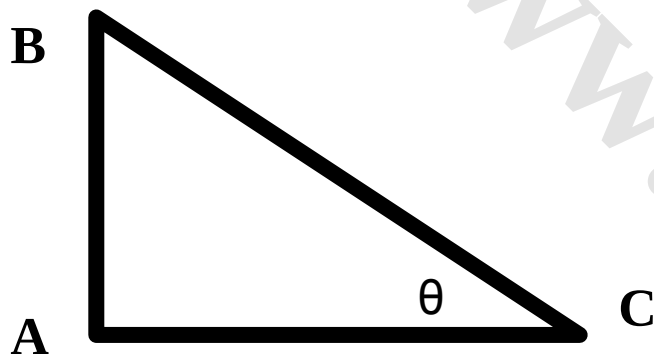
• اندازه و بزرگی بردار $|p|$

نسبت به یک راستای
معلوم و مرجع

۲. خاصیت شرکت پذیری

$$P+Q+S=(P+Q)+S=P+(Q+S)$$

مبانی مثلثاتی



$$\cos \theta = \frac{AC}{BC}$$

$$\sin \theta = \frac{AB}{BC}$$

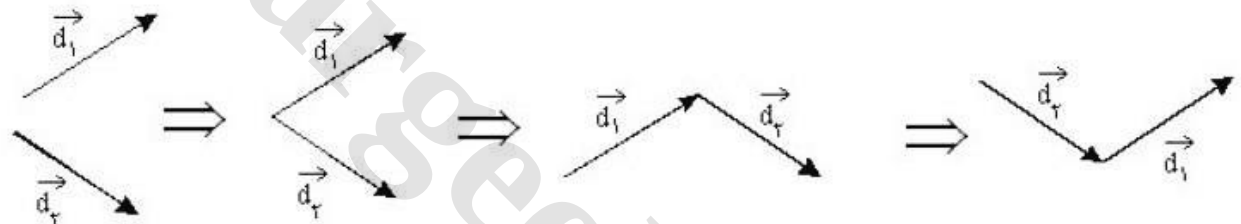
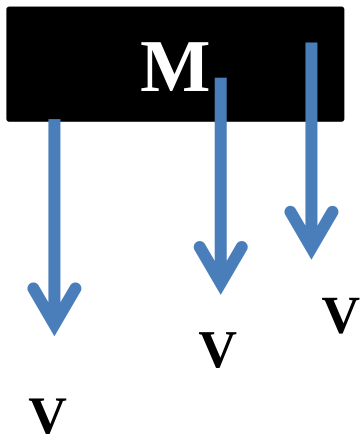
$$\tan \theta = \frac{AB}{AC}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$$

خواص کمیت‌های برداری

3. بردارهای آزاد

به شرطی که اندازه، راستا و سوی بردارها تغییر نکند، می‌توانند به هر جایی از صفحه منتقل شوند.

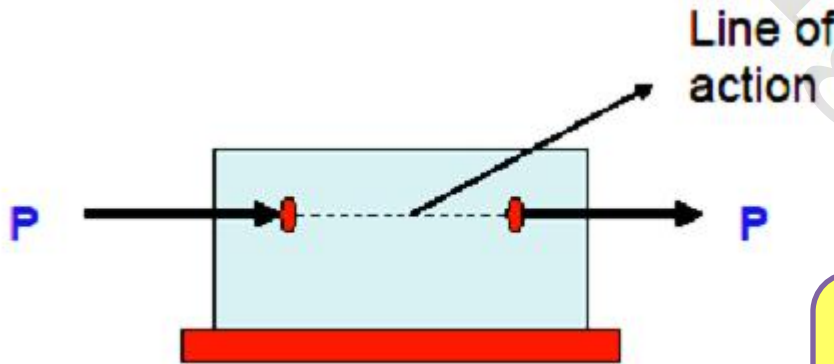


همه بردارها با هم برابر هستند (جهت و اندازه) ولی
نقطه اثرشان متفاوت است.

خواص کمیت‌های برداری

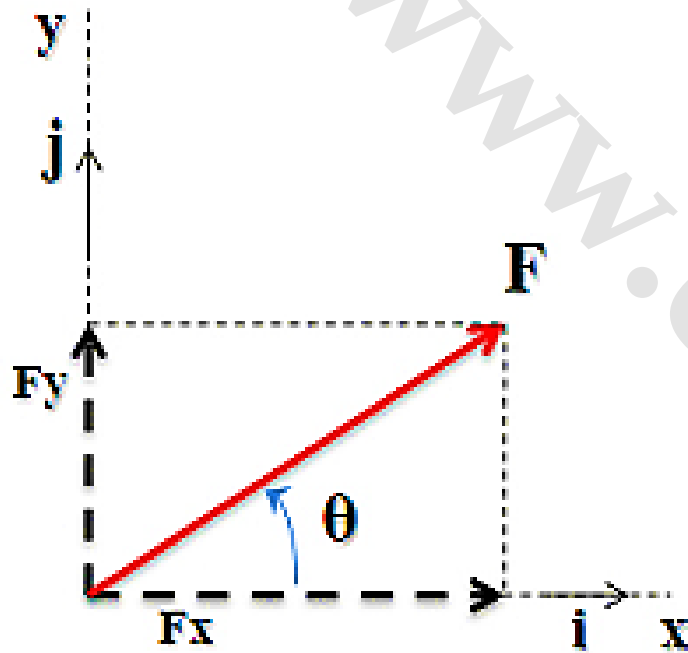
4. قابلیت انتقال

می‌توان نیروی وارد بر نقطه معلومی از یک جسم صلب را بوسیله نیرویی دیگر که از لحاظ مقدار و جهت برابر نیروی اولی است جایگزین نماییم به شرط آنکه وضعیت تعادل یا حرکت جسم تغییر نکند



نقطه اثر می‌تواند متفاوت باشد ولی الزام می‌بایست روی یک خط اثر باشند

اندازه بردارها



$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{F_y}{F_x}$$

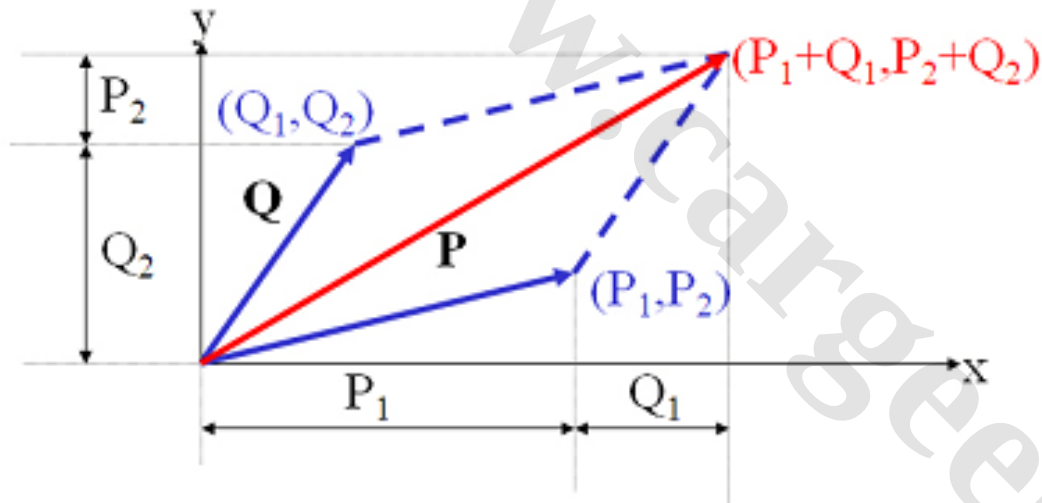
$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \sin \theta$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

جمع بردارها

۱. جمع مولفه ایی

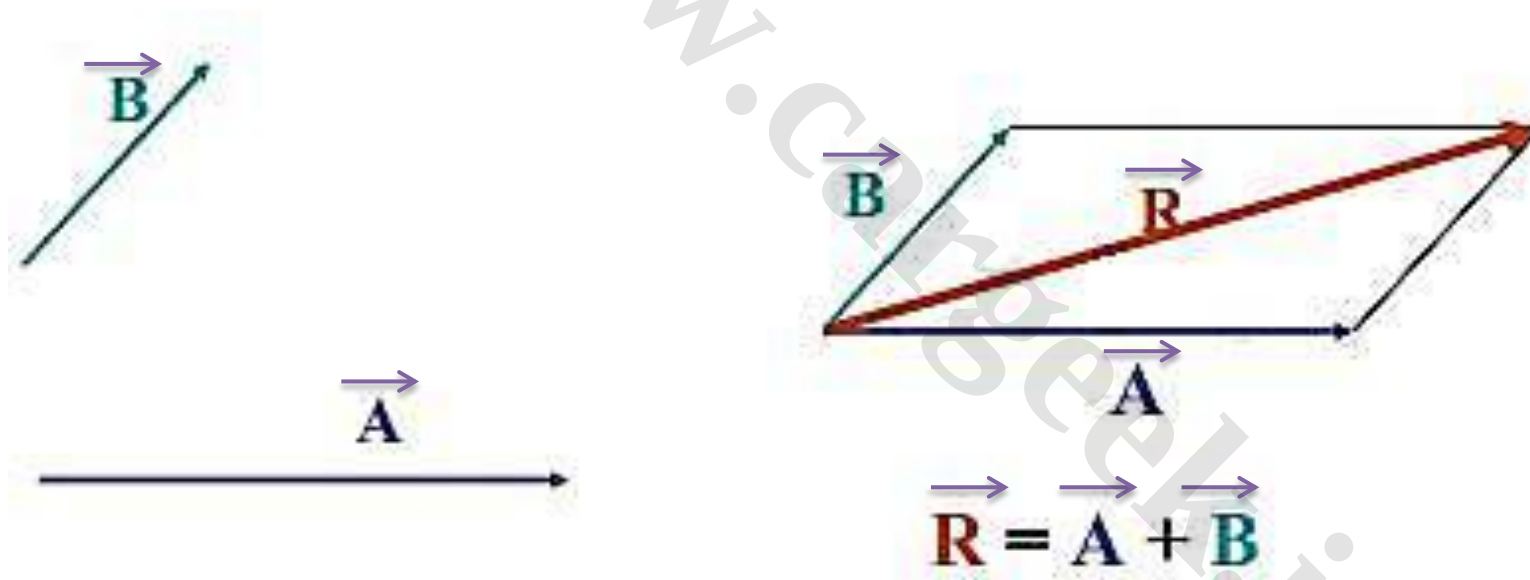


$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = (P_1 + Q_1, P_2 + Q_2)$$

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = (P_1 + Q_1)\mathbf{i} + (P_2 + Q_2)\mathbf{j}$$

جمع بردارها

۲. قانون متوازی الاضلاع

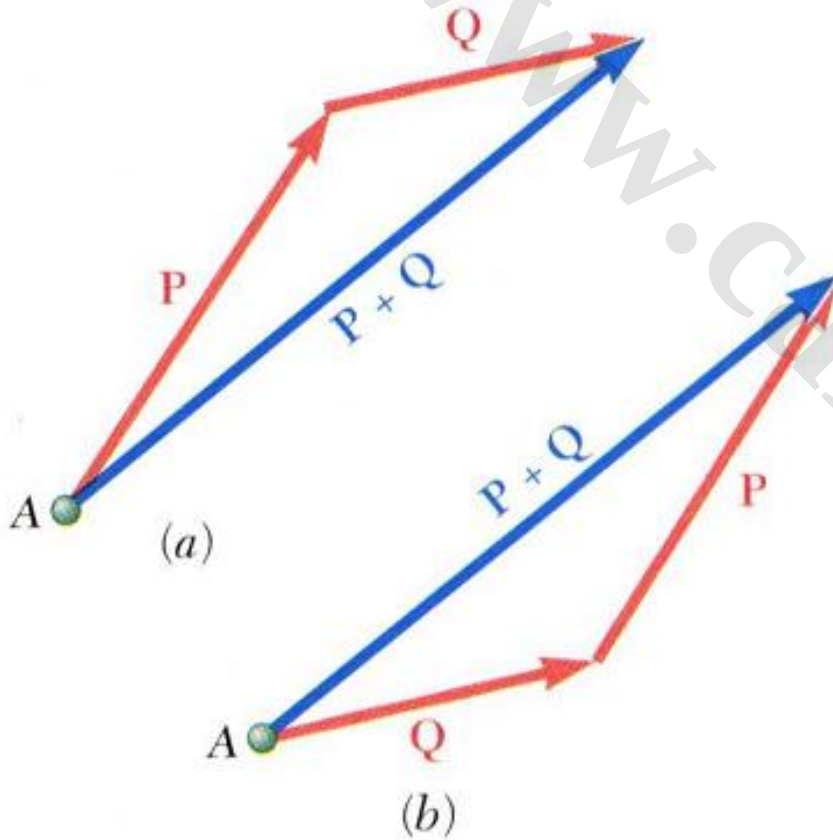


$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$$

جمع بردارها

2. جمع بردارها به کمک روش مثلثی

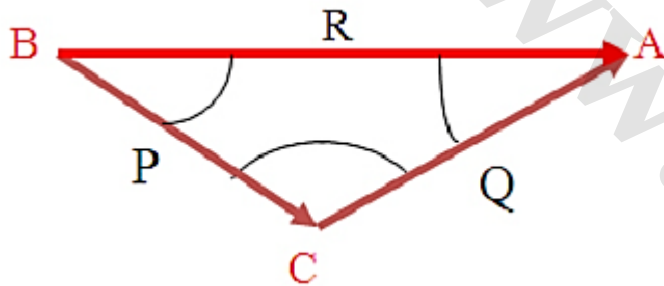
(ابتدا - به - انتها)



جمع بردارها

2. جمع بردارها به کمک روش مثلثی

محاسبه اندازه بردار و جهت بردار



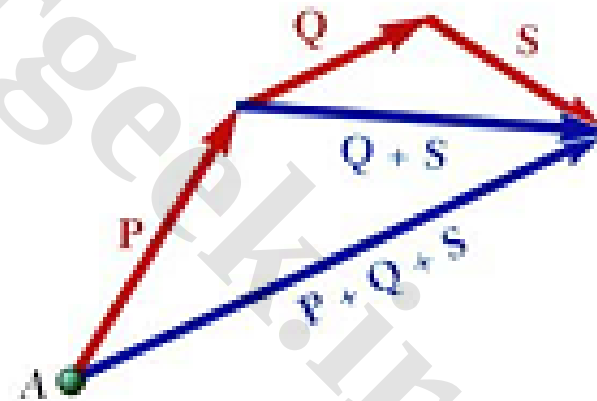
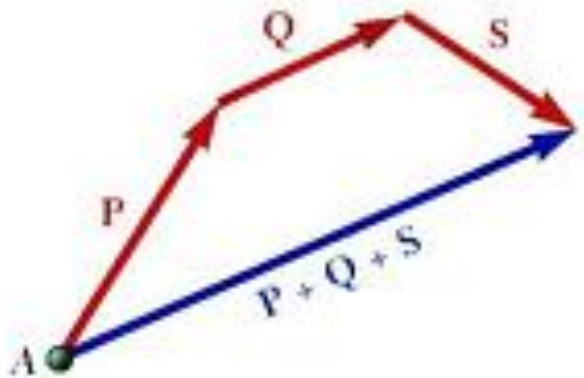
$$\frac{\sin A}{P} = \frac{\sin B}{Q} = \frac{\sin C}{R}$$

با رابطه متوازی الاضلاع
اشتباه گرفته نشود.

$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ \cos C$$

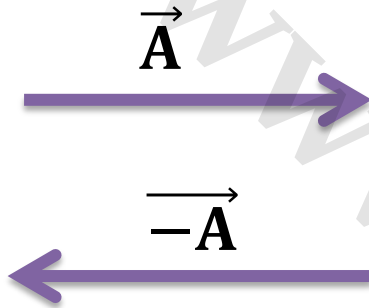
جمع بردارها

۳. جمع زنجیری

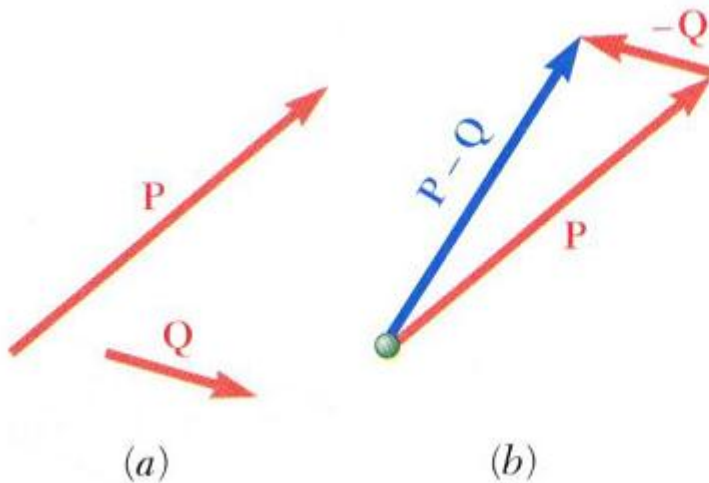


تفریق بردارها

منفی یک بردار



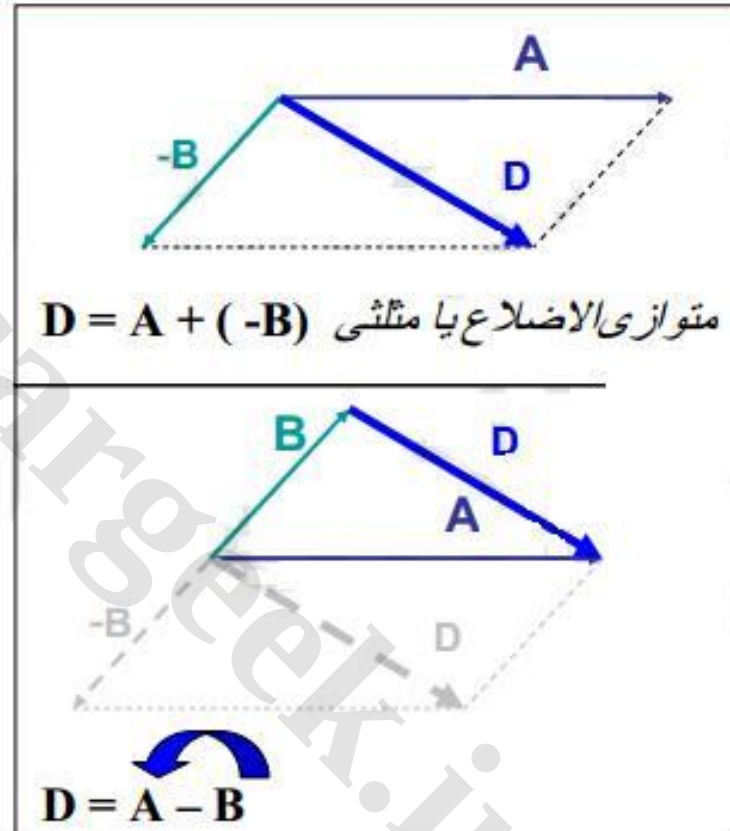
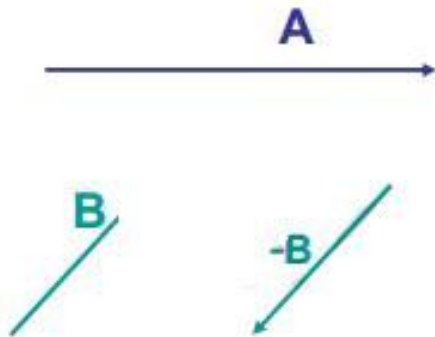
همان اندازه و همان راستا
ولی در جهت عکس



$$\vec{P} - \vec{Q} = \vec{P} + (-\vec{Q})$$

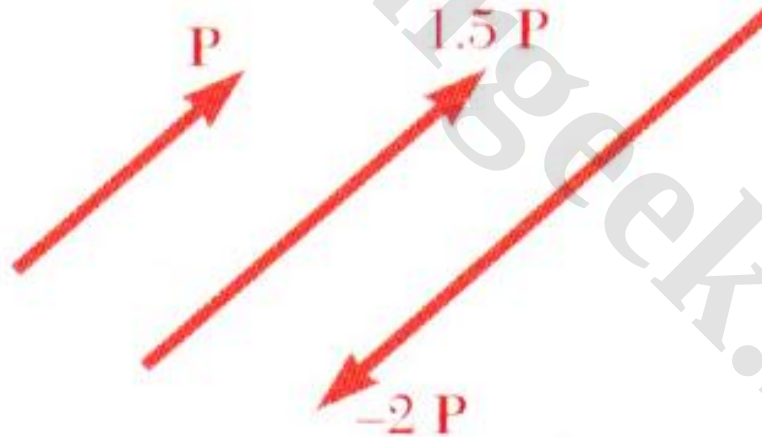
تفریق بردارها

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$



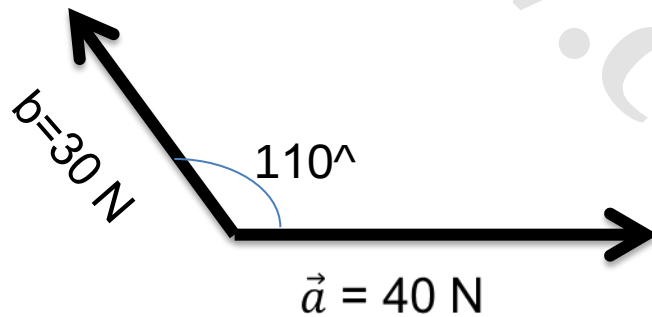
حاصل ضرب یک عدد در یک بردار

- حاصل ضرب یک اسکالر مثل n در یک بردار مانند $\vec{p}$ ، برداری ایست در راستا و جهت قبلی با بزرگی $n \cdot p$



مثال 1.

- جمع دو بردار a و b را در شکل زیر بدست آورید.



$$R^2 = 30^2 + 40^2 + 2 \times 30 \times 40 \cos 110^\circ \Rightarrow$$

$$R \cong 41 \text{ N}$$

الف) روش متوازی الاضلاع

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta}$$

$$R^2 = 30^2 + 40^2 + 2 \times 30 \times 40 \cos 110^\circ \Rightarrow$$

$$R \cong 41N$$

ب) روش مولفه‌ای

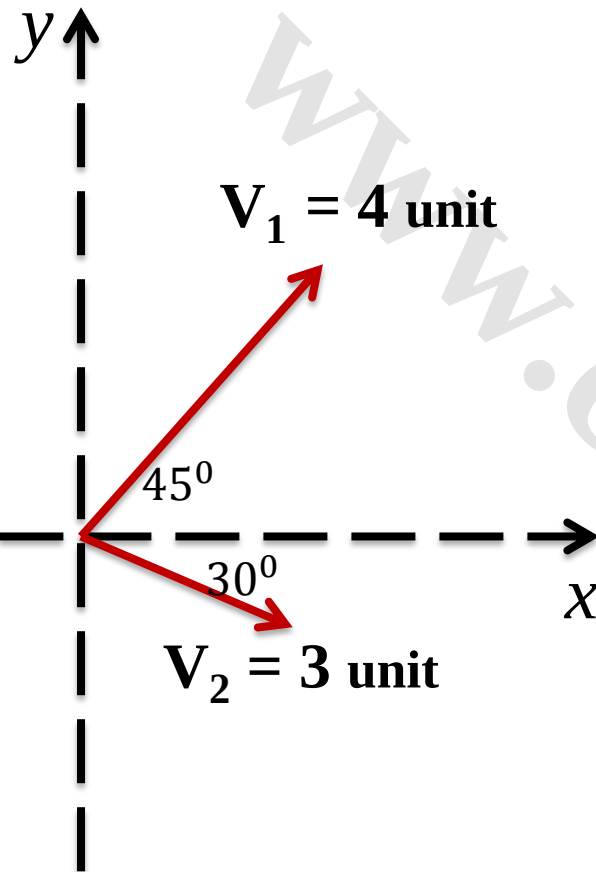
$$\vec{P} = -30 \cos 40^\circ \vec{i} + 30 \sin 40^\circ \vec{j} = -22.98 \vec{i} + 19.28 \vec{j}$$

$$\vec{Q} = -40 \cos 70^\circ \vec{i} - 40 \sin 70^\circ \vec{j} = -13.68 \vec{i} - 37.59 \vec{j}$$

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} = (-22.98 - 13.68) \vec{i} + (19.28 - 37.59) \vec{j}$$

$$\vec{R} = -36.66 \vec{i} - 18.31 \vec{j}, |\vec{R}| = \sqrt{36.66^2 + 18.31^2} \cong 41N$$

مثال ۲.



$$V_{1X} = 4 \cos 45$$

$$V_{1Y} = 4 \sin 45$$

$$V_{2X} = 3 \cos 30$$

$$V_{2Y} = 3 \sin 30$$

$$R_X = 4 \cos 45 + 3 \cos 30$$

$$R_Y = 4 \sin 45 + 3 \sin 30$$

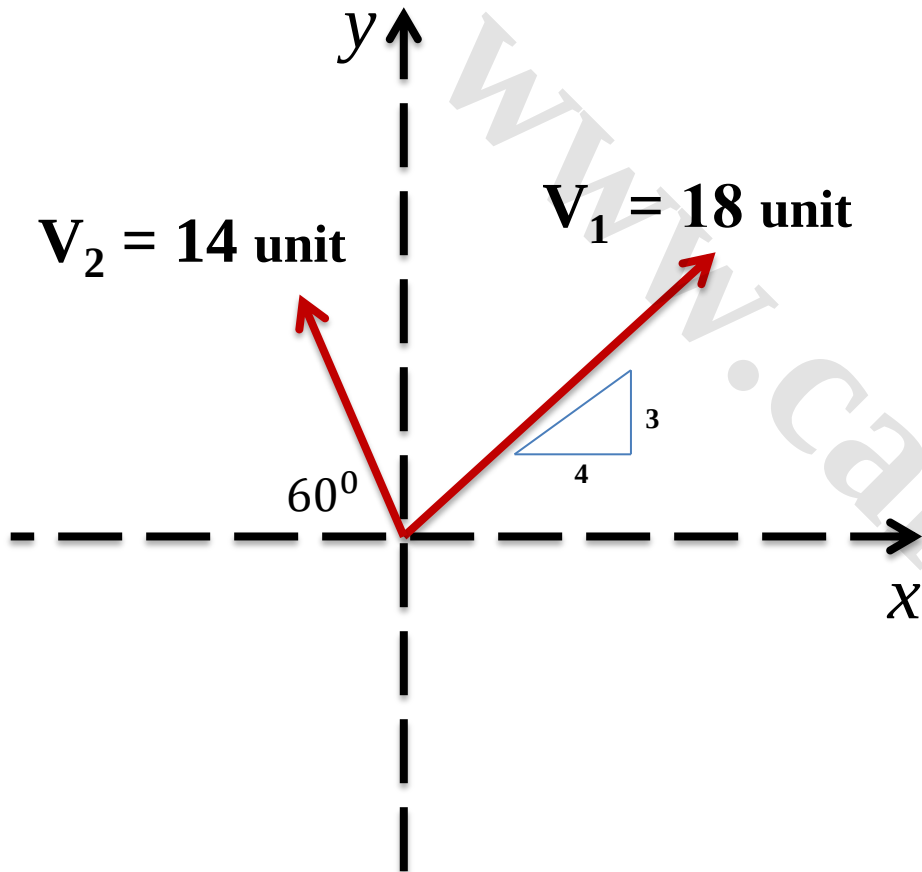
$$R_X = 5.42$$

$$R_Y = 4.32$$

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2} = 6.94$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_Y}{R_X} = 38.57$$

مثال ۳.



$$R_X = 18 \times \frac{4}{5} - 14\cos 60$$

$$R_X = 7.4$$

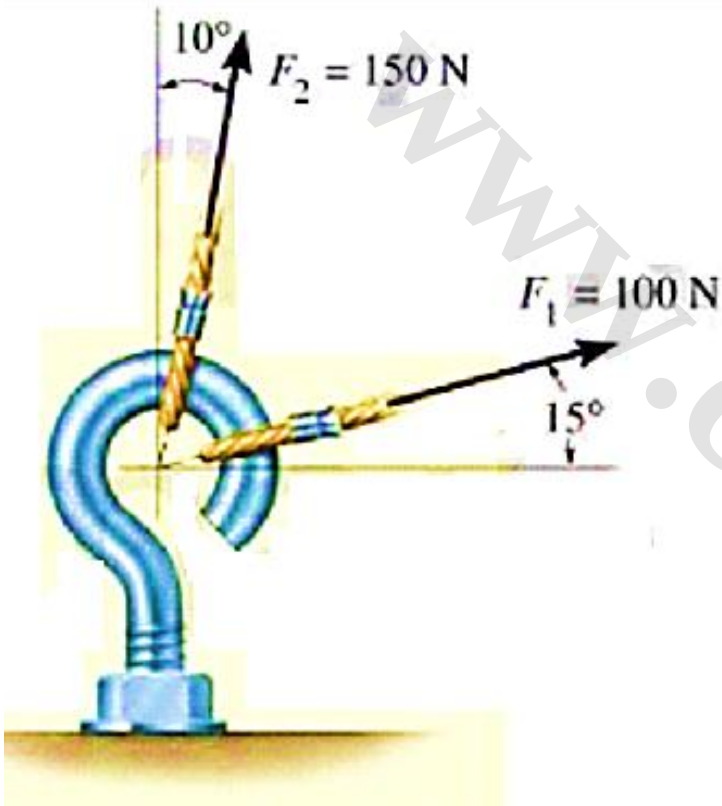
$$R_Y = 18 \times \frac{3}{5} + 14\sin 60$$

$$R_Y = 22.92$$

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2} = 24$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_Y}{R_X} = 72.1$$

تمرین ۱.



حلقه پیچ شکل تحت
تأثیر دو نیروی F_1 و F_2
قرار دارد. مقدار و جهت
نیروی برآیند موثر بر
پیچ را بیابید.

$$R_x = 100\cos 15 + 150\sin 10$$

$$R_x = 122.64N$$

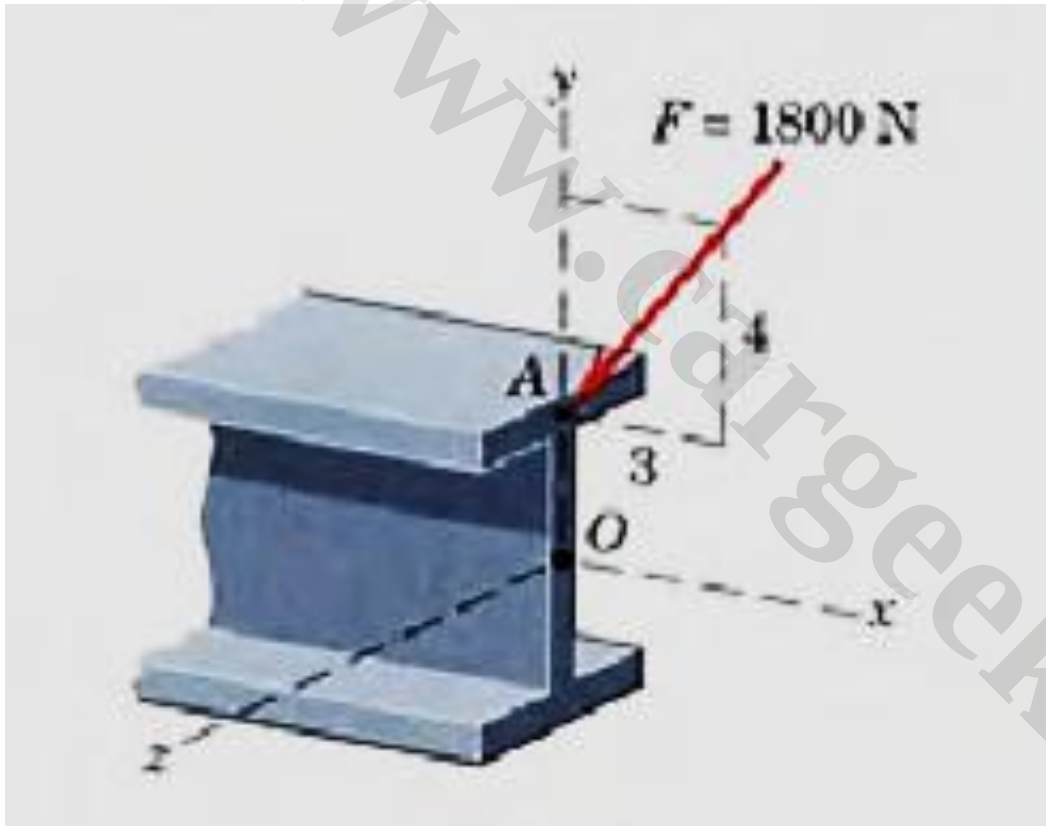
$$R_y = 100\sin 15 + 150\cos 10$$

$$R_y = 173.6N$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 212.52N$$

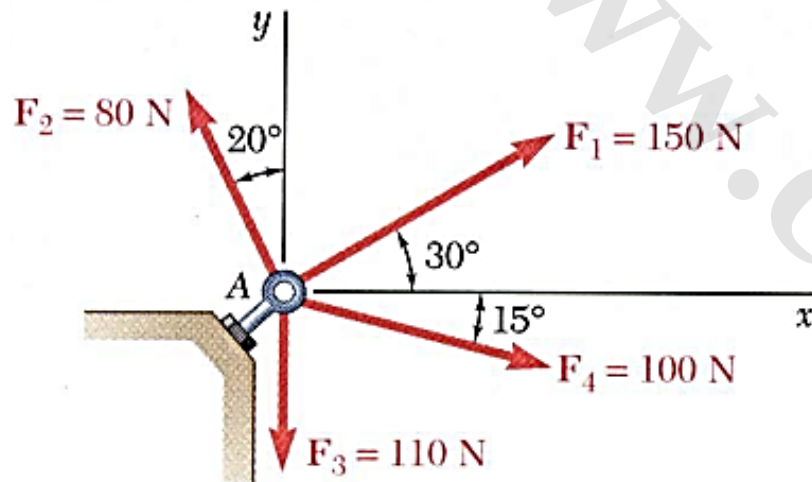
$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x} = 54.76$$

مثال ۵.



$$\mathbf{F} = -1080i - 1440j \text{ N}$$

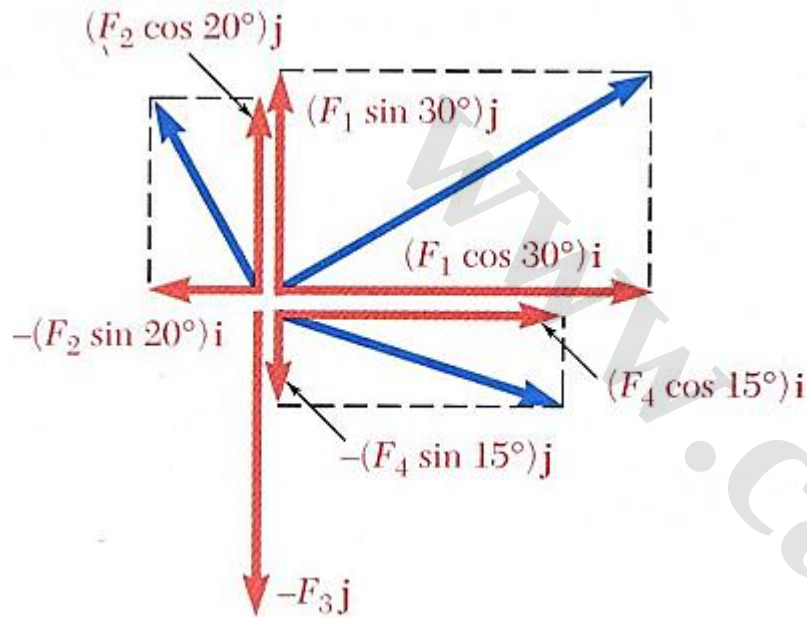
مثال ۷.



چهار نیرو مطابق شکل بر پیچ A اعمال شده اند. مطلوب است محاسبه برآیند نیروهای وارد بر پیچ.

روند حل مسئله

۱. نیروها را به مولفه هایشان در راستای افقی و عمودی تجزیه کنید.
۲. مولفه های متناظر را با یکدیگر جمع نمایید تا بردار برآیند بدست آید.
۳. با کمک مولفه ها اندازه و جهت بردار برآیند را محاسبه نمایید.

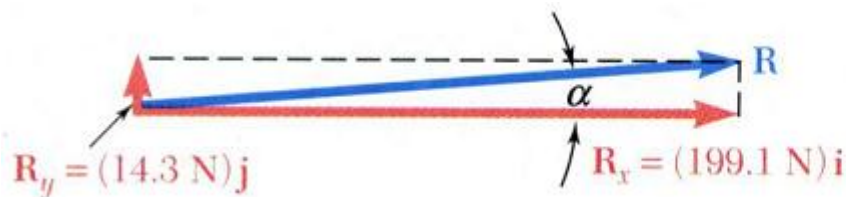


force	mag	x-comp	y-comp
$\vec{F}_1$	150	+129.9	+75.0
$\vec{F}_2$	80	-27.4	+75.2
$\vec{F}_3$	110	0	-110.0
$\vec{F}_4$	100	+96.6	-25.9
		$R_x = +199.1$	$R_y = +14.3$

$$R = R_y\mathbf{j} + R_x\mathbf{i} \Rightarrow R = 199.1\mathbf{i} + 14.3\mathbf{j}$$

$$R = \sqrt{199.1^2 + 14.3^2}$$

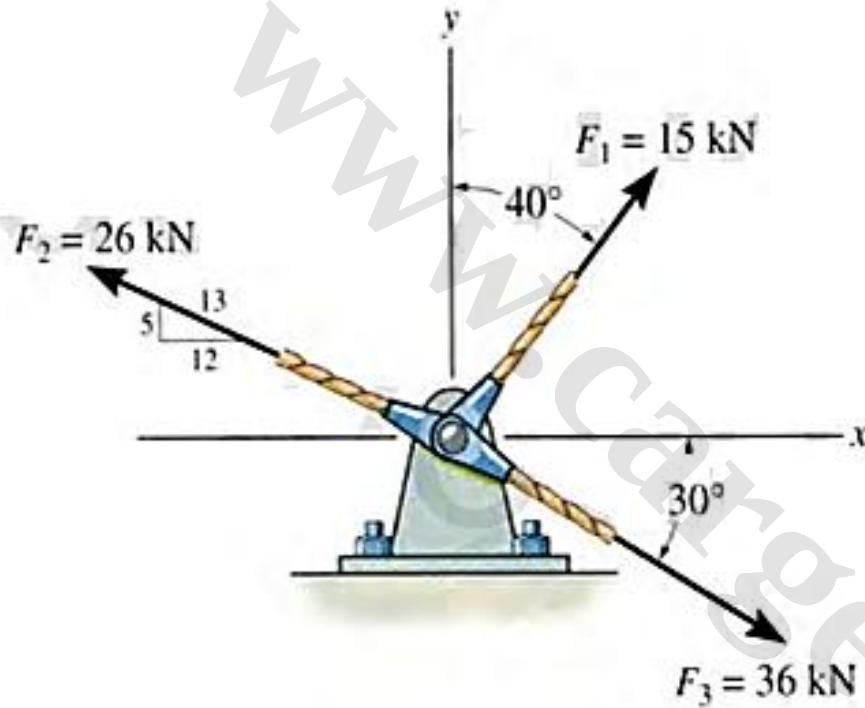
$$R = 199.6\text{ N}$$



$$\tan \alpha = \frac{14.3\text{ N}}{199.1\text{ N}}$$

$$\alpha = 4.1^\circ$$

اندازه و زاویه بردار نیروی برآیند را محاسبه کنید.



$$R_x = 36\cos 30 + 15\sin 40 - 26\frac{12}{13}$$

$$R_x = 16.8 \text{ KN}$$

$$R_y = -36\sin 30 + 15\cos 40 + 26\frac{5}{13}$$

$$R_y = 3.49 \text{ KN}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 17.15 \text{ KN}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{R_y}{R_x} = 78.26$$

یکای مناسب برای کمیت‌های خیلی بزرگ یا خیلی کوچک

نماد	مضرب	پیشوند	نماد	مضرب	پیشوند
da	10	دکا	d	$1/10 = 10^{-1}$	دسی
h	100	هکتو	c	$1/100 = 10^{-2}$	سانتی
k	1000	کیلو	m	$1/1000 = 10^{-3}$	میلی
M	10^6	مگا	m	$1/10^6 = 10^{-6}$	میکرو
G	10^9	گیگا	n	$1/10^9 = 10^{-9}$	نانو
T	10^{12}	ترا	p	$1/10^{12} = 10^{-12}$	پیکو

سیستم آحاد SI

کمیت‌های اصلی	یکاهای اصلی
طول	متر (M)
جرم	کیلوگرم (Kg)
زمان	ثانیه (S)
نیرو	نیوتن ($N=kg/s^2$)

قوانین نیوتن

اگر برآیند نیروهای وارد بر یک جسم صفر باشد، اگر جسم در حالت سکون باشد تا ابد ساکن می ماند، و اگر جسم در حال حرکت باشد تا ابد با همان سرعت و در همان جهت به حرکتش ادامه می دهد. به این قانون، قانون لختی یا اینرسی هم میگویند.

شتاب جسمی به جرم m که نیروی F بر آن وارد می شود هم جهت و متناسب با نیروی وارد بر آن است و با جرم جسم نسبت عکس دارد.

$$a = F/m$$

هر عملی را عکس العملی است؛ مساوی آن و در جهت خلاف آن .. این قانون به قانون کنش و واکنش هم معروف میباشد.

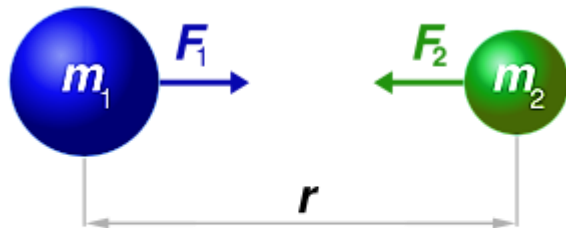
قانون گرانش

بنا به قانون گرانش هر دو جرم همواره یکدیگر را به سمت یکدیگر جذب می کنند.

بیان این قانون به صورت زیر است:

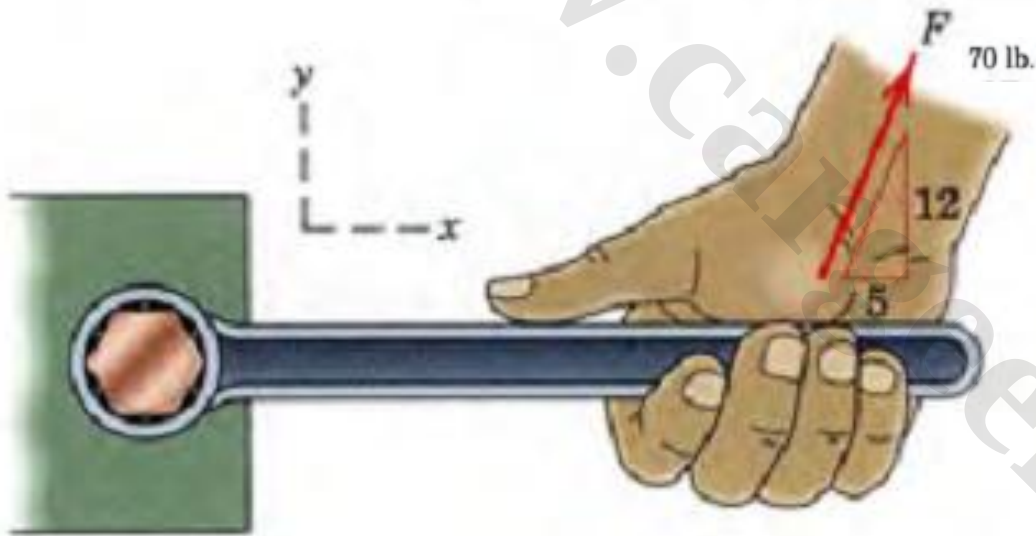
نیروی گرانشی میان دو با حاصل ضرب جرم دو ذره نسبت مستقیم و با مجذور

فاصله آنها از یکدیگر نسبت وارون دارد.



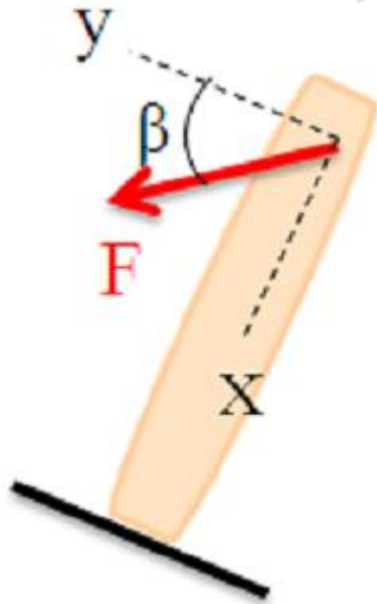
$$F_1 = F_2 = G \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

مثال ۹.



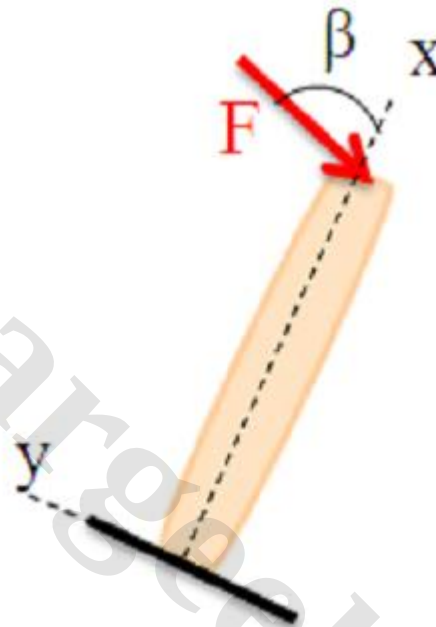
$$F_x = 29.2 \text{ lb}, F = 75.8 \text{ lb}$$

تعیین مولفه های برداری



$$F_x = F \sin \beta$$

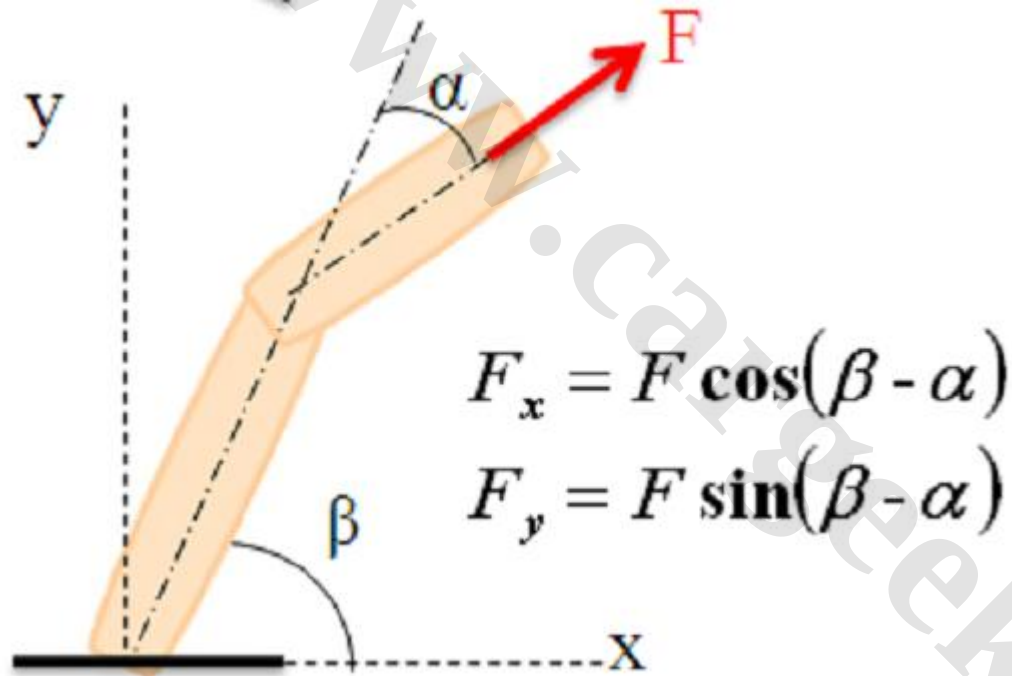
$$F_y = F \cos \beta$$



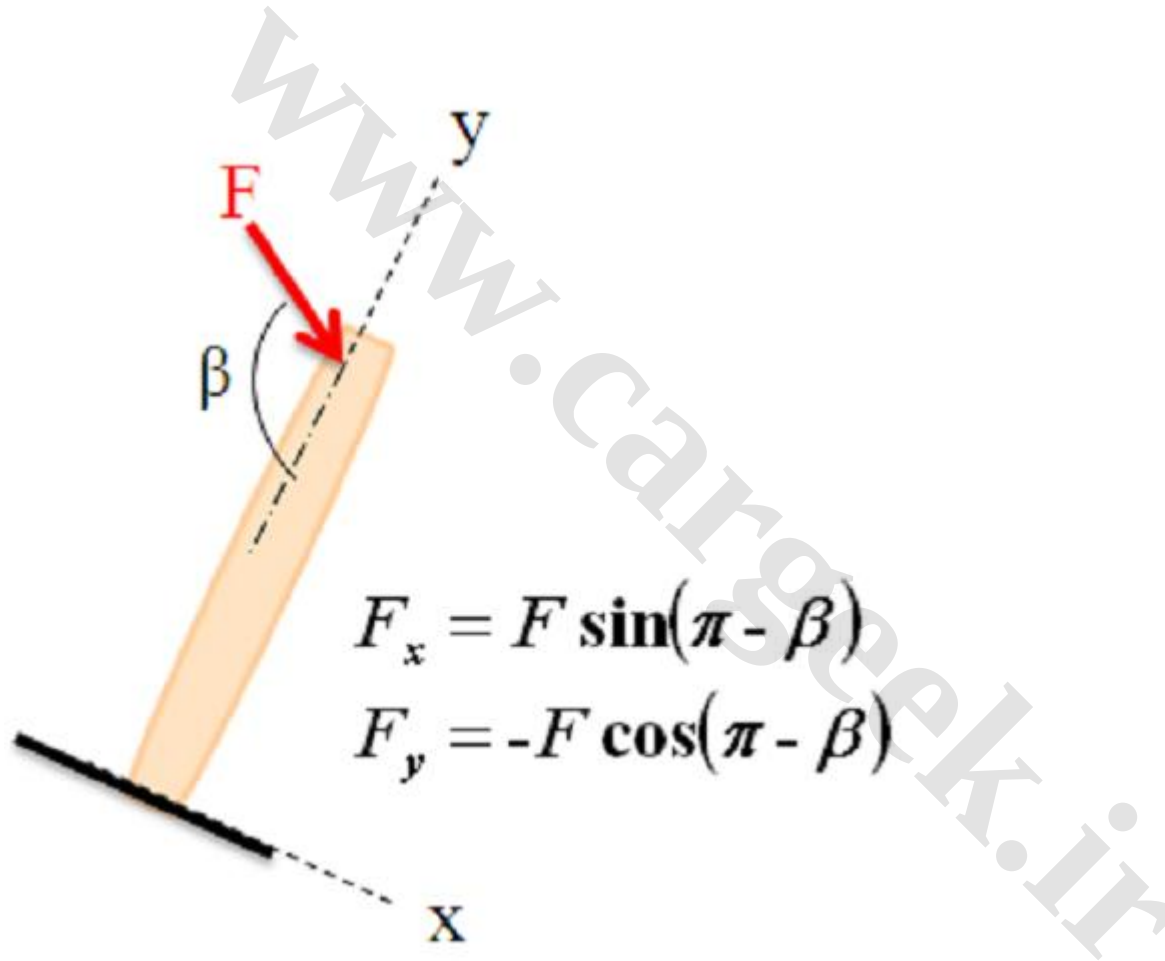
$$F_x = -F \cos \beta$$

$$F_y = -F \sin \beta$$

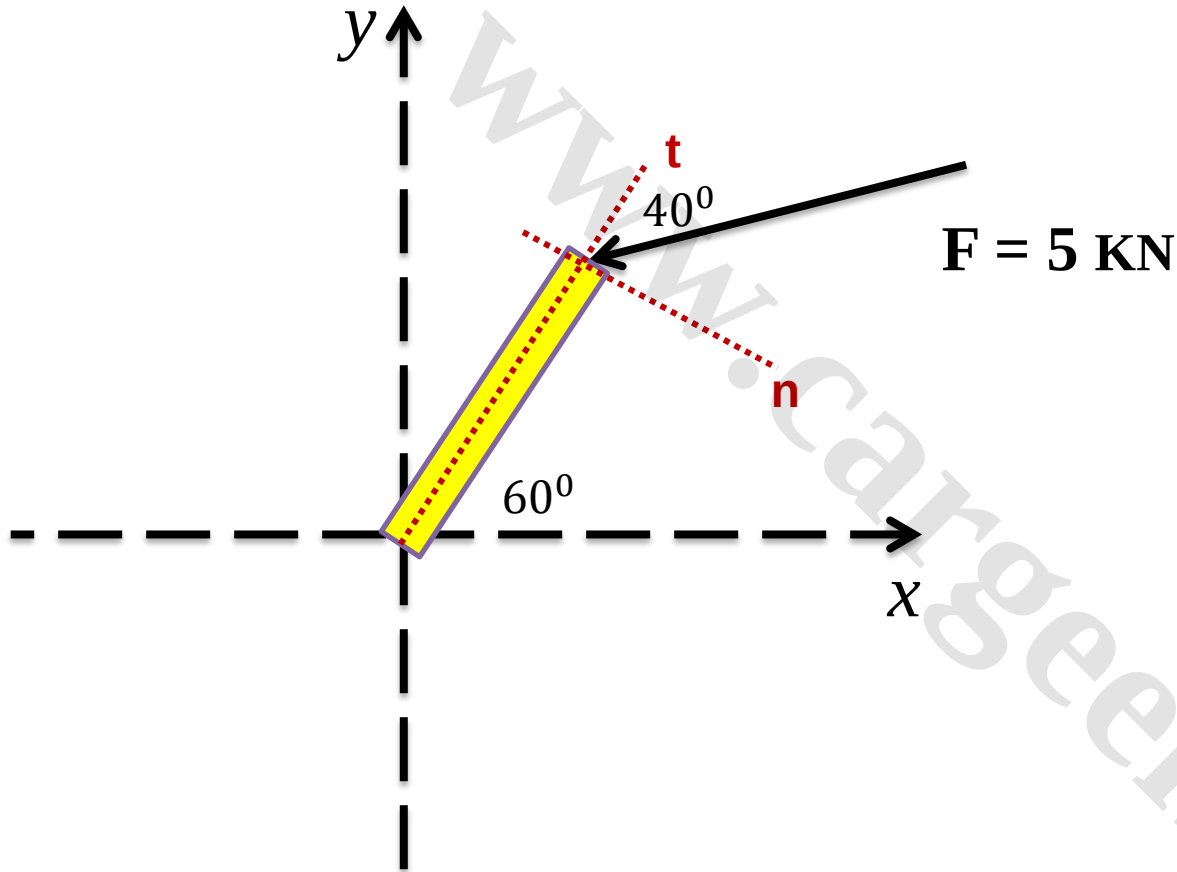
تعیین مولفه های برداری



تعیین مولفه های برداری



مثال ۱۰.

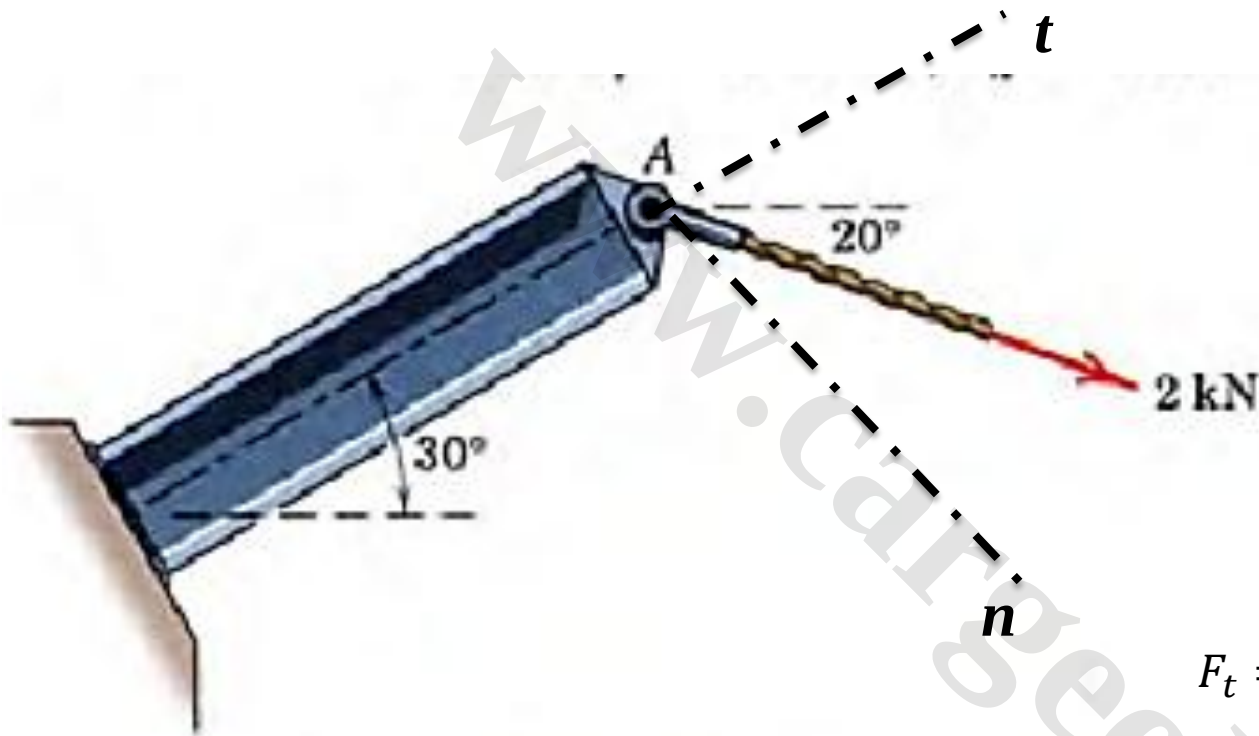


$$F_t = 5 \cos 40 = 3.83 \text{ kN}$$

$$F_n = 5 \sin 40 = 3.21 \text{ kN}$$

$$F_x = 5 \cos 20 = 4.69 \text{ kN}$$

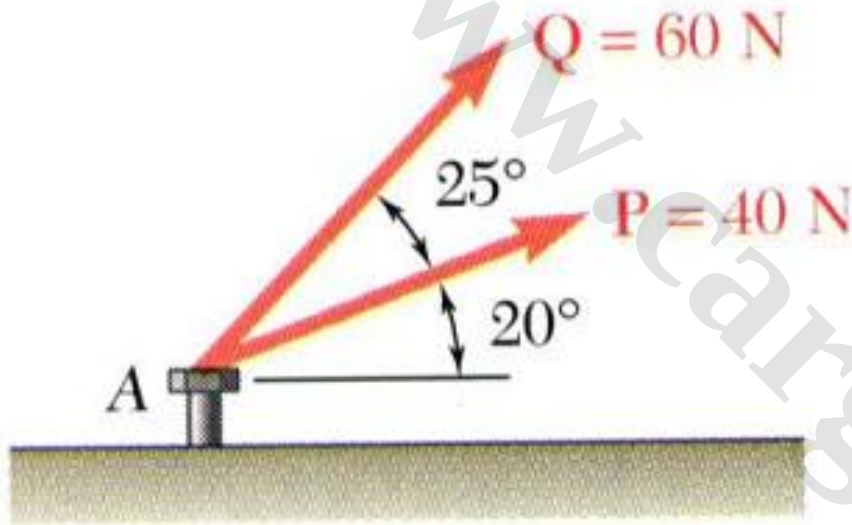
مثال ۱۱.



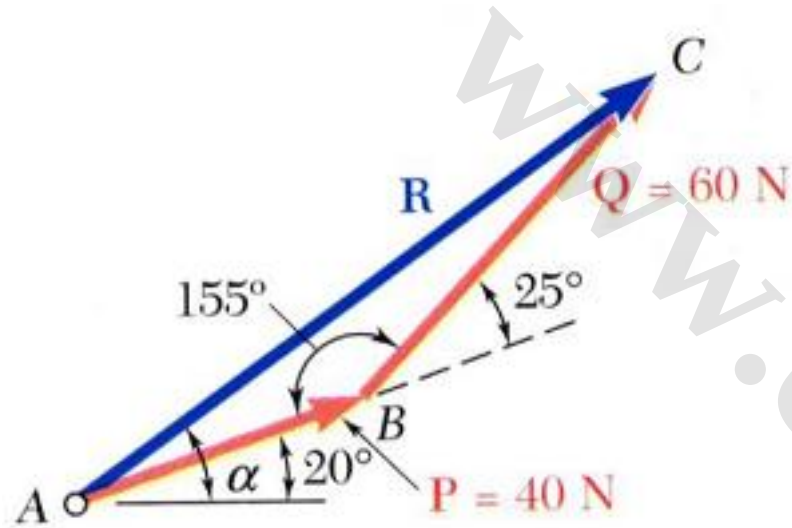
$$F_t = 2 \cos 50 = 3.83 \text{ KN}$$

$$F_n = 5 \sin 50 = 3.21 \text{ KN}$$

مثال ۱۲.



$$R = 98\text{ N} \quad \alpha = 35^\circ$$



$$\begin{aligned} R^2 &= P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B \\ &= (40N)^2 + (60N)^2 - 2(40N)(60N) \cos 155^\circ \end{aligned}$$

$$R = 97.73N$$

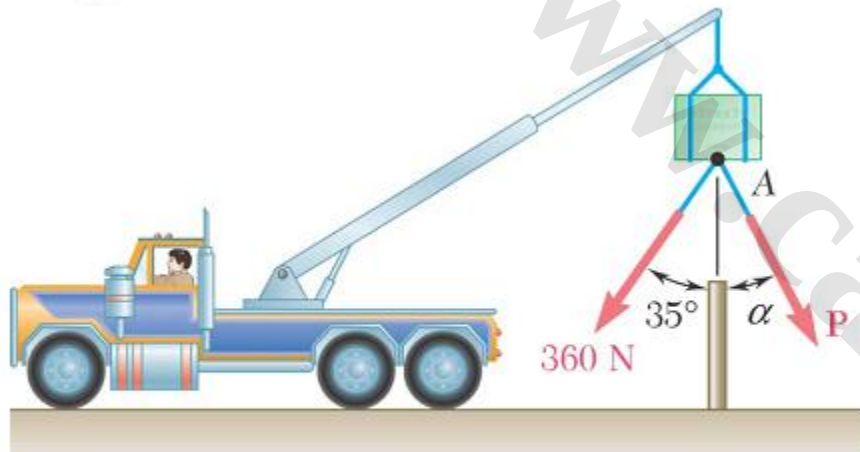
$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R} \Rightarrow \sin A = \sin B \frac{Q}{R} = \sin 155^\circ \frac{60N}{97.73N}$$

$$A = 15.04^\circ$$

$$\alpha = 20^\circ + A$$

$$\alpha = 35.04^\circ$$

تمرین ۲.



❖ مطابق شکل دو کابل به نقطه A متصل هستند. با

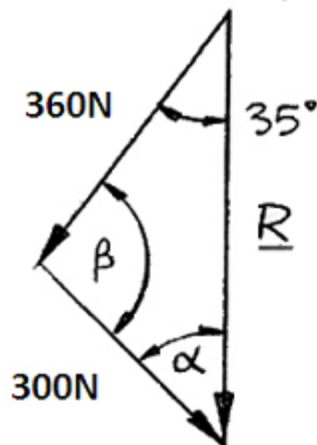
استفاده از روابط مثلثاتی و دانستن اینکه مقدار

نیروی P برابر 300N است، تعیین کنید:

الف) مقدار زاویه α را اگر R برآیند دو نیروی وارد

شده در نقطه A عمودی باشد.

ب) مقدار R



$$\frac{360N}{\sin \alpha} = \frac{300N}{\sin 35^\circ}$$

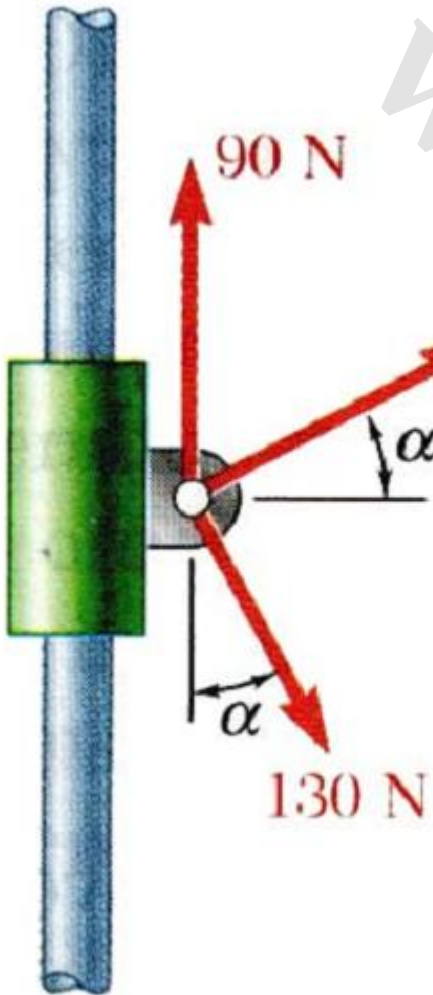
$$\sin \alpha = 0.6883 \Rightarrow \alpha = 43.5^\circ$$

$$\beta = 180 - (35^\circ + 43.5^\circ)$$

$$\frac{R}{\sin 101.5^\circ} = \frac{300N}{\sin 35^\circ} \Rightarrow R = 518.8N$$

تمرین ۳.

❖ به طوقه ای که میتواند روی میله عمودی بلغزد، سه نیرو مطابق شکل وارد میشود. مطلوب است:
الف) مقدار زاویه α به گونه ای که برآیند سه نیرو افقی باشد.
ب) مقدار برآیند



□ راه حل: از آنجاییکه **R** افقی است بنابراین

$$R_y = \Sigma F_y = 0$$

$$90 \text{ N} + (70 \text{ N})\sin \alpha - (130 \text{ N})\cos \alpha = 0$$

$$(13)\cos \alpha = (7)\sin \alpha + 9$$

$$13\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = (7)\sin \alpha + 9$$

طرفین رابطه را به توان ۲ میرسانیم

$$169(1 - \sin^2 \alpha) = (49)\sin^2 \alpha + (126)\sin \alpha + 81$$

$$(218)\sin^2 \alpha + (126)\sin \alpha - 88 = 0$$

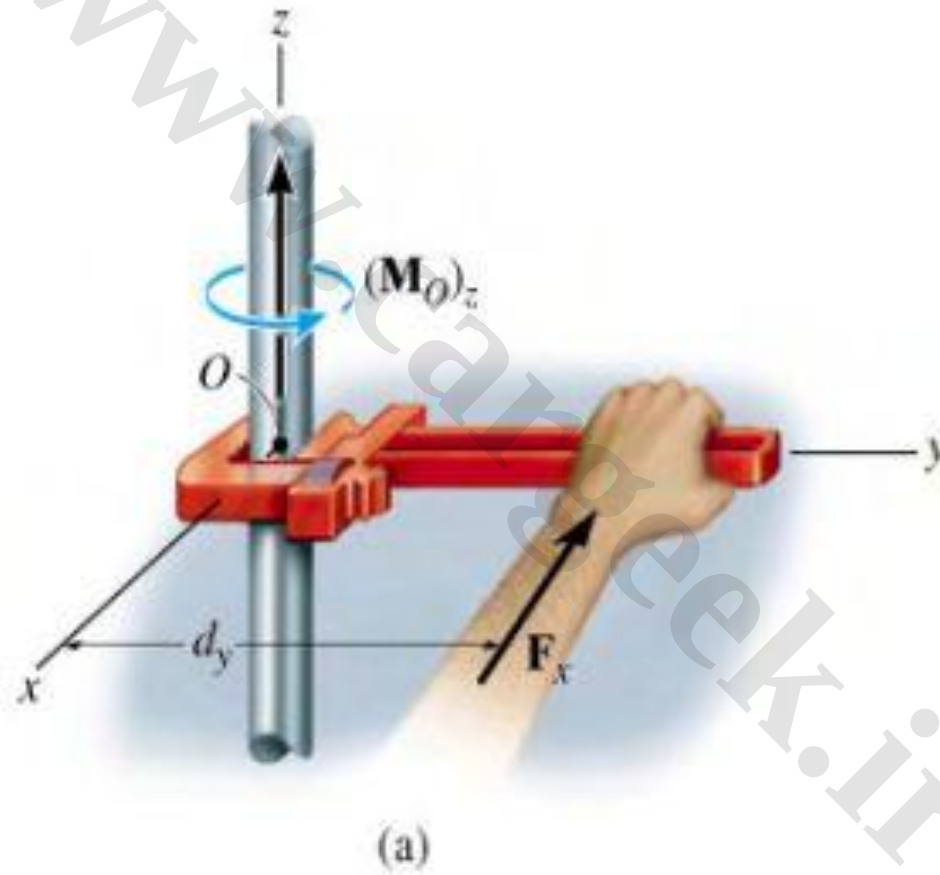
$$\sin \alpha = 0.40899 \Rightarrow \alpha = 24.1^\circ \blacktriangleleft$$

$$\mathbf{R} = R_x = \Sigma F_x$$

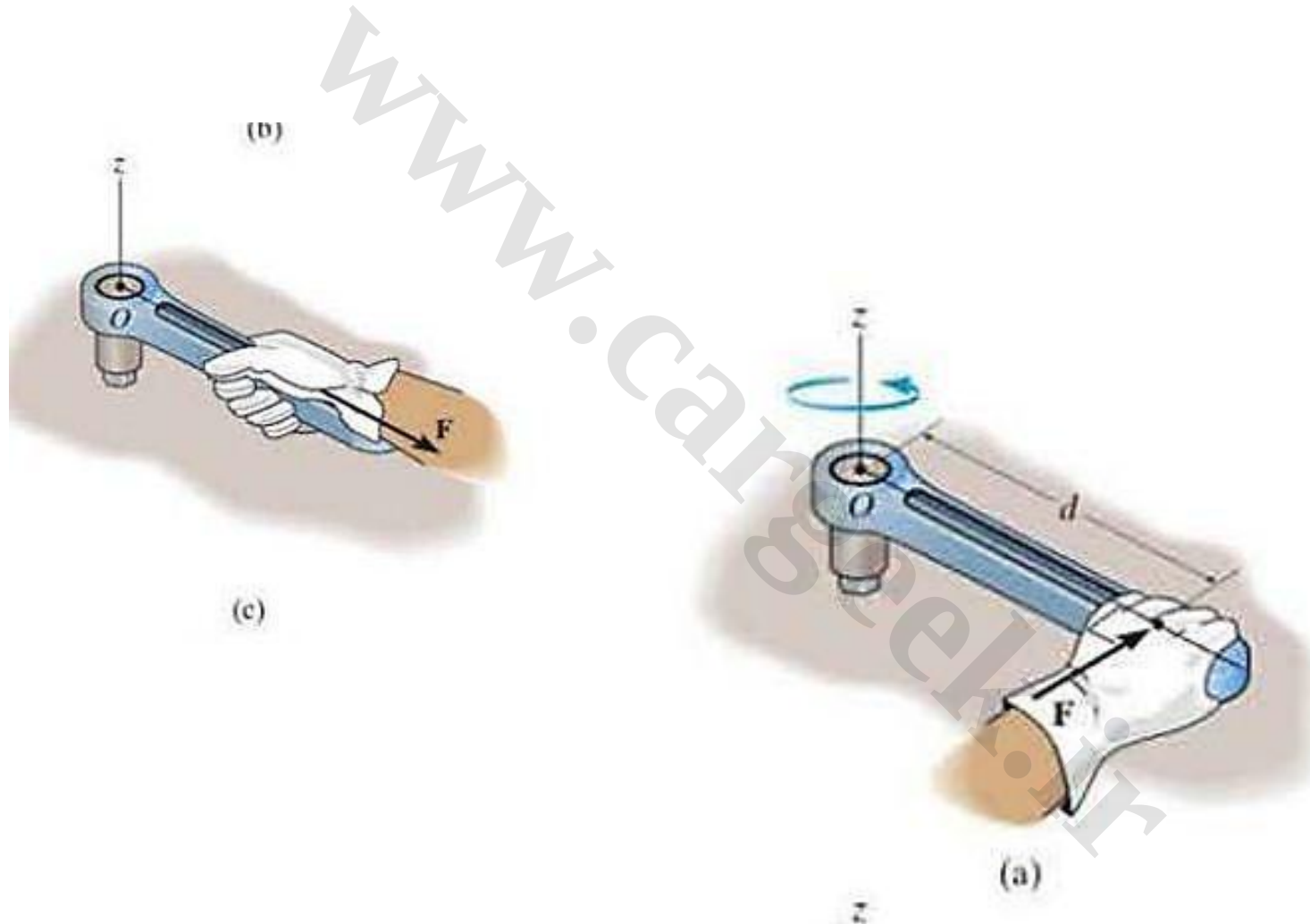
$$\Sigma F_x = (70\text{N})\cos 24.142^\circ + (130\text{N})\sin 24.142^\circ$$

$$R = 117.0 \text{ N} \blacktriangleleft$$

گشتاور

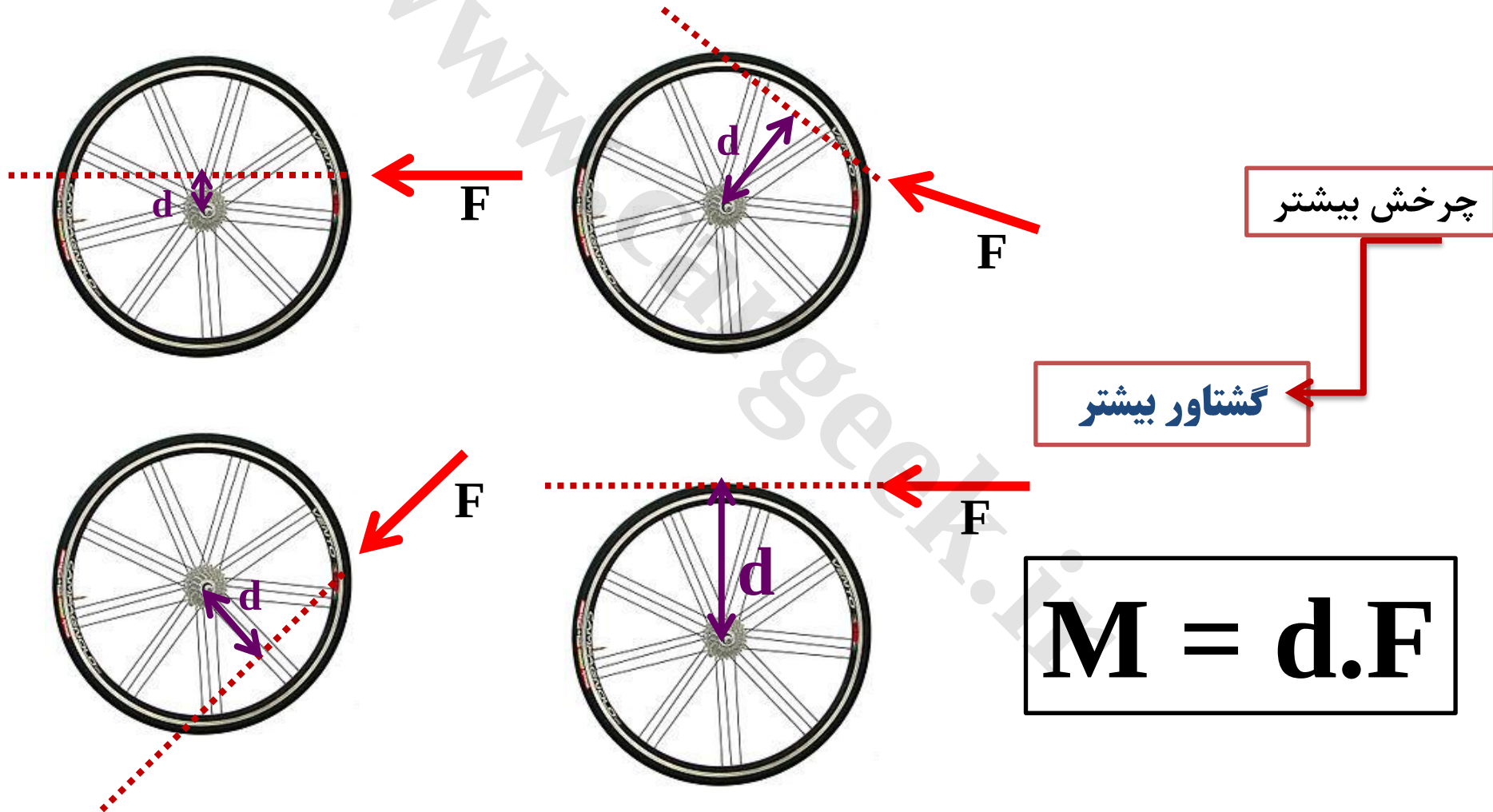


گشتاور

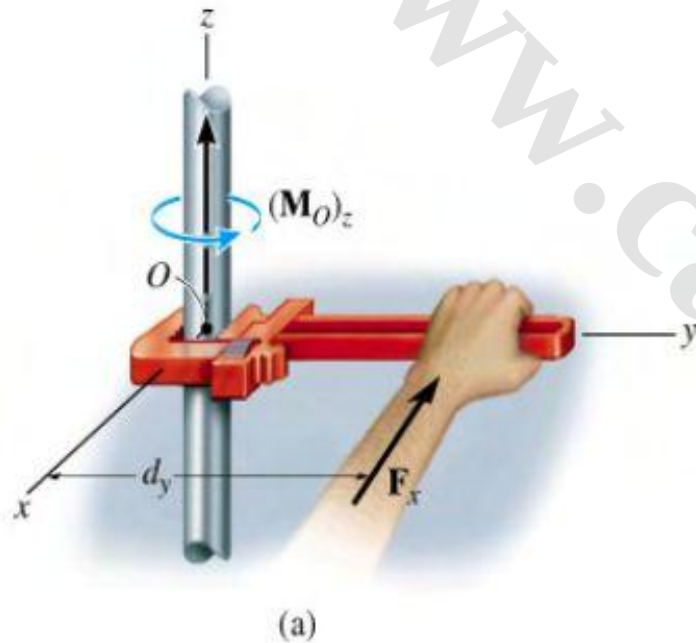


گشتاور

در کدام یک از شکل های زیر نیروی F سبب گردش بیشتر چرخ می گردد؟



گشتاور (مان، *moment*) یک نیرو



- تعریف: گشتاور (*moment*) یک نیرو حول یک نقطه یا محور کمیتی است که تمایل آن نیرو به چرخش جسم حول آن نقطه یا محور را بیان می‌کند.

- گاهی اوقات به آن ترک (*torque*) هم گفته می‌شود.

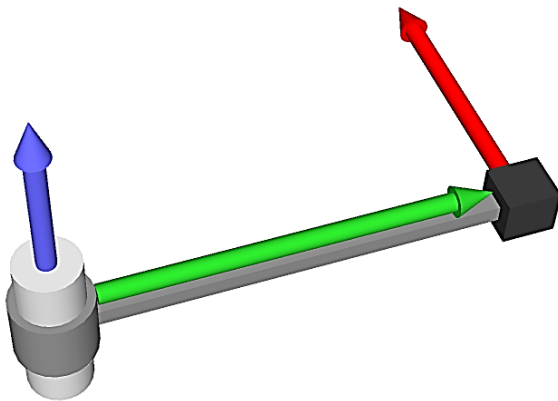
- اگر بازوی گشتاور d صفر باشد، هیچ گشتاوری تولید نخواهد شد.

خصوصیات گشتاور نیرو

❖ گشتاور نیرو کمیتی برداری است و مقدار بردار گشتاور برابر است با حاصلضرب نیرو در فاصله عمودی آن از محوری که جسم به دور آن می‌گردد.

❖ فاصله عمودی نیرو از نقطه‌ای که جسم حول آن می‌گردد را بازوی گشتاور می‌نامند.

❖ نقطه چرخش را می‌توان روی تکیه گاه جسم یا روی محور چرخش جسم در نظر گرفت.



$$\text{مقدار نیرو} \times \text{بازوی گشتاور} = \text{گشتاور}$$

یکای گشتاور نیرو ، نیوتن متر $N.m$ است .

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

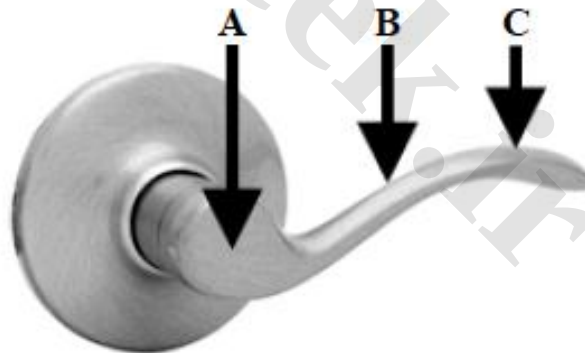
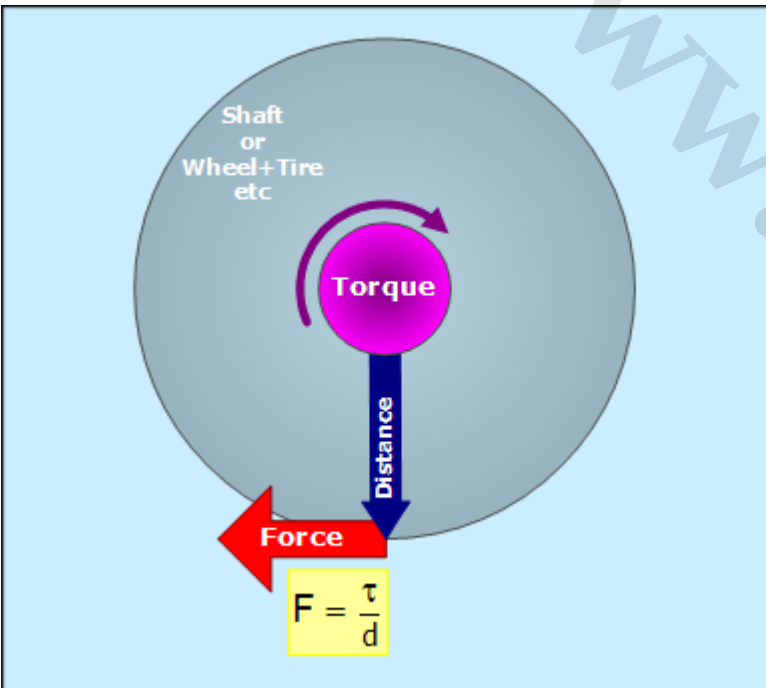
نمایش ریاضی گشتاور (Moment Notation)

- گشتاور یک نیرو حول نقطه O

$$\mathbf{M}_O$$

- گشتاور یک نیرو حول محوری (axis) که از نقطه O عبور می‌کند.

$$(\mathbf{M}_O)_z$$



اندازه و جهت

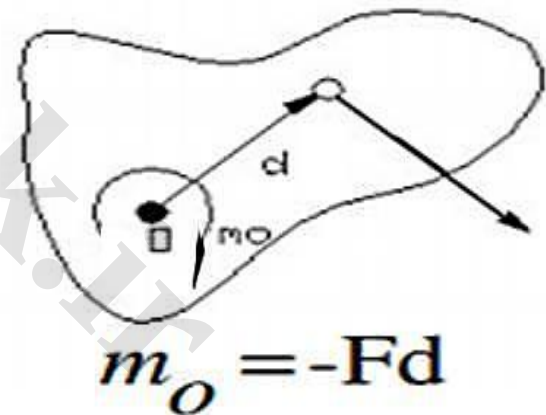
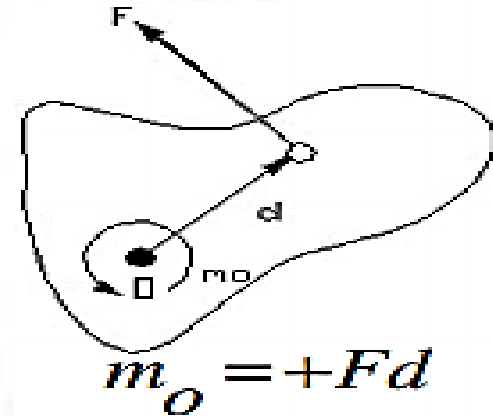
• اندازه

$$M_O = Fd$$

• جهت

علامت گشتاور نیرو

در جهت مثلثاتی دوران دهد علامت آن مثبت
اگر در خلاف جهت مثلثاتی آن را منفی در
نظر می گیرند.



مثال 1

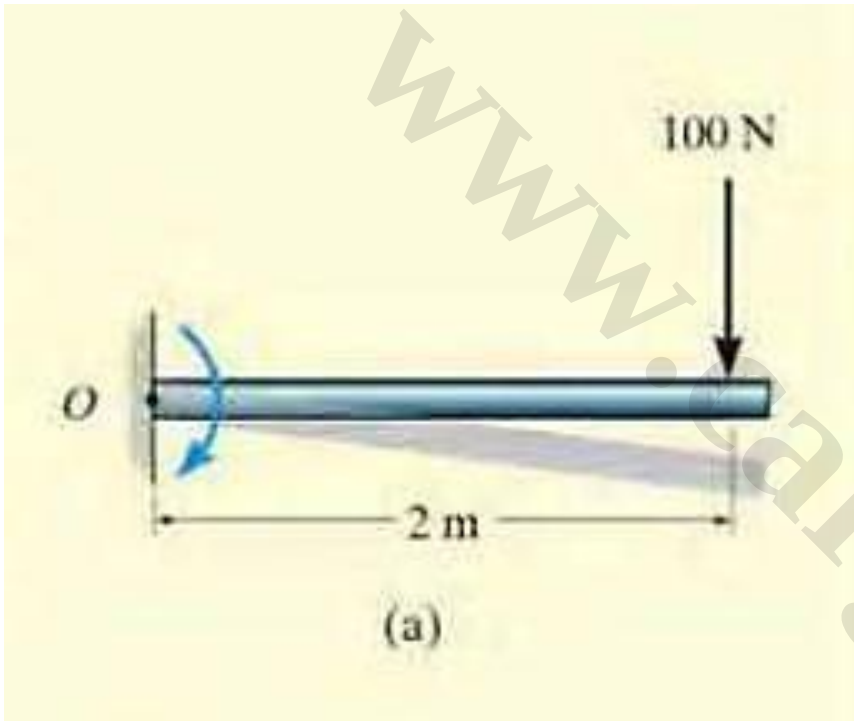


Fig. 4-4a $M_O = (100 \text{ N})(2 \text{ m}) = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$

مثال 2

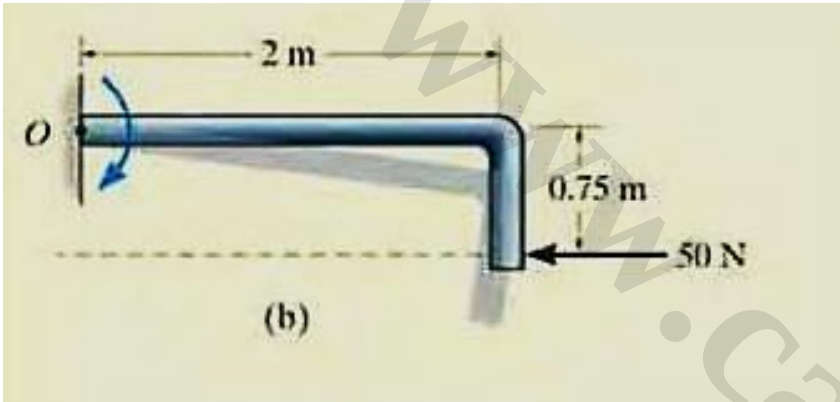


Fig. 4-4b $M_O = (50 \text{ N})(0.75 \text{ m}) = 37.5 \text{ N} \cdot \text{m} \curvearrowleft$

مثال 3

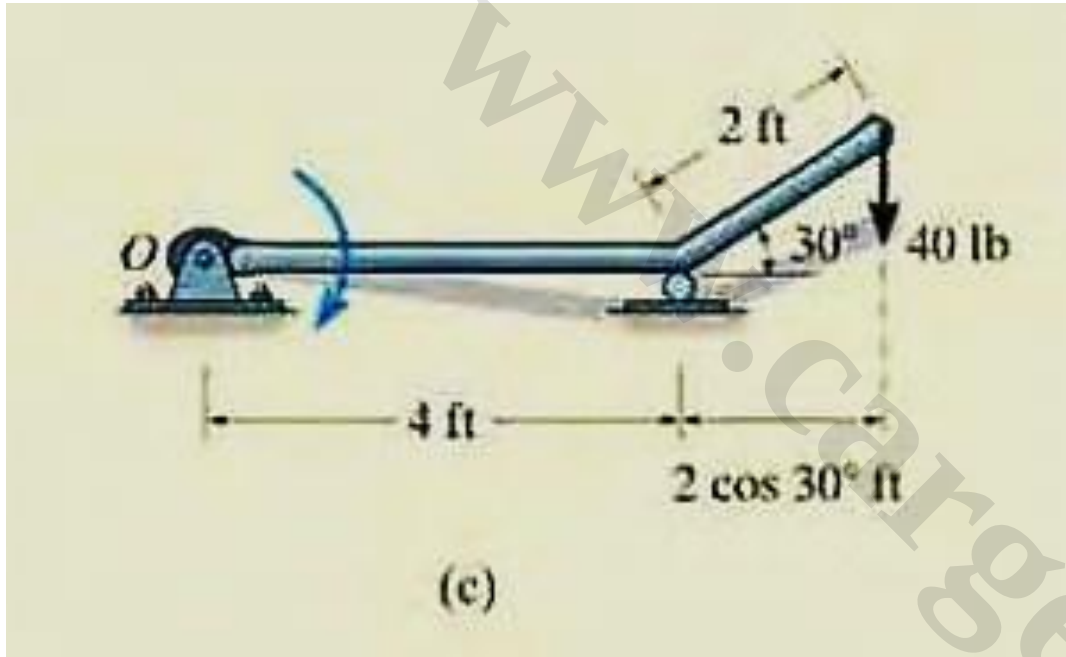


Fig. 4-4c $M_O = (40 \text{ lb})(4 \text{ ft} + 2 \cos 30^\circ \text{ ft}) = 229 \text{ lb} \cdot \text{ft} \curvearrowleft$

مثال 4

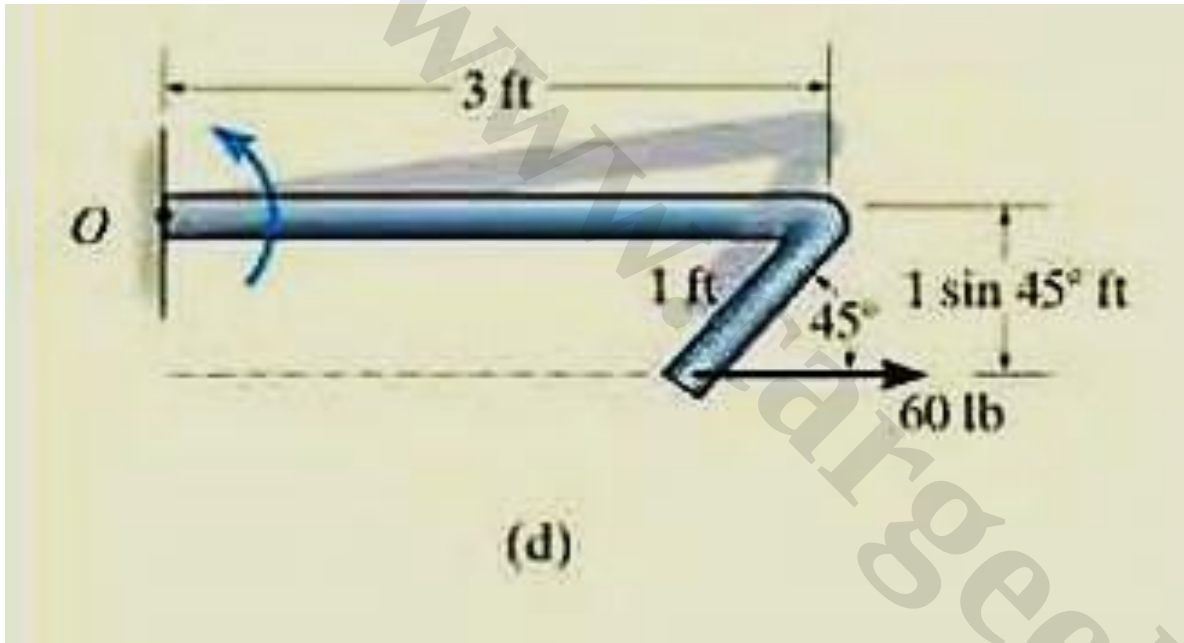


Fig. 4-4d $M_O = (60 \text{ lb})(1 \sin 45^\circ \text{ ft}) = 42.4 \text{ lb} \cdot \text{ft} \curvearrowright$

مثال ۵

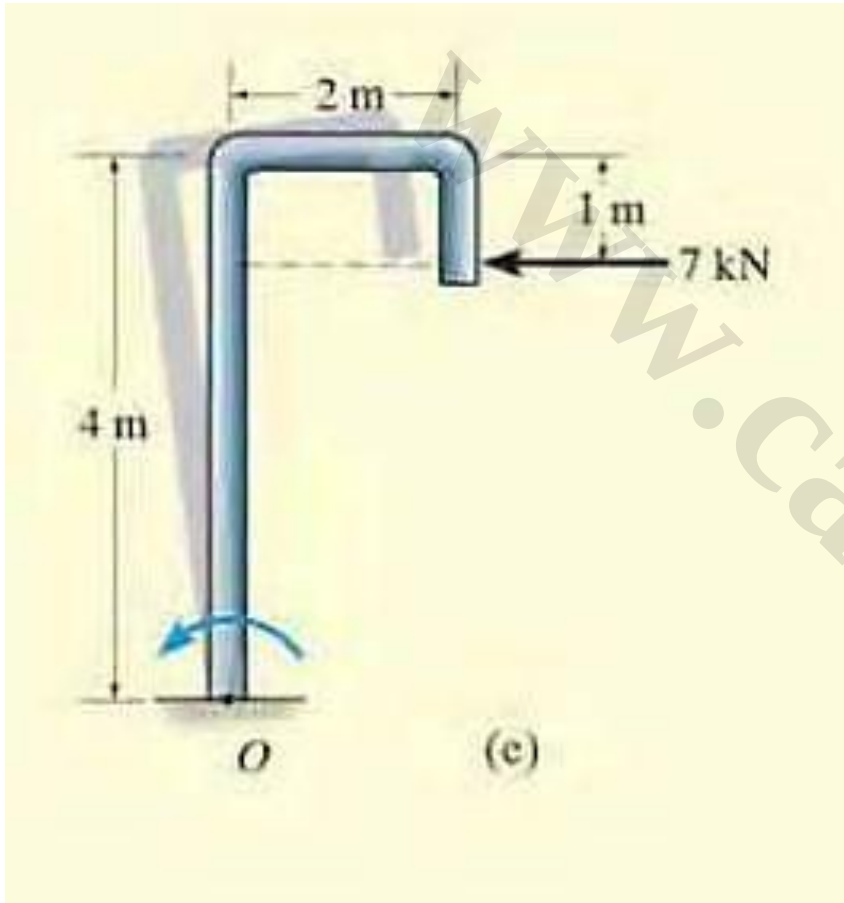
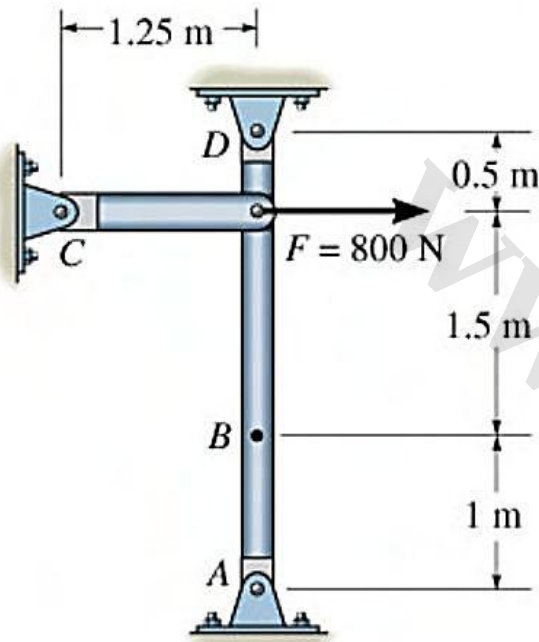


Fig. 4-4e $M_O = (7 \text{ kN})(4 \text{ m} - 1 \text{ m}) = 21.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$)

مثال ۶



مثال: گشتاور نیروی
800-N را که بر قاب
مقابل عمل می‌کند حول
پین‌های A و B و C و
D بیابید.

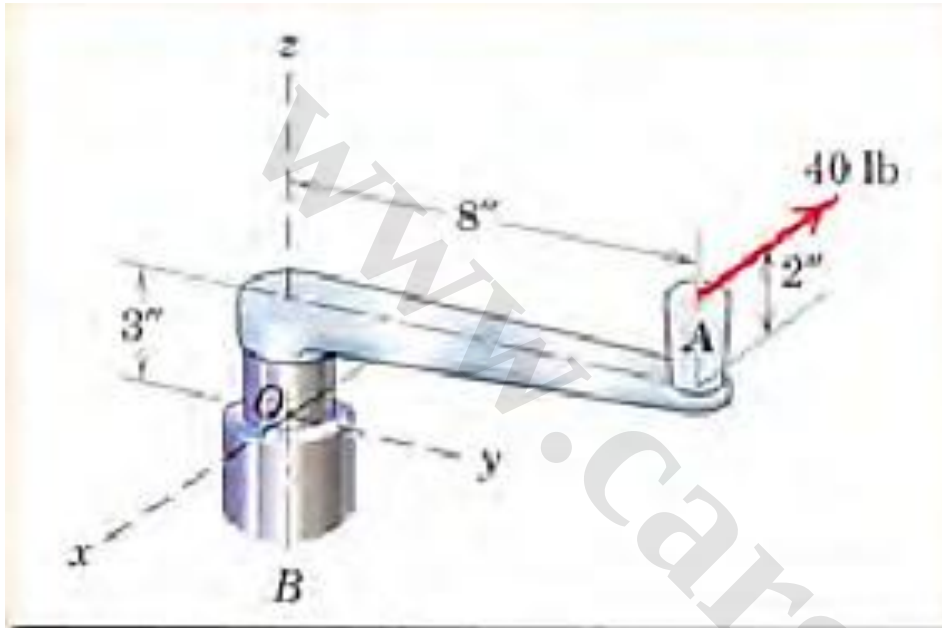
$$\sum M_A = -800 \times 2.5 = 2000 \text{ N.m}$$

$$\sum M_B = -800 \times 1.5 = 1200 \text{ N.m}$$

$$\sum M_D = +800 \times 0.5 = 400 \text{ N.m}$$

$$\sum M_B = 0 \text{ N.m}$$

مثال ۷



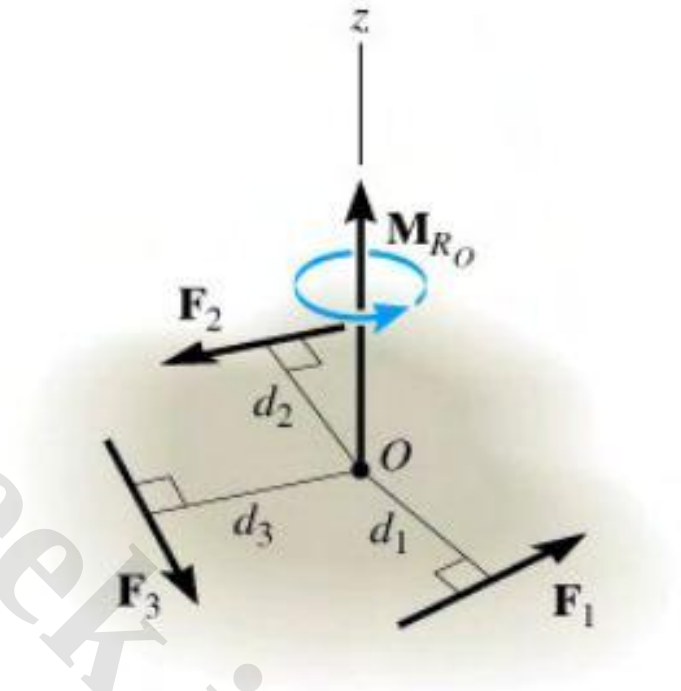
$$8 \text{ inch} = \frac{8}{12} \text{ ft} = 0.66 \text{ ft}$$

$$\sum M_O = +40 \times 0.6 = 26.6 \text{ lb.ft}$$

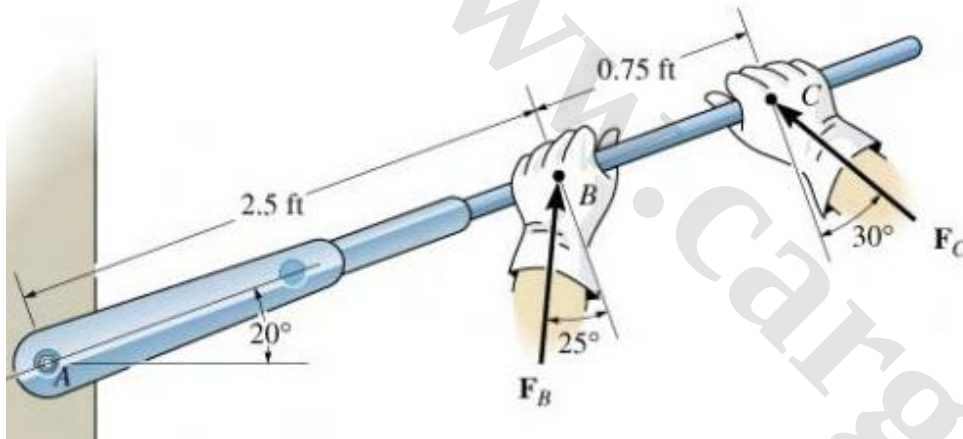
گشتاور معادل یک سیستم نیرویی واقع در یک صفحه

- گشتاور سیستم نیروهای صفحه‌ای می‌تواند با جمع جبری گشتاور تک‌تک نیروها حول نقطه مورد نظر تعیین شود.

$$M_{R_O} = F_1 d_1 + F_2 d_2 + F_3 d_3$$
$$= \sum Fd$$

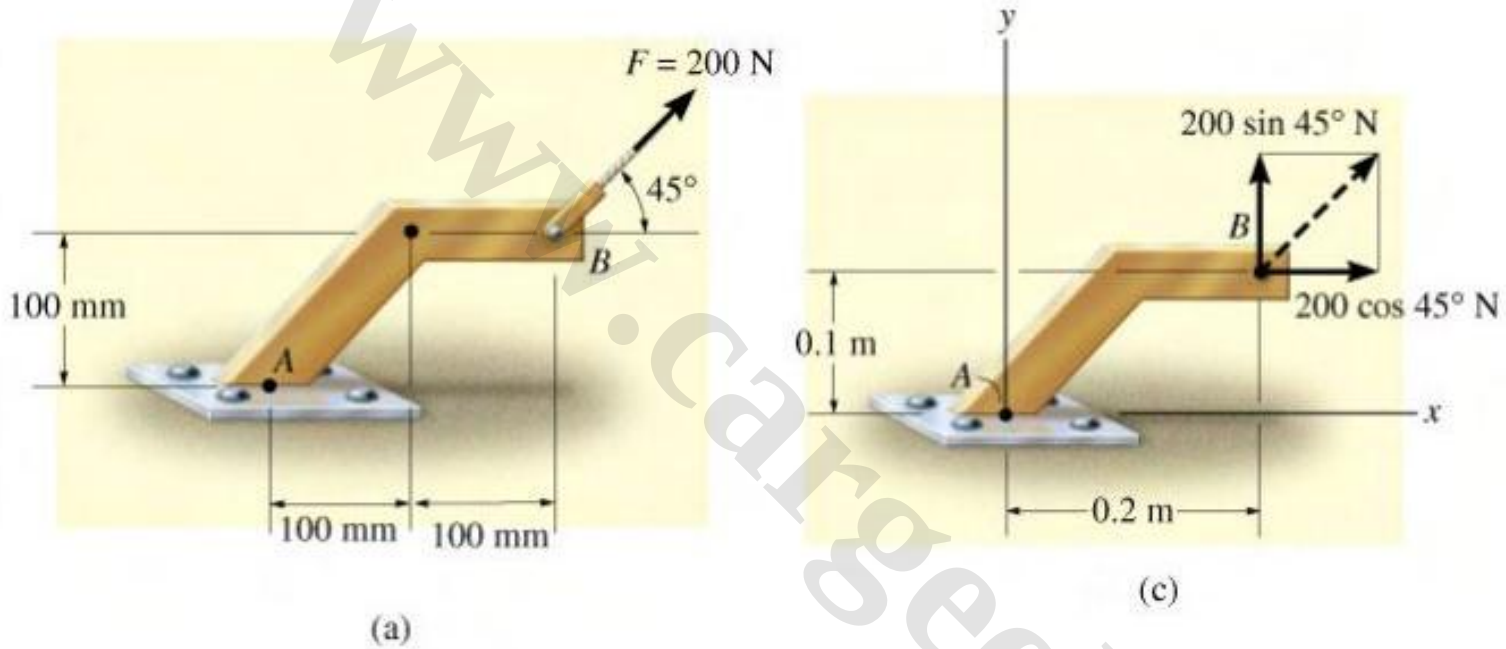


مثال: اگر $F_B = 30 \text{ lb}$ و اگر $F_C = 45 \text{ lb}$ ، مطلوب است گشتاور معادل حول پیچی که در نقطه A واقع شده است.

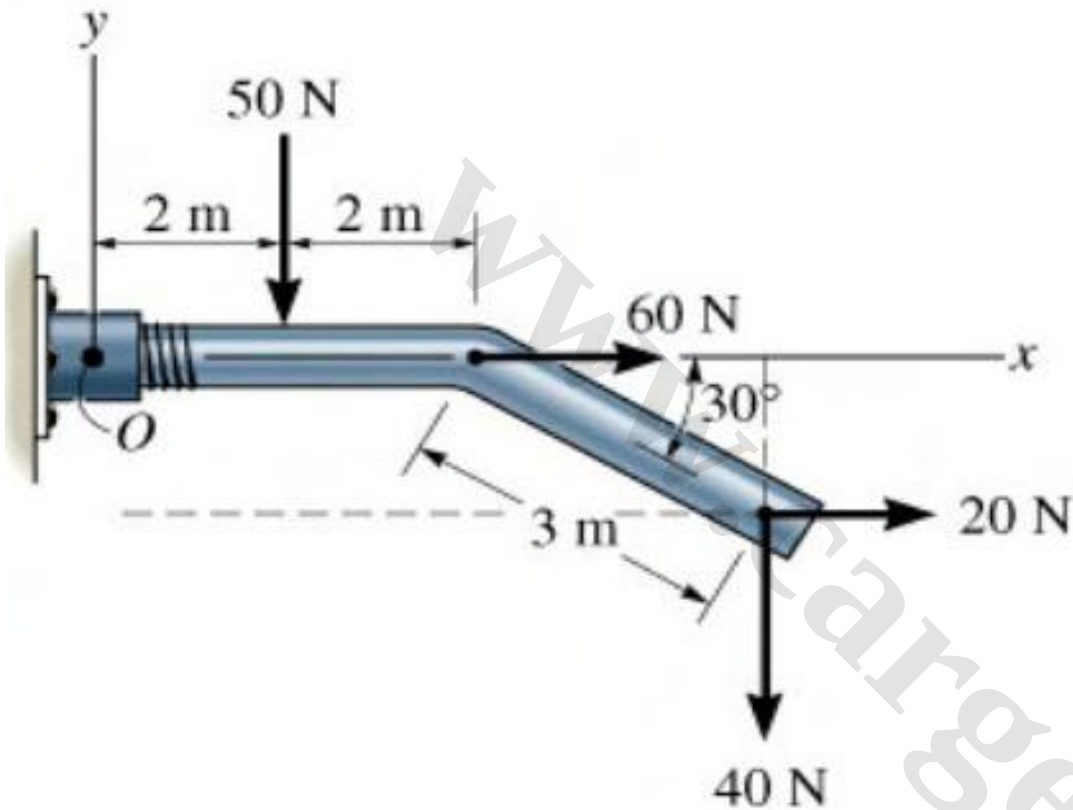


$$\begin{aligned}\sum M_A &= F_B \cos 25^\circ \times 2.5 + F_C \cos 30^\circ \times 3.25 = 30 \times 0.9 \times 2.5 + 45 \times 0.86 \times 3.25 \\ &= 193.275 \text{ lb.ft}\end{aligned}$$

مثال: گشتاور را حول نقطه A بیابید.



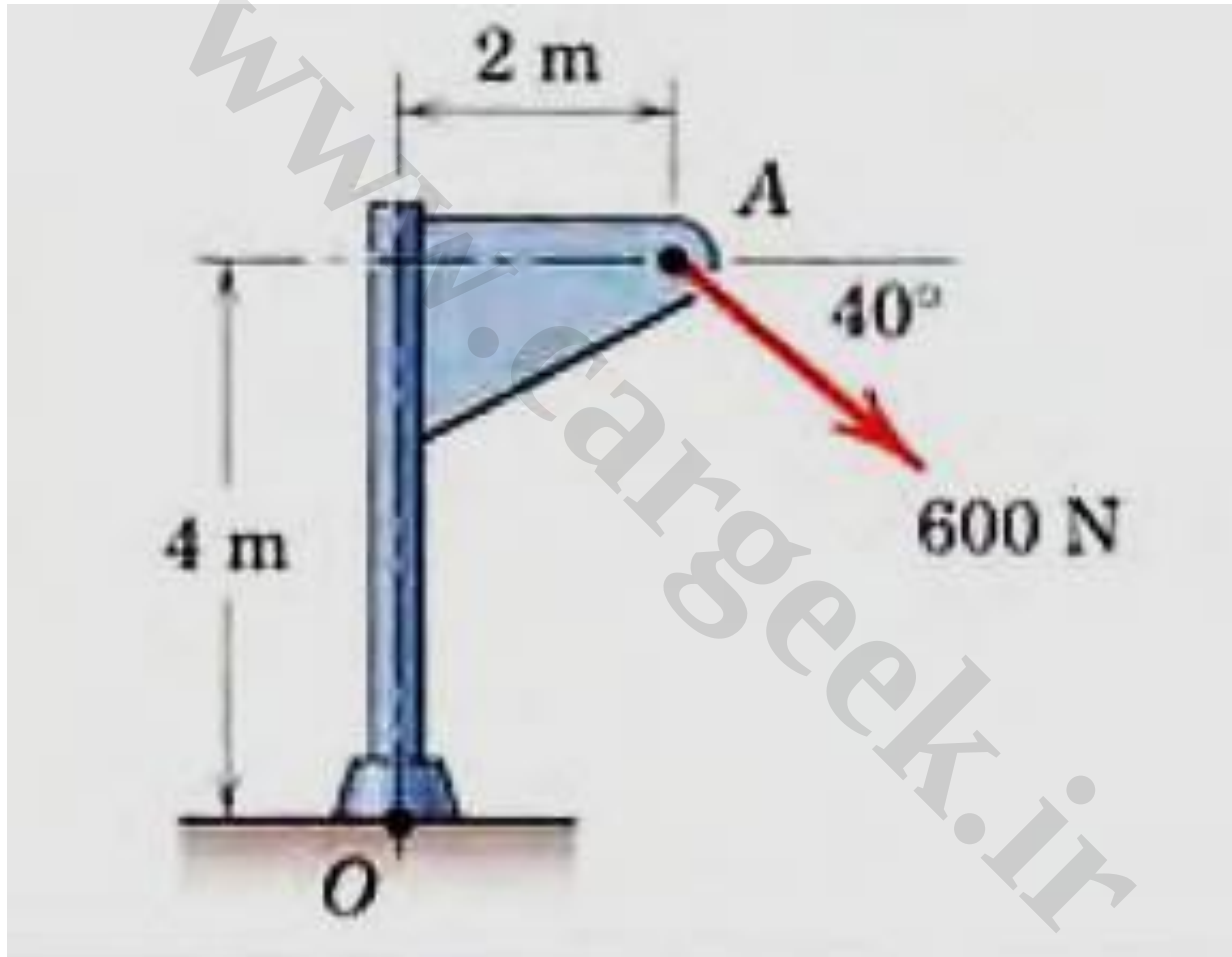
$$\sum M_A = -200 \cos 45^\circ \times 0.1 + 200 \sin 45^\circ \times 0.2 = -14.14\text{ N.m}$$

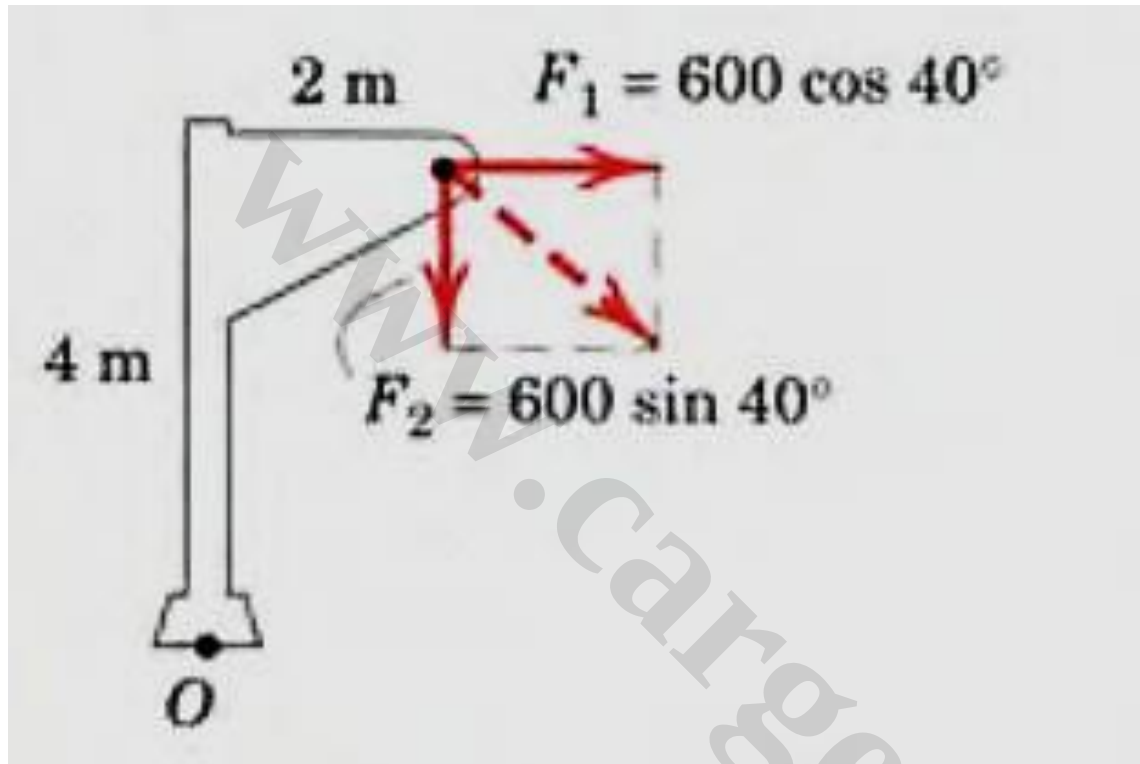


مثال: گشتاور معادل ۴
نیرویی را که بر روی لوله
مقابل عمل می‌کنند حول
نقطه O بیابید.

$$\sum M_O = -50 \times 2 - 40 \times (4 + 3 \cos 30) + 20 \times 3 \sin 30 = -333.93 \text{ N.m}$$

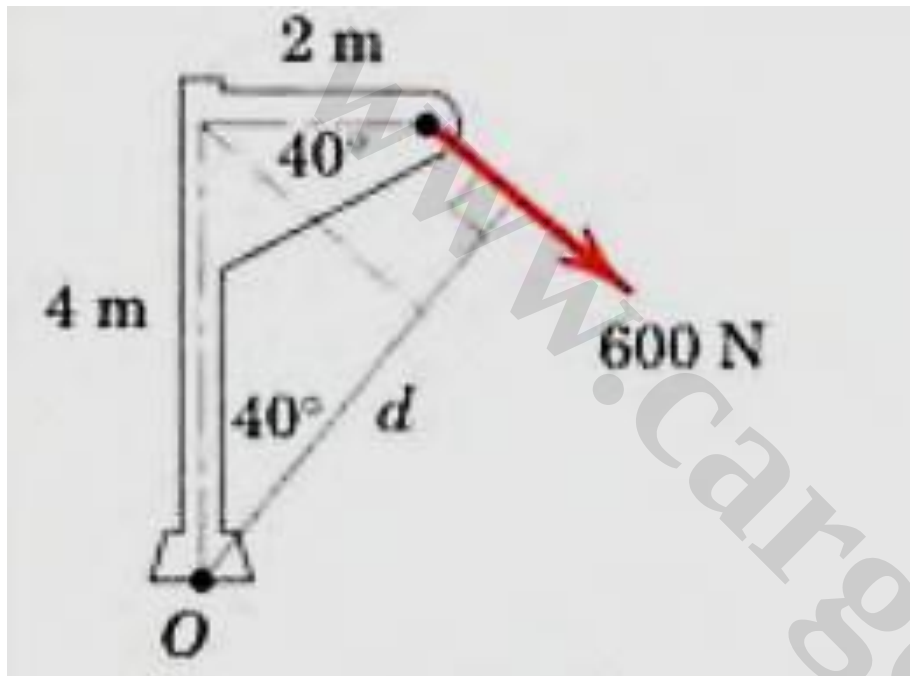
تمرین ۱





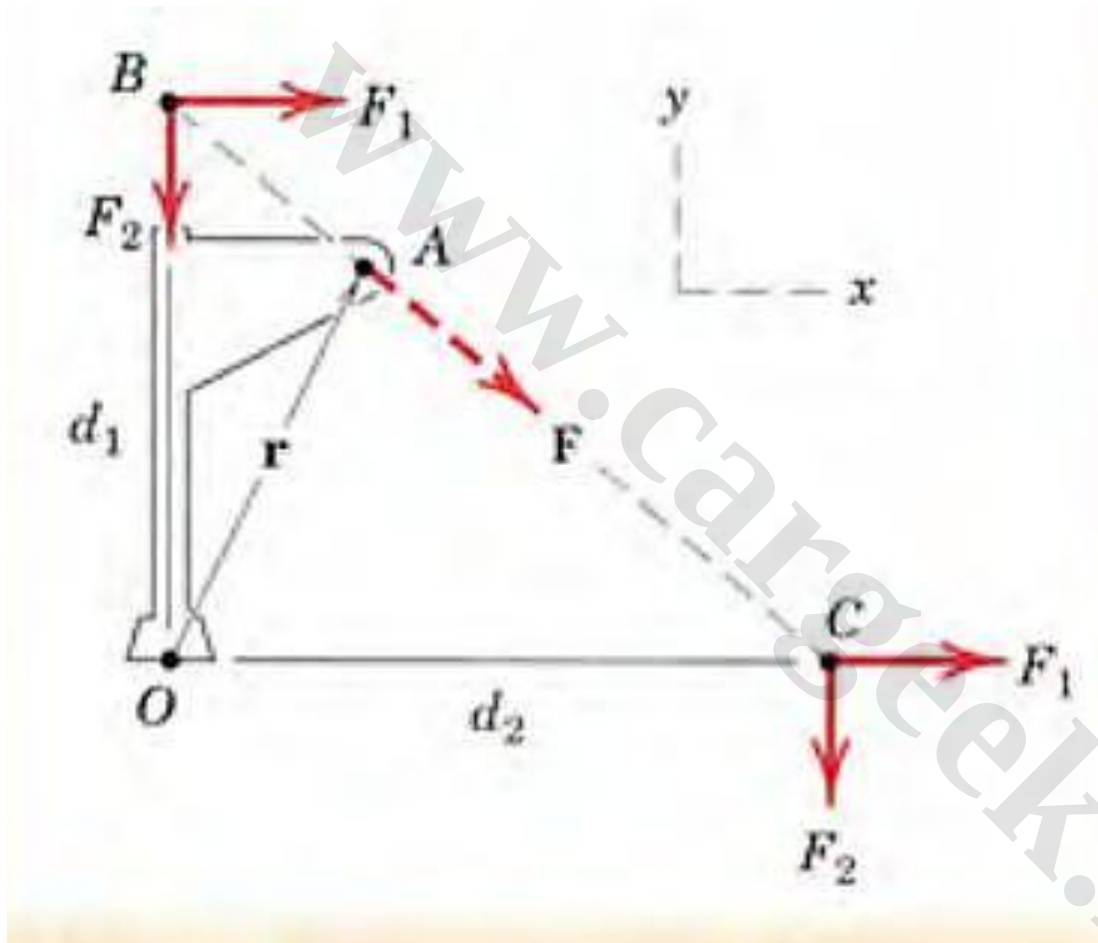
$$F_1 = 600 \cos 40^\circ = 460 \text{ N}, \quad F_2 = 600 \sin 40^\circ = 386 \text{ N}$$

$$M_O = 460(4) + 386(2) = 2610 \text{ N}\cdot\text{m}$$

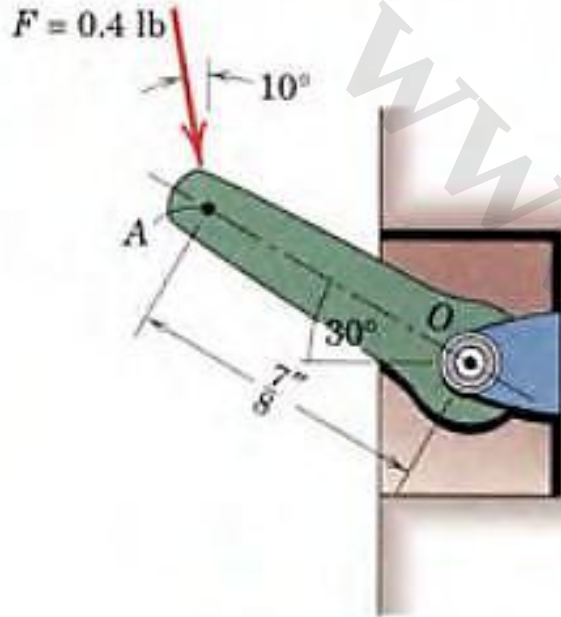


$$d = 4 \cos 40^\circ + 2 \sin 40^\circ = 4.35 \text{ m}$$

$$M_O = 600(4.35) = 2610 \text{ N}\cdot\text{m}$$

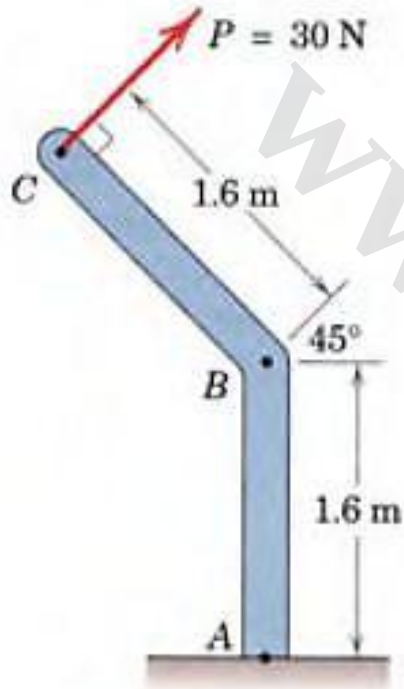


تمرین ۳



$$\sum M_O = -0.4 \cos 10^\circ \times \frac{7}{8}$$

تمرین ۴



$$\sum M_A = -30 \cos 45^\circ \times (1.6 \sin 45^\circ + 1.6) - 30 \cos 45^\circ \times 1.6 \cos 45^\circ = -87.13 \text{ N.m}$$

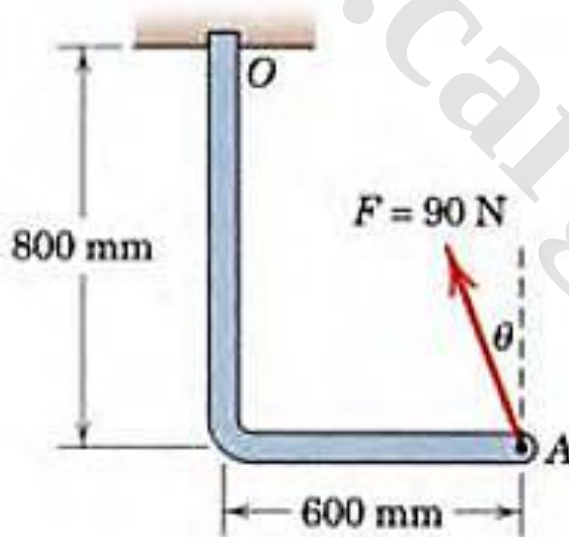
تمرین ۵

2/43 (a) Calculate the moment of the 90-N force about point O for the condition $\theta = 15^\circ$. Also, determine the value of θ for which the moment about O is (b) zero and (c) a maximum.

Ans. (a) $M_O = 33.5 \text{ N}\cdot\text{m}$ CCW

(b) $\theta = 36.9^\circ$ (or 217°)

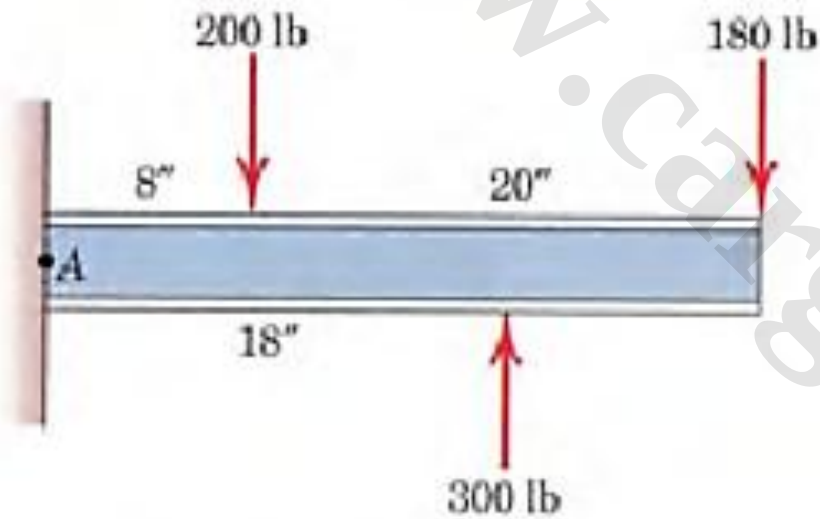
(c) $\theta = 126.9^\circ$ (or 307°)



Problem 2/43

تمرین ۶

*Ans. $R = 80$ lb down, $M_A = 1240$ lb-in. CW
 $x = 15.5$ in.*



Problem 2/157

مثال ۱۰

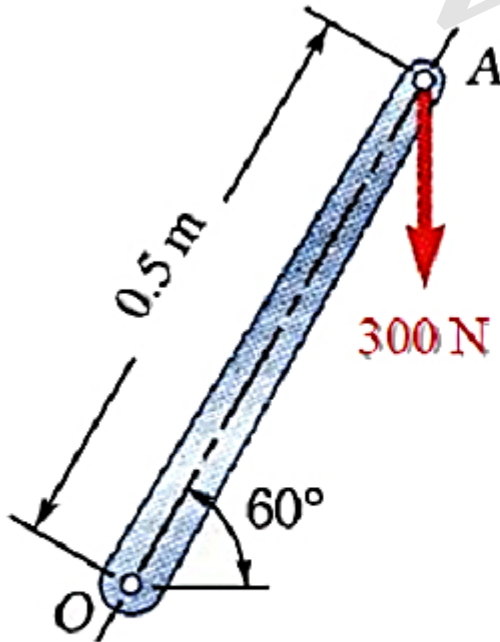
❖ یک نیروی عمودی با بزرگی 300N بر انتهای اهرمی که در نقطه O به یک محور متصل شده است، اعمال می گردد. مطلوب است:
الف) گشتاور نیروی 300N حول نقطه O .

ب) بزرگی نیرویی که اگر بصورت افقی بر نقطه A وارد شود، همین مقدار گشتاور حول نقطه O بوجود آورد.

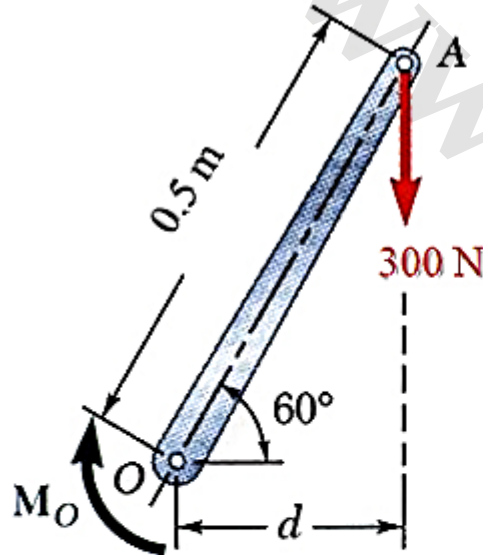
ج) کوچکترین نیروی وارد بر نقطه A که همان گشتاور را تولید کند.

د) در چه فاصله ای از محور باید یک نیروی عمودی 750N اعمال شود تا همان گشتاور حول نقطه O تولید گردد.

ه) مشخص کنید که آیا هیچ یک از نیروهای بدست آمده در بخش های b ، c و d معادل نیروهای اصلی هستند یا خیر؟



مثال ۱۰



الف) گشتاور حول O: فاصله عمودی نقطه O از خط اثر 300N

$$d = (0.5m) \cos 60^\circ = 0.25m$$

مقدار گشتاور ناشی از اعمال نیروی 300N حول نقطه O:

$$M_O = Fd$$

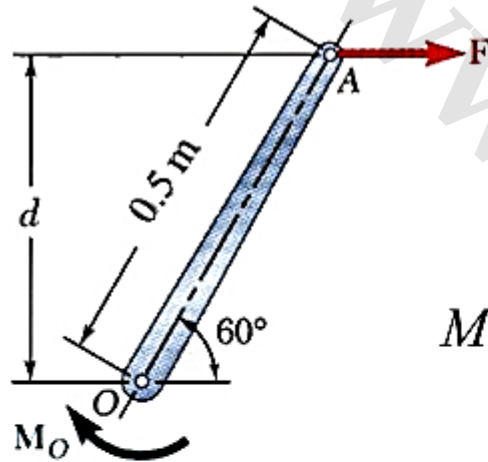
$$M_O = (300N)(0.25m) = 75.0 \text{ N.m}$$

چون نیروی اعمال شده، تمایل دارد اهرم را در جهت ساعتگرد حول نقطه O به دوران در آورد، گشتاور با بردار M_O که بر صفحه شکل هندسی عمود است و جهت آن به سمت داخل صفحه کاغذ است،

$$M_O = 75.0 \text{ N.m}$$

نشان داده خواهد شد. این واقعیت را بصورت زیر بیان می کنیم:

مثال ۱۰



ب) نیروی افقی: در این مورد، داریم:

$$d = (0.5 \text{ m}) \sin 60^\circ = 0.433 \text{ m}$$

چون گشتاور حول نقطه O باید مساوی 75 N.m باشد، خواهیم داشت:

$$M_O = Fd \Rightarrow 75 \text{ N.m} = F(0.433 \text{ m}) \Rightarrow F = 173.2 \text{ N}$$

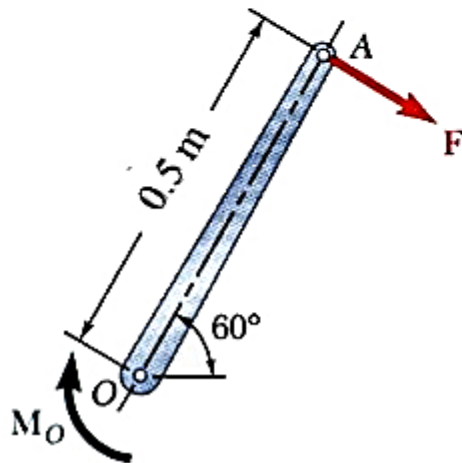
ج) کوچکترین نیرو: چون $M_O = Fd$ است، کوچکترین مقدار نیرو

وقتی رخ می دهد که d دارای حداکثر (ماکزیمم) مقدار باشد.

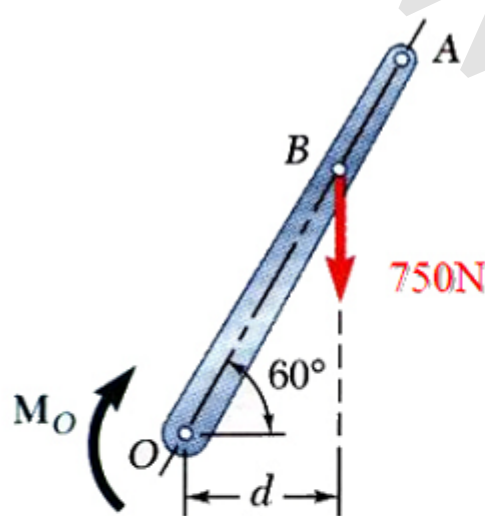
راستای نیرو را عمود بر OA انتخاب کرده و با یک محاسبه ساده

ملاحظه می کنیم که $d = 0.5 \text{ m}$ است، بنابراین:

$$M_O = Fd \Rightarrow 75 \text{ N.m} = F(0.5 \text{ m}) \Rightarrow F = 150 \text{ N}$$



مثال ۱۰



(د) نیروی عمودی 750N: در این مورد از فرمول $M_o = Fd$ خواهیم داشت:

$$75 \text{ N.m} = (750 \text{ N}) d \Rightarrow d = 0.1 \text{ m} = 100 \text{ mm}$$

$$OB \cos 60^\circ = d$$

اما داریم:

$$OB = 200 \text{ mm}$$

بنابراین:

(ه) هیچ یک از نیروهای مورد بحث در بخشهای الف ، ب و ج معادل نیروی اصلی 300N نیستند و اگرچه همه نیروها دارای گشتاور یکسانی حول نقطه O هستند، اما دارای مؤلفه های x و y متفاوتی میباشند. به عبارت دیگر، اگرچه همه این نیروها سعی دارند با یک شیوه یکسان محور را بچرخانند، اما با این حال هر یک از آنان باعث می شوند، اهرم بطور متفاوتی محور را بکشد.

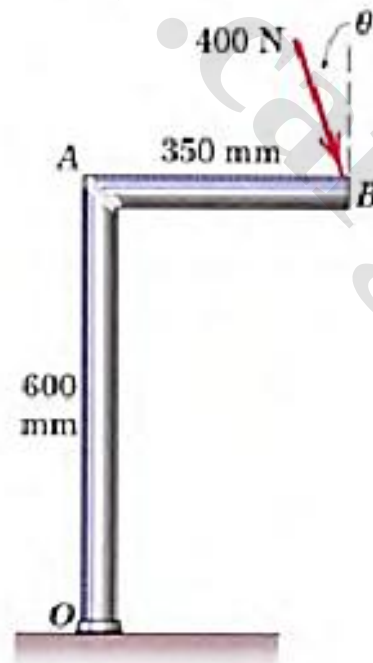
مثال ۱۱

2/65 A 400-N force is applied to the welded slender bar at an angle $\theta = 20^\circ$. Determine the equivalent force-couple system acting on the weld at (a) point A and (b) point O. For what value of θ would the results of parts (a) and (b) be identical?

Ans. (a) $F = 400 \text{ N}$, $M_A = 131.6 \text{ N}\cdot\text{m CW}$

(b) $F = 400 \text{ N}$, $M_O = 214 \text{ N}\cdot\text{m CW}$

$\theta = 0 \text{ or } 180^\circ$

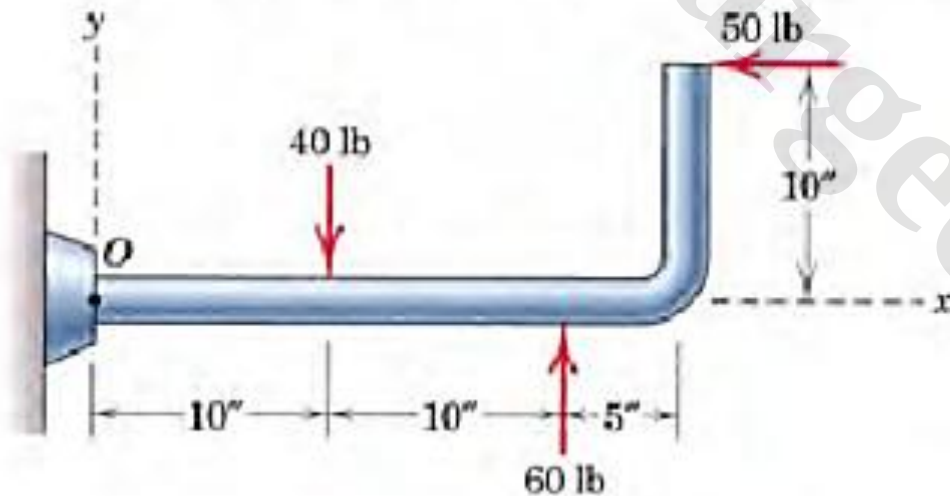


Problem 2/65

مثال ۱۲

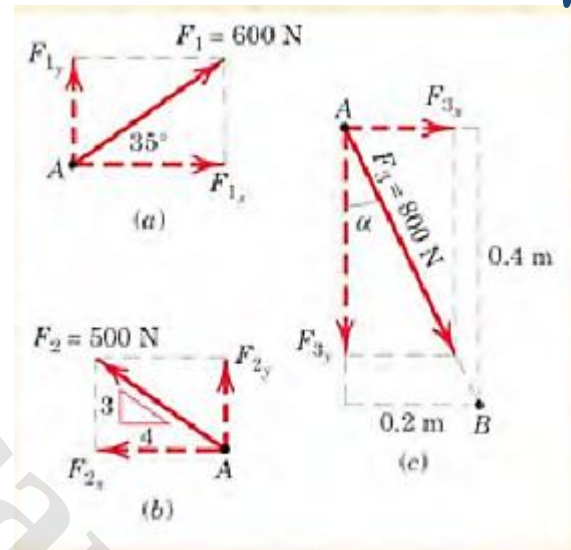
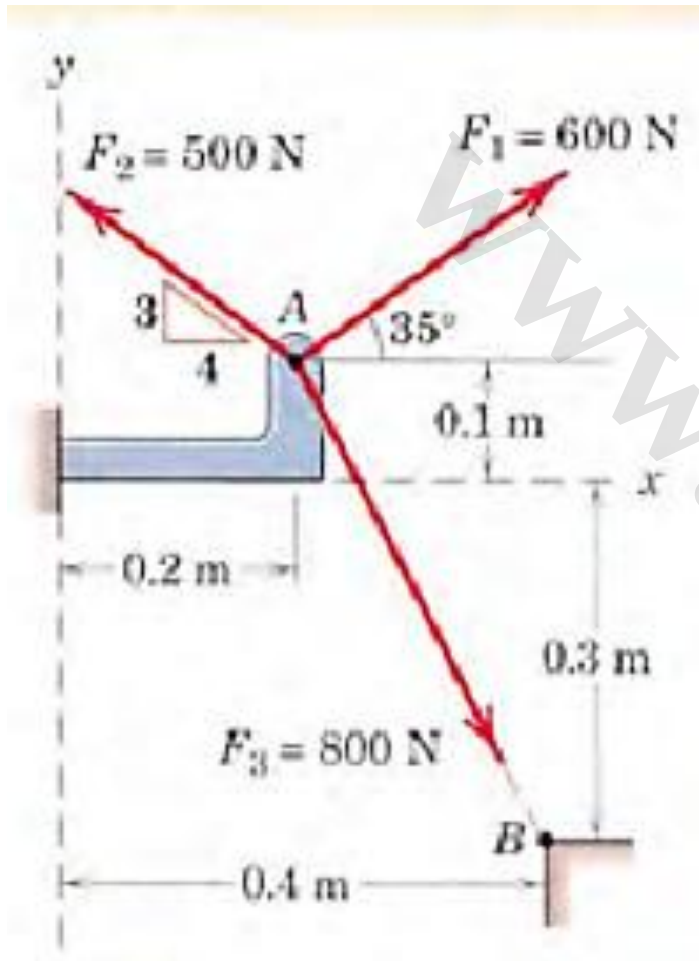
2/79 Replace the three forces acting on the bent pipe by a single equivalent force $\mathbf{R}$. Specify the distance x from point O to the point on the x -axis through which the line of action of $\mathbf{R}$ passes.

Ans. $\mathbf{R} = -50\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$ lb, $x = 65$ in. (off pipe)



Problem 2/79

مثال ۱۳



$$F_{1x} = 600 \cos 35^\circ = 491 \text{ N}$$

$$F_{1y} = 600 \sin 35^\circ = 344 \text{ N}$$

$$F_{2x} = -500\left(\frac{4}{5}\right) = -400 \text{ N}$$

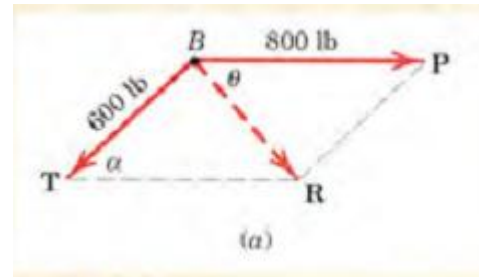
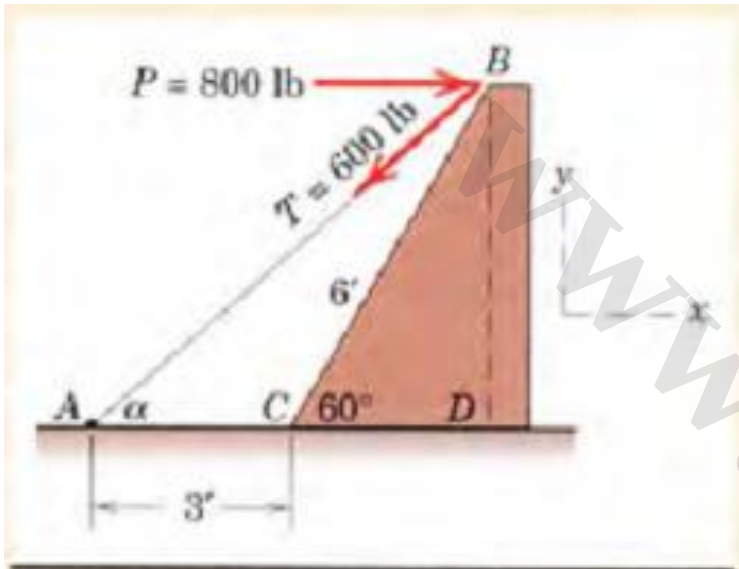
$$F_{2y} = 500\left(\frac{3}{5}\right) = 300 \text{ N}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left[\frac{0.2}{0.4} \right] = 26.6^\circ$$

$$F_{3x} = F_3 \sin \alpha = 800 \sin 26.6^\circ = 358 \text{ N}$$

$$F_{3y} = -F_3 \cos \alpha = -800 \cos 26.6^\circ = -716 \text{ N}$$

مثال ۱۴

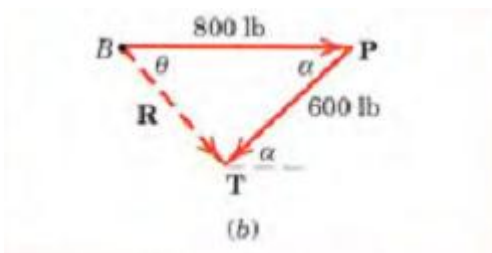


$$\tan \alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{6 \sin 60^\circ}{3 + 6 \cos 60^\circ} = 0.866 \quad \alpha = 40.9^\circ$$

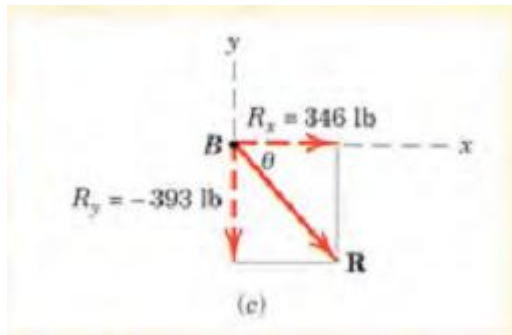
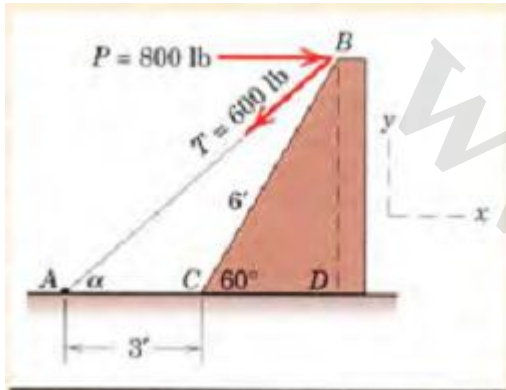
$$R^2 = (600)^2 + (800)^2 - 2(600)(800) \cos 40.9^\circ = 274,300$$

$$R = 524 \text{ lb}$$

$$\frac{600}{\sin \theta} = \frac{524}{\sin 40.9^\circ} \quad \sin \theta = 0.750 \quad \theta = 48.6^\circ$$



مثال ۱۴



$$R_x = \Sigma F_x = 800 - 600 \cos 40.9^\circ = 346 \text{ lb}$$

$$R_y = \Sigma F_y = -600 \sin 40.9^\circ = -393 \text{ lb}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(346)^2 + (-393)^2} = 524 \text{ lb}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{|R_y|}{|R_x|} = \tan^{-1} \frac{393}{346} = 48.6^\circ$$

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} = 346\mathbf{i} - 393\mathbf{j} \text{ lb}$$

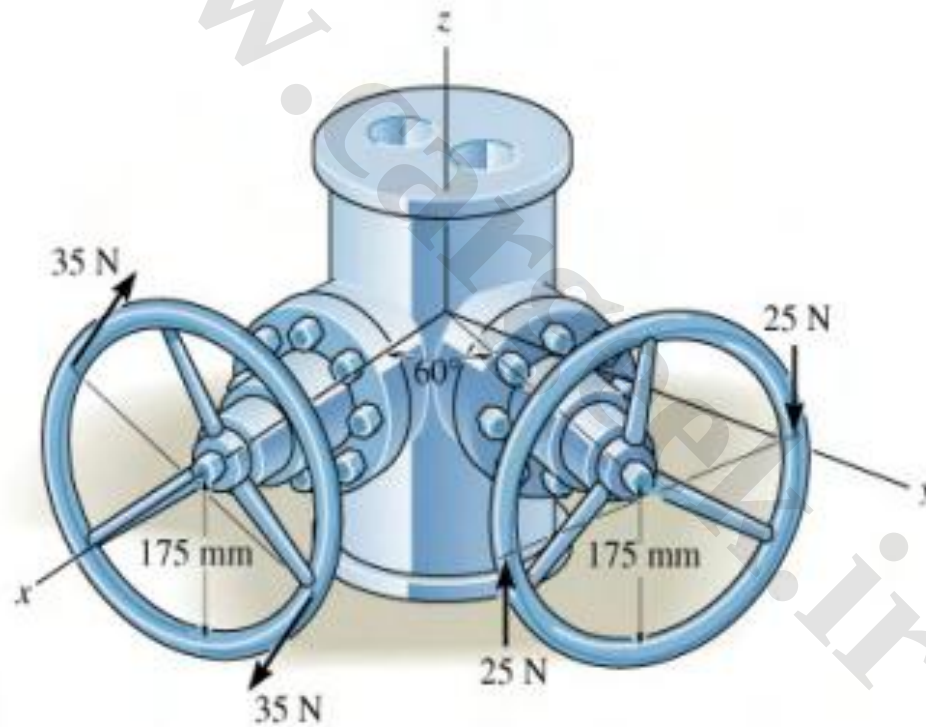
گشتاور کوپل

(گشتاور زوج نیرو، ممان زوج نیرو، کوپل گشتاور، کوپل)

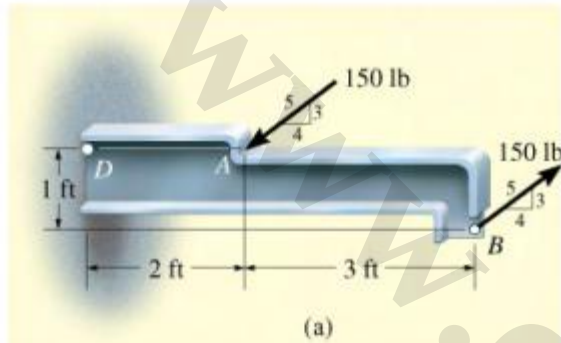
گشتاور یک زوج نیرو

تعریف زوج نیرو: دو نیروی مساوی و خلاف جهت هم که به موازات هم بر یک جسم اثر کنند.

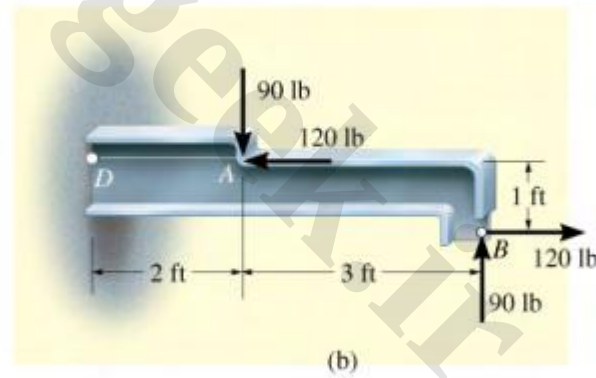
مطلوبست تعیین اندازه و زاویه با محورهای مختصات گشتاور کوپل معادل.



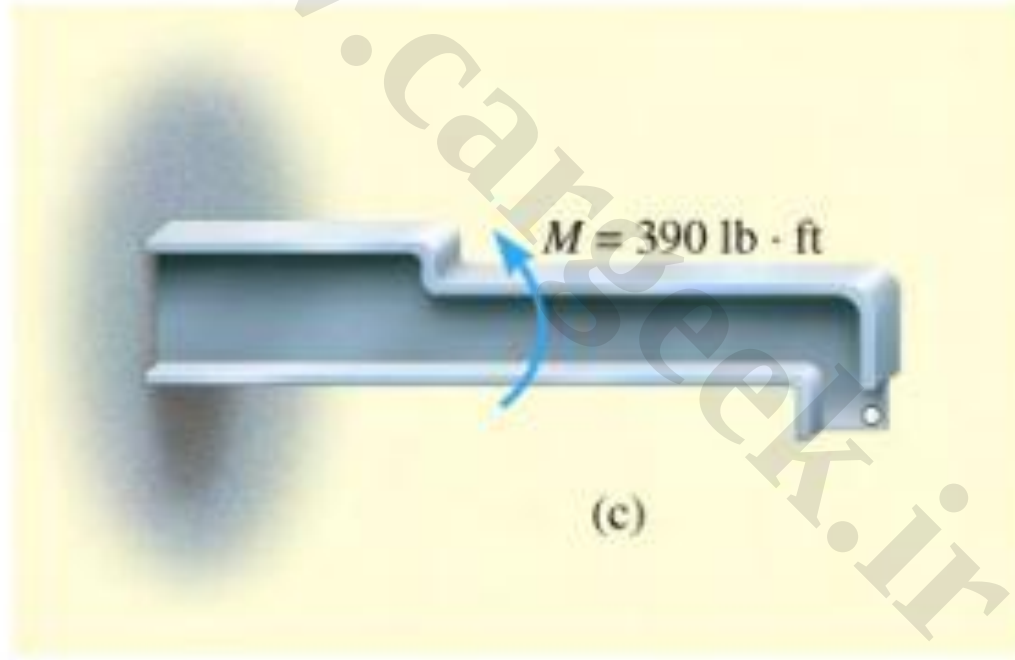
گشتاور این دو نیرو را حساب کنید.



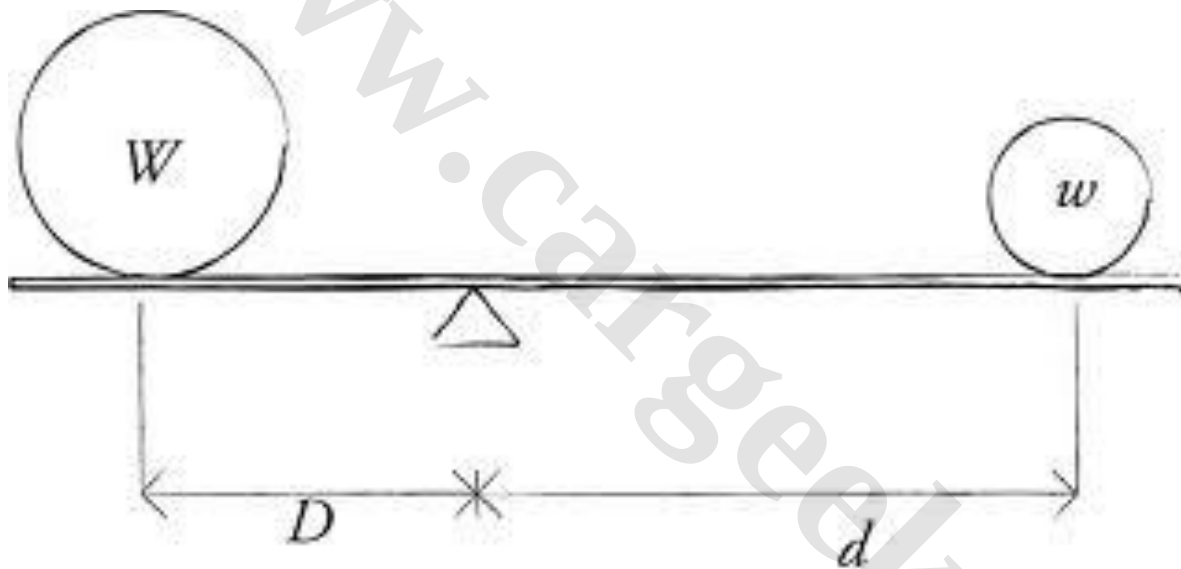
گشتاور را در نقاط A, B, D حساب کنید.



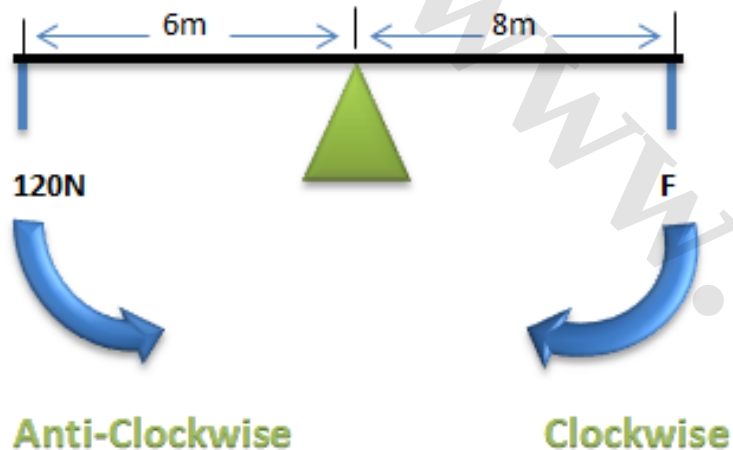
بردار گشتاور کوپل یک بردار آزاد است.



تعادل



تعادل

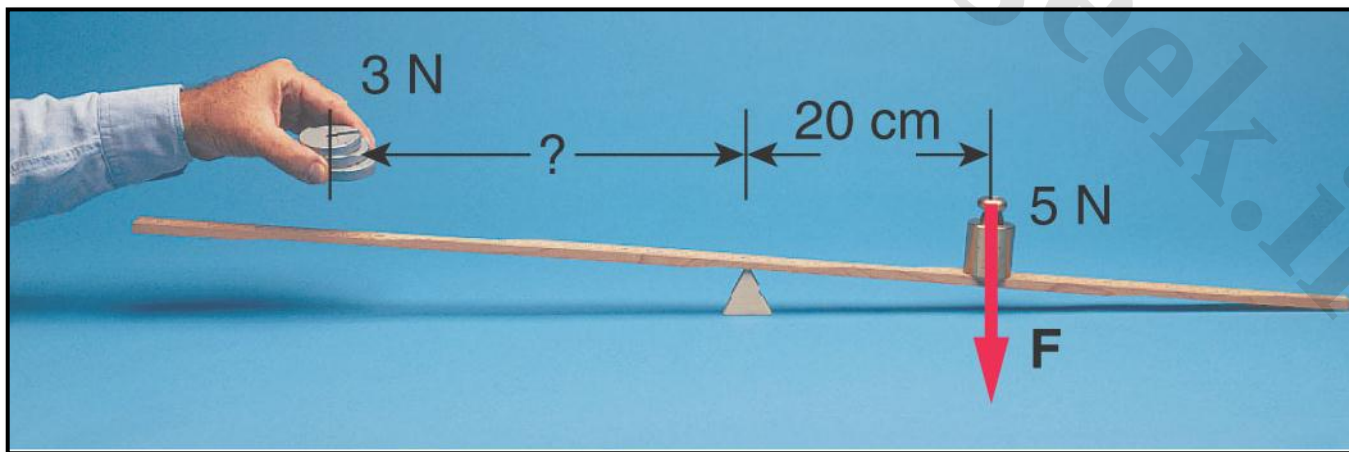


مثال ۱. در شکل روبرو مقدار نیروی F چقدر باشد تا

اهرم در حالت تعادل قرار بگیرد؟

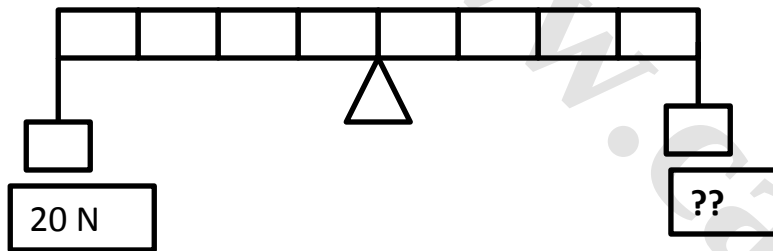
مثال ۲. در شکل زیر مقدار نیروی فاصله نیروی

3N چقدر باشد تا اهرم در حالت تعادل قرار بگیرد؟

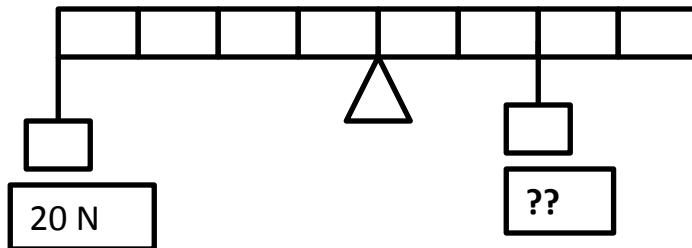


تعادل

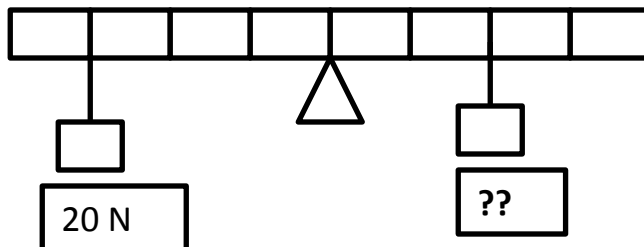
اجسام زیر در حال تعادل می باشند وزن جسم مجهول را معین نمایند.



مثال ۳.

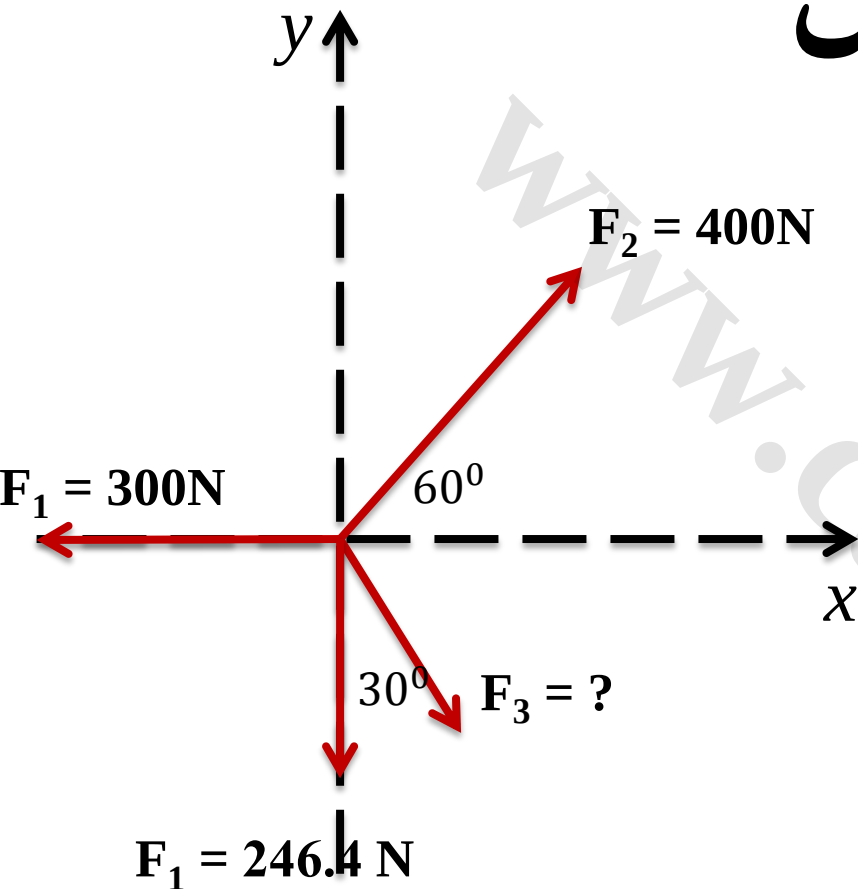


مثال ۴.



مثال ۵.

تعادل



مثال ۶. در شکل روبرو مقدار نیروی F_3 را به نحوی

محاسبه نمایند که مجموعه نیروها در حالت تعادل

باشند؟

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow -246.4 + 400 \sin 60^\circ - F_3 \cos 30^\circ = 0 \Rightarrow \boxed{F_3 = 200\text{ N}}$$

تعدادل

- هرگاه جسمی در حال تعدادل باشد، برآیند همه نیروهای وارد بر آن صفر است. لذا برای این جسم، نیروی برآیند و کوپل برآیند هر دو صفرند، و معادلات تعدادل به صورت زیر بیان می شوند:

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{M}_O = \sum (\vec{r} \times \vec{F}) = 0$$

- با تجزیه هر نیرو و هر گشتاور به مولفه های قائمش، میتوان شرطهای لازم و کافی برای تعدادل هر جسم صلب را با شش معادله اسکالر زیر بیان نمود:

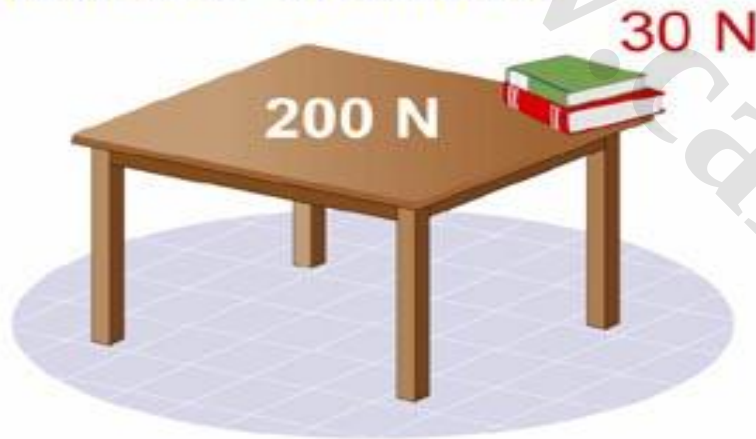
$$\begin{array}{lll} \sum F_x = 0 & \sum F_y = 0 & \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 & \sum M_y = 0 & \sum M_z = 0 \end{array}$$

- برای برقراری کامل تعدادل در دو بعد باید سه معادله از شش معادله بالا به طور همزمان برقرار باشد. اما این معادلات شرایط مستقلى هستند که هر یک از آنها می تواند بدون بقیه برقرار باشد.

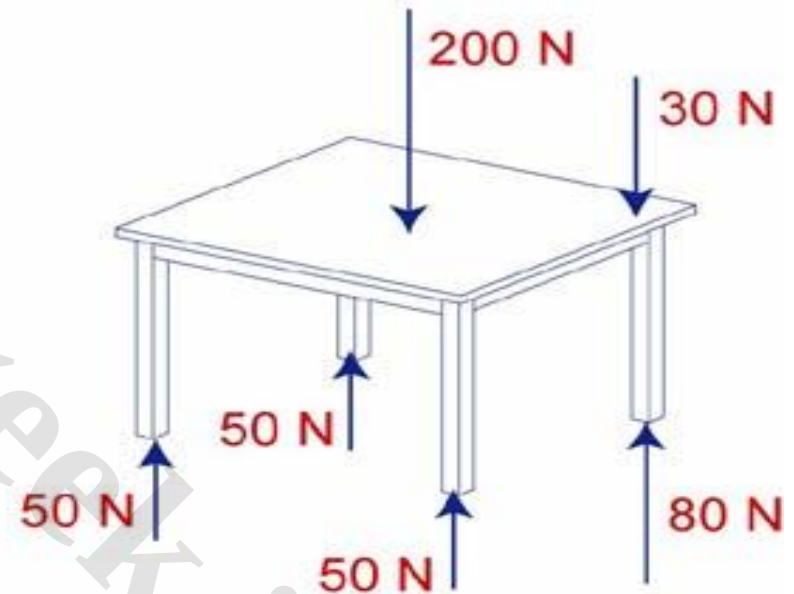
تعادل

Free Body Diagram

Real-life situation



Free-body diagram



Equilibrium condition

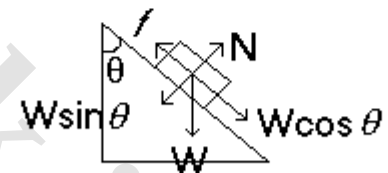
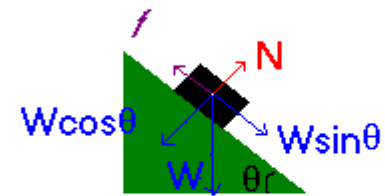
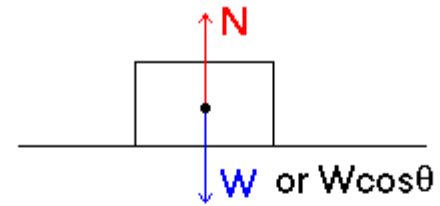
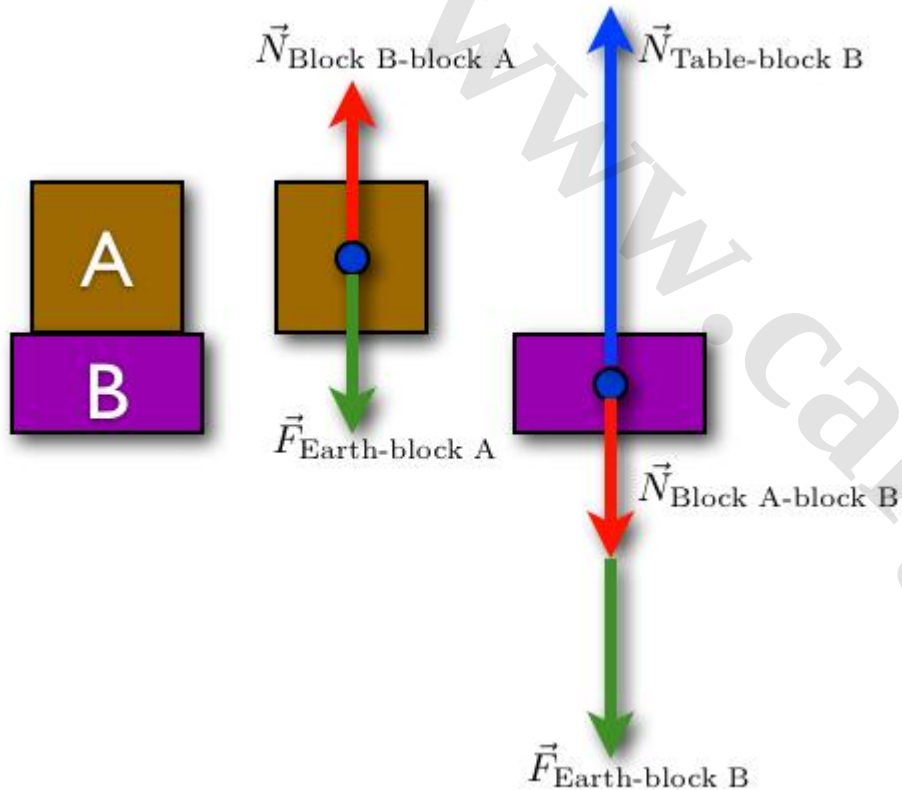
	+50 N
	+ 50 N
-200 N	+ 50 N
-30 N	+ 80 N
-230 N	+ 230 N

تعادل

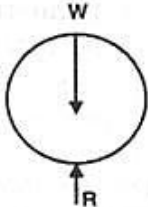
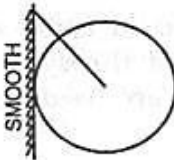
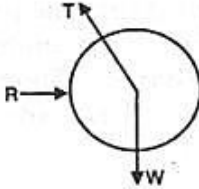
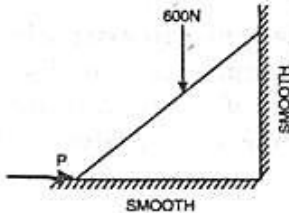
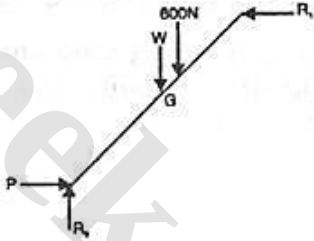
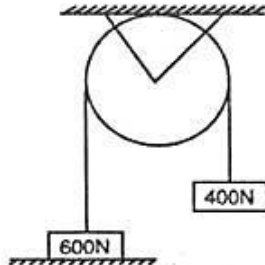
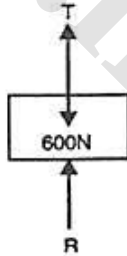
لمودار جسم آزاد

- (1) جسم آزاد منتخب را به طور مشخص تعیین می کنیم و سپس این جسم را از بین و تمام اجسام دیگر جدا می کنیم و بعد طرح کلی جدا شده را ترسیم می کنیم.
- (2) همه نیروهای خارجی را روی نمودار جسم آزاد نشان می دهیم به صورتی که بزرگی و راستای نیروهای خارجی مشخص باشد.
- (3) نیروهای خارجی مجهول که معمولاً عکس العملهایی هستند که اجسام دیگر با مخالفت با حرکت جسم آزاد از خود نشان می دهند.

تعادل



تعادل

Reacting bodies	FBD required for	FBD
	Ball	
	Ball	
	Ladder	
	Block weighing 600 N	

تعادل

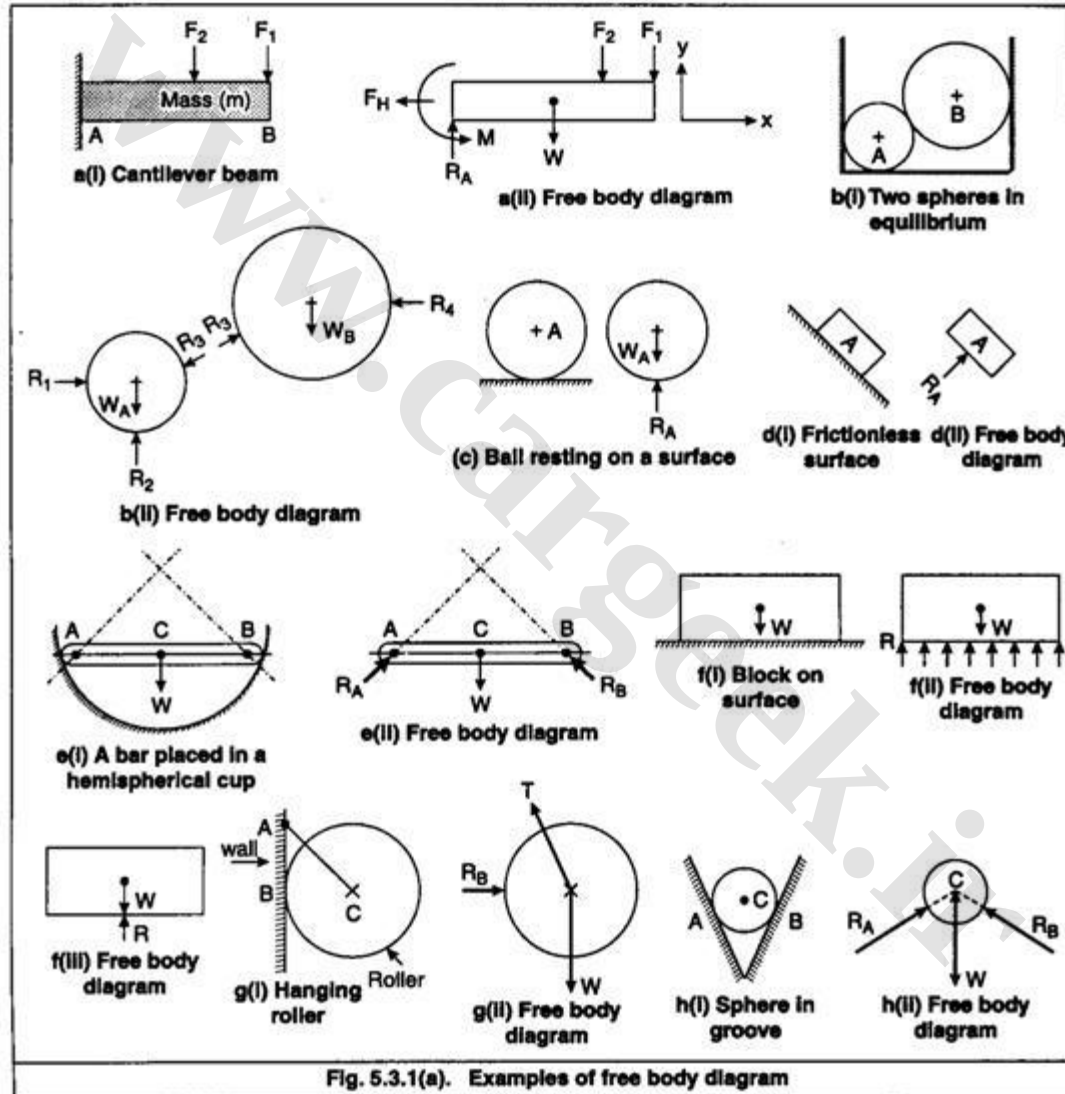
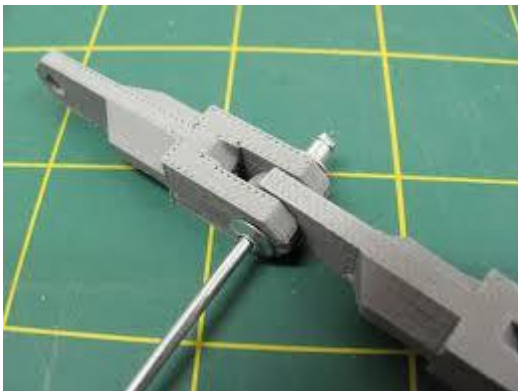
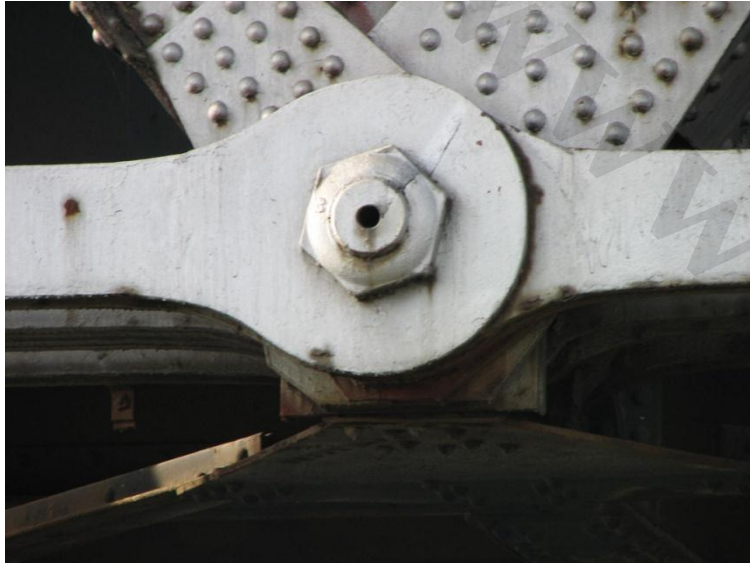


Fig. 5.3.1(a). Examples of free body diagram

تعادل

تکیه گاه پین شکل



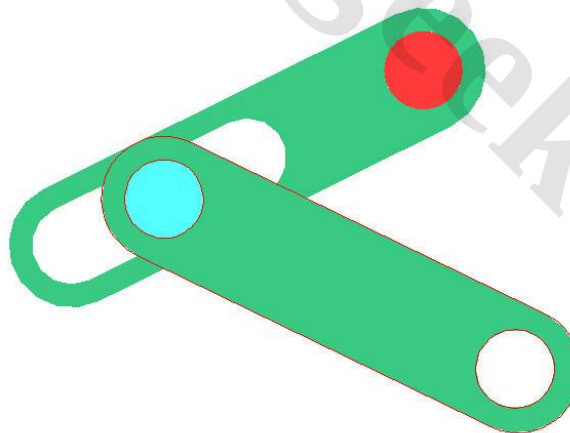
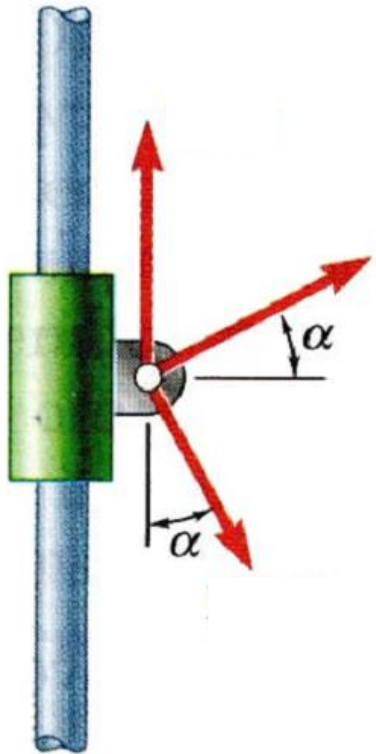
تعادل

تکیه گاه غلطکی



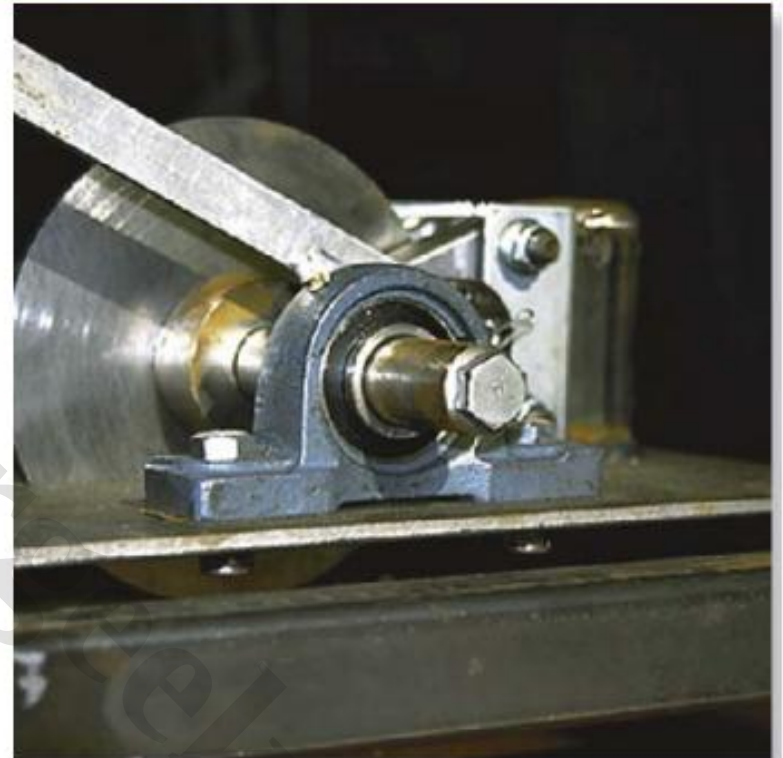
تعادل

تکیه گاه کشویی





This ball-and-socket joint provides a connection for the housing of an earth grader to its frame

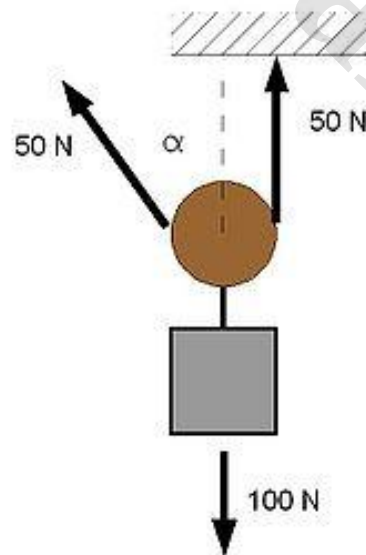
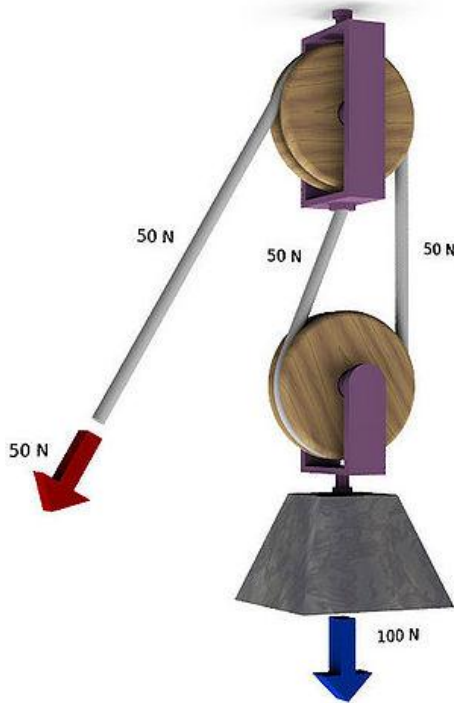


This journal bearing supports the end of a shaft

تعادل

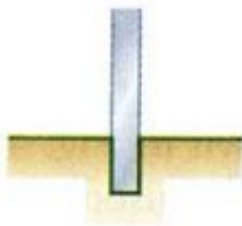
طناب و سیم

کشش در طول طناب همواره ثابت است.

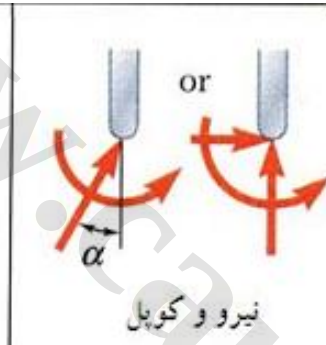


تعادل

تکیه گاه یک سر گیردار

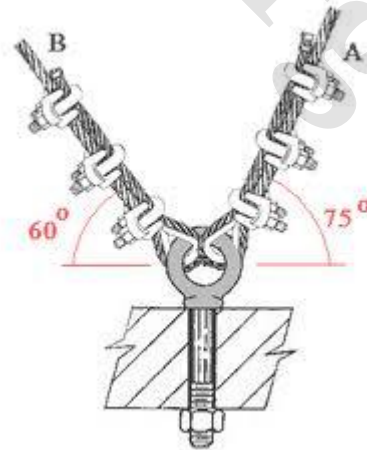
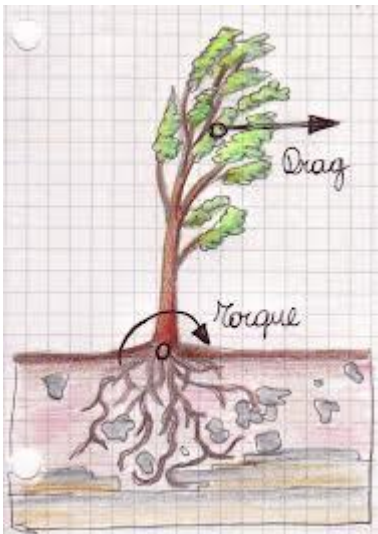


تکیه گاه ثابت

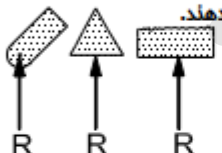
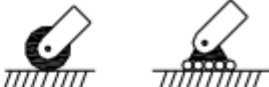
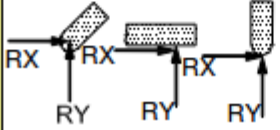
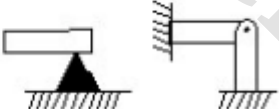


نیرو و گویل

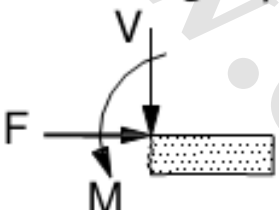
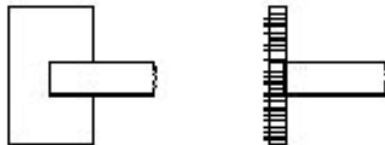
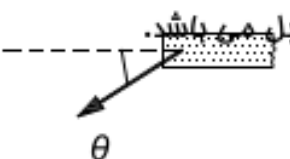
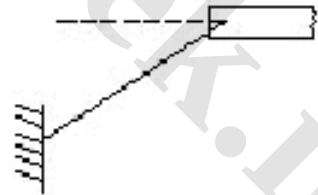
- اشکال روبرو عکس عملهای معادل با یک نیرو و یک گویل را نشان میدهند.



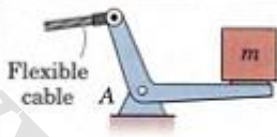
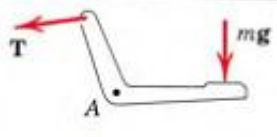
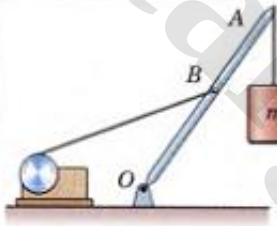
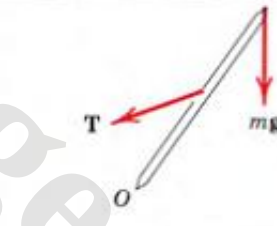
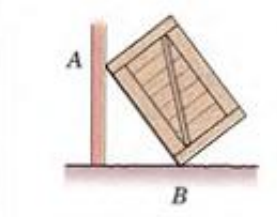
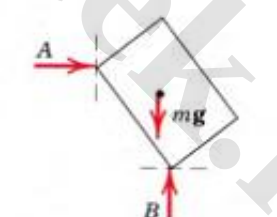
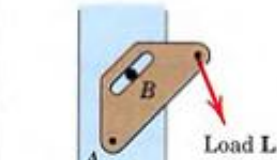
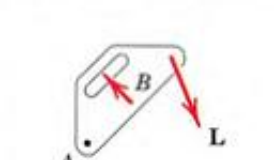
تعادل

تعداد مجهولات	انرژی جزء مفصل شده	نوع تکیه گاه
1	تکیه گاههای غلطی، چرخ، ساپمه ای وسایرانواع که در شکل نشان داده شده است نیروی فشاری و عمود بر سطح تماس را انتقال می دهند. 	1. تکیه گاه غلظی  
2	یک اتصال مفصلی که آزادی گردش داشته باشد می تواند نیرو ی در هر امتداد و جهت در صفحه عمود بر محور بار را انتقال دهد. لولائی که آزادی گردش نداشته باشد می تواند تحت تأثیر یک گویل نیز باشد 	2. اتصال مفصلی با فار مغزی  

تعادل

3	یک اتصال گیرداری تواند نیروئی مموری F و نیروئی (برشی) V و گوی M که در مقابل چرخش مقاومت می کند را تحمل کند. 	3. اتصال گیردار 
1	نیروئی که توسط یک کابل انعطاف پذیر اعمال می شود، همیشه به صورت یک نیروی کششی در جهت گریز از جسم و در امتداد مماس بر کابل می باشد. 	4. کابل، تسمه، زنجیر 

تعادل

	Body	Incomplete FBD
1. Bell crank supporting mass m with pin support at A.		
2. Control lever applying torque to shaft at O.		
3. Boom OA, of negligible mass compared with mass m . Boom hinged at O and supported by hoisting cable at B.		
4. Uniform crate of mass m leaning against smooth vertical wall and supported on a rough horizontal surface.		
5. Loaded bracket supported by pin connection at A and fixed pin in smooth slot at B.		

تعادل

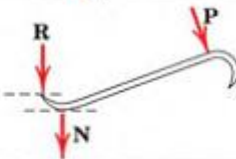
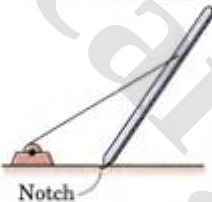
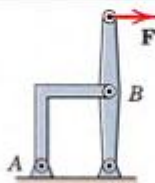
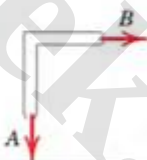
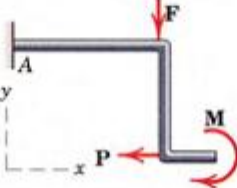
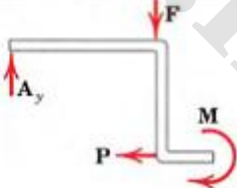
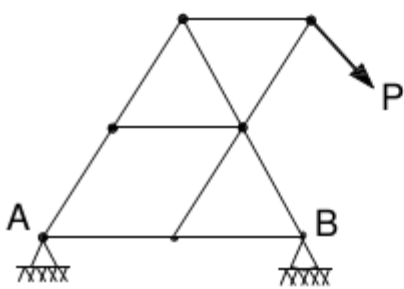
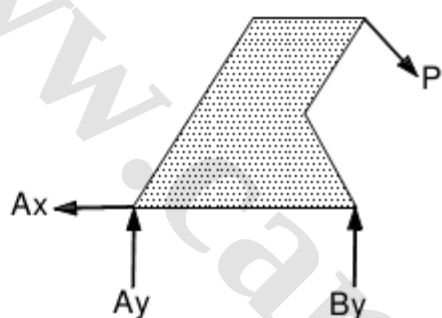
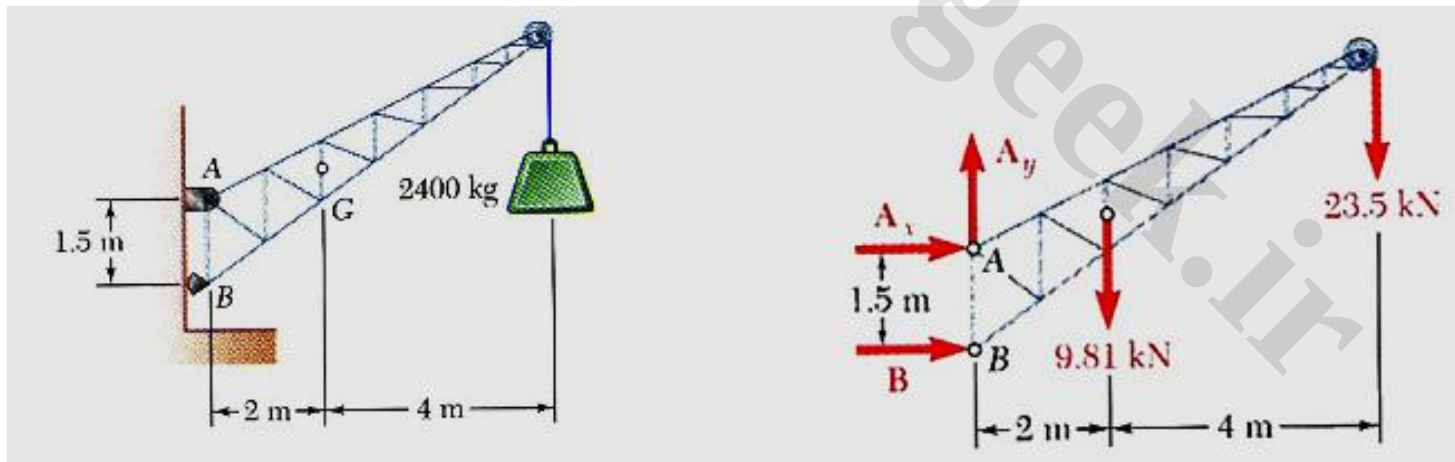
	Body	Wrong or Incomplete FBD
1. Lawn roller of mass m being pushed up incline θ .		
2. Prybar lifting body A having smooth horizontal surface. Bar rests on horizontal rough surface.		
3. Uniform pole of mass m being hoisted into position by winch. Horizontal supporting surface notched to prevent slipping of pole.		
4. Supporting angle bracket for frame; Pin joints.		
5. Bent rod welded to support at A and subjected to two forces and couple.		

Figure 3/B

تعادل

نمونه‌هایی از دیاگرام آزاد اجسام

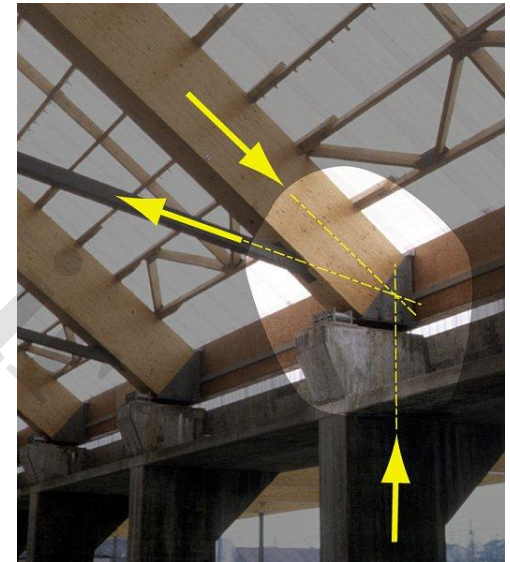
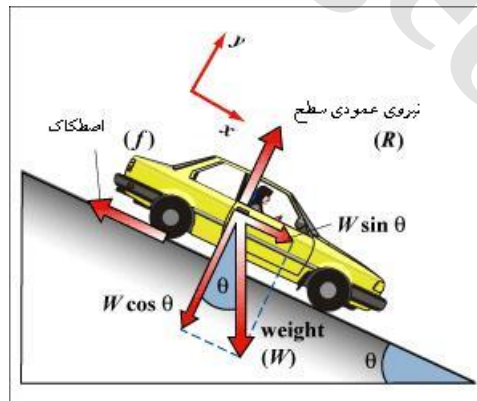
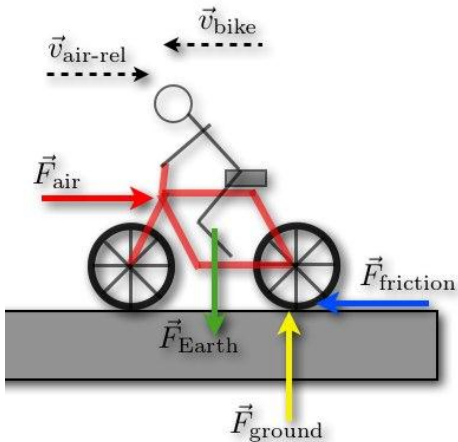
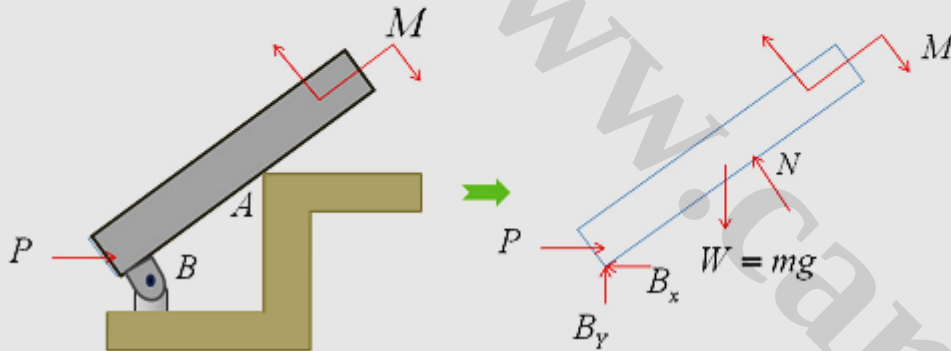
مجموعه سازه	نمودار جسم آزاد
1. فرپای مسطح 	



تعادل

نمونه‌هایی از دیاگرام آزاد اجسام

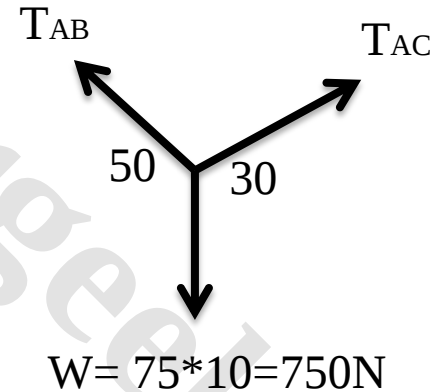
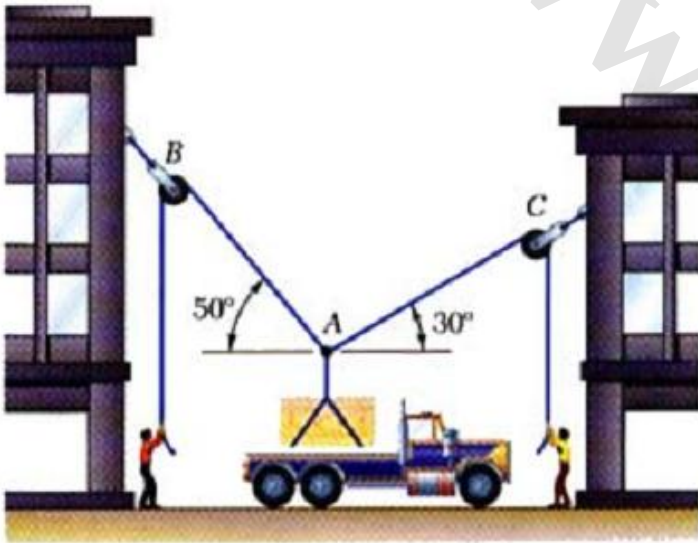
• وزن تیر معلوم فرض شده که به مرکز جرم اعمال میشود. نیرویی که گوشه A بر تیر وارد میکند عمود بر سطح صاف تیر است (گوشه A نسبتاً گرد و صاف است در غیر این صورت یک مولفه مماسی اصطکاکی نیز می‌بایست بوجود می‌آمد).



تعادل

مثال ۱.

❖ مطابق شکل اگر وزن صندوق 75kg باشد کشش در دو کابل AB و AC چقدر است؟



$$\sum F_X = 0 \quad T_{AC} \cos 30 - T_{AB} \cos 50 = 0$$

$$\sum F_Y = 0 \quad T_{AC} \sin 30 + T_{AB} \sin 50 - W = 0$$

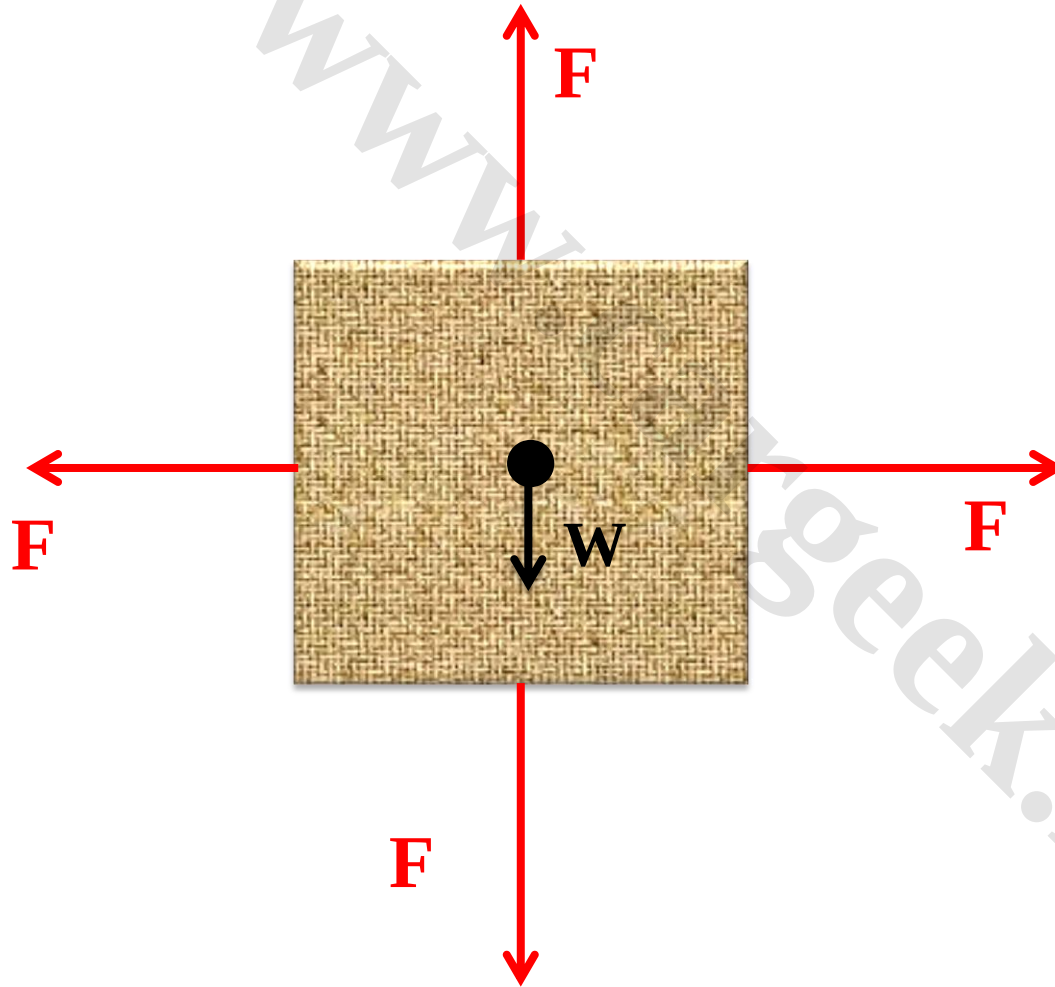
✓ جواب:

$$T_{AB} = 647 \text{ N}$$

$$T_{AC} = 480 \text{ N}$$

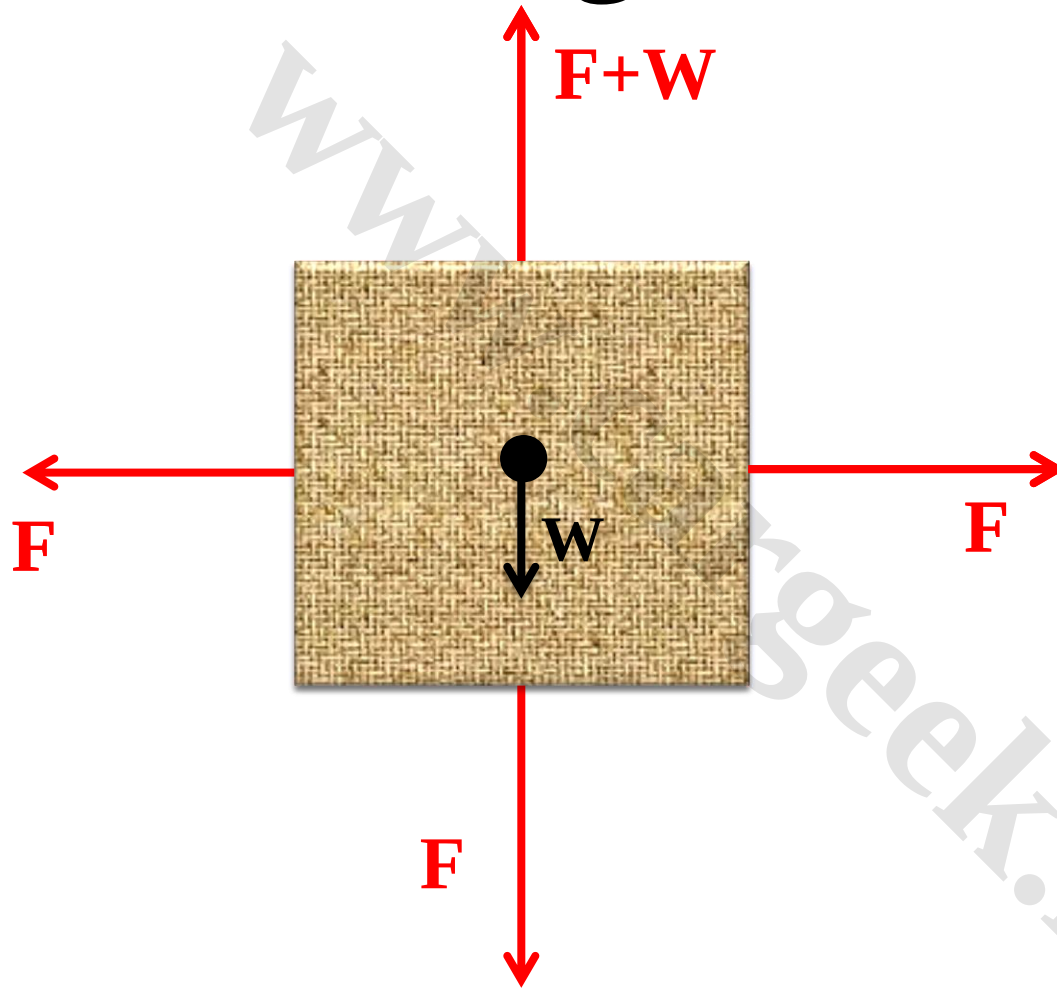
تعادل

مثال ۲



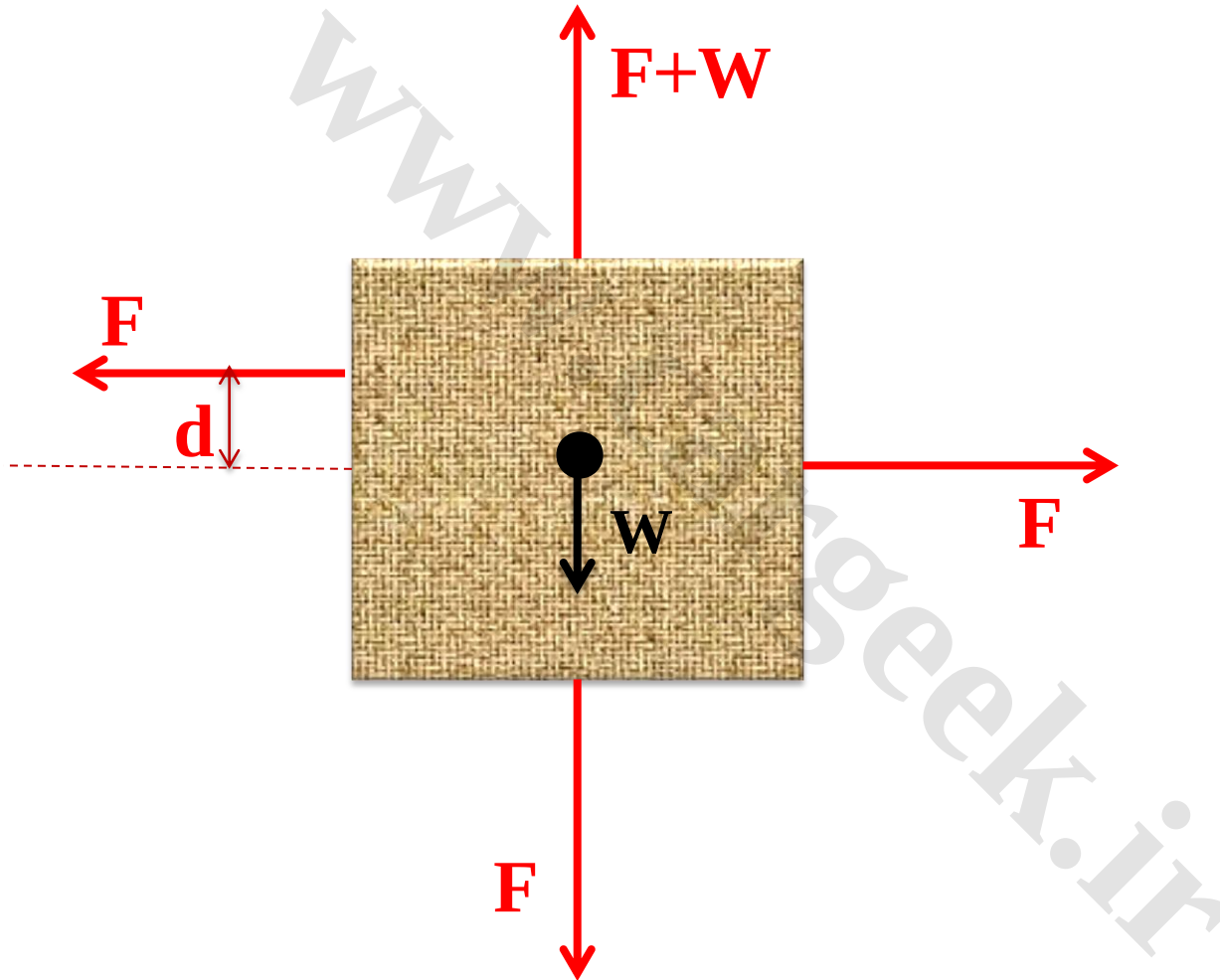
تعادل

مثال ۳.



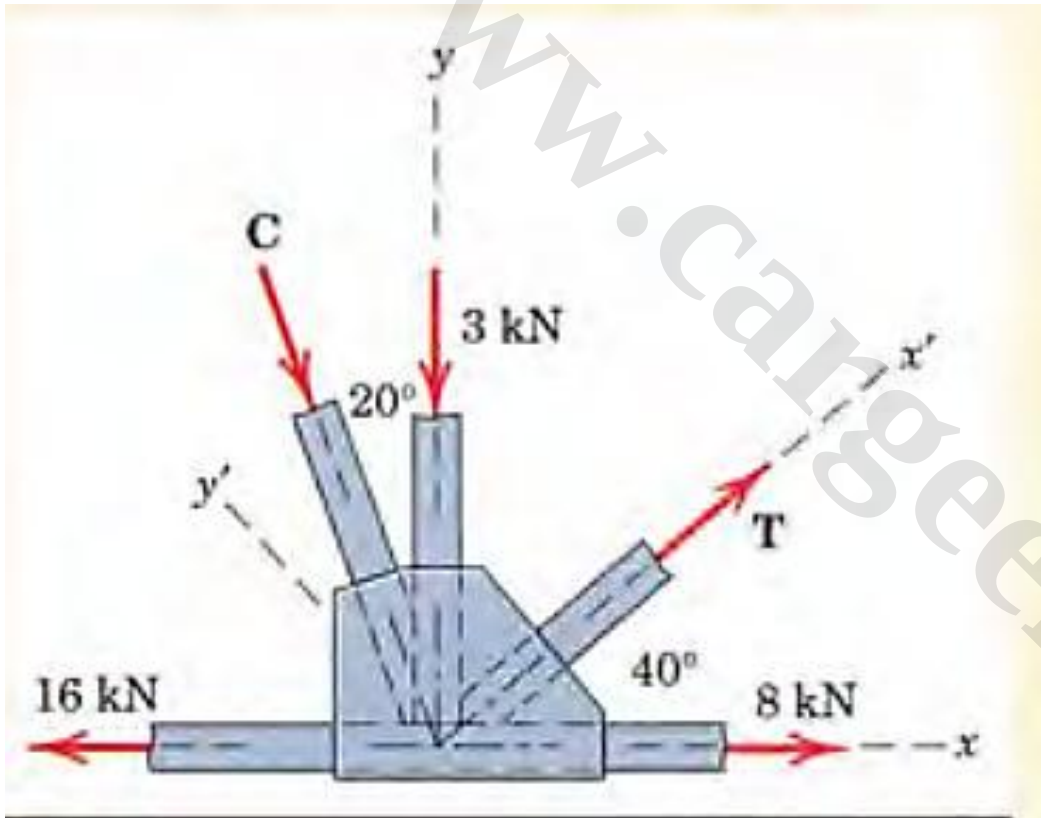
تعادل

مثال ۴



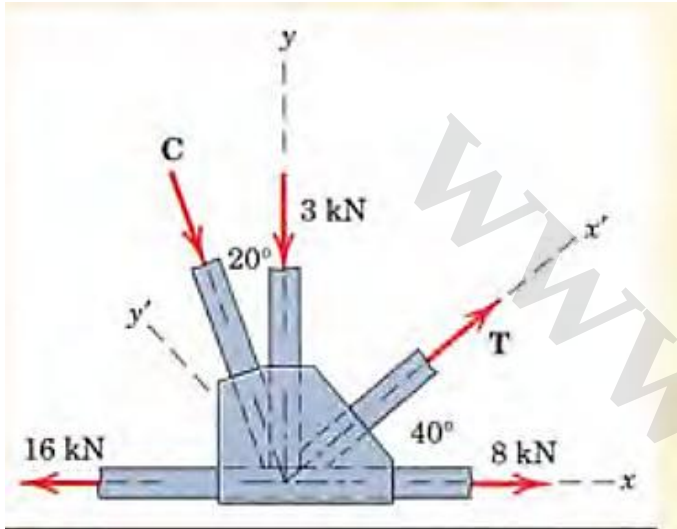
تعادل

مثال ۵



تعادل

مثال ۵



$$[\Sigma F_x = 0]$$

$$8 + T \cos 40^\circ + C \sin 20^\circ - 16 = 0$$

$$0.766T + 0.342C = 8$$

$$[\Sigma F_y = 0]$$

$$T \sin 40^\circ - C \cos 20^\circ - 3 = 0$$

$$0.643T - 0.940C = 3$$

Simultaneous solution of Eqs. (a) and (b) produces

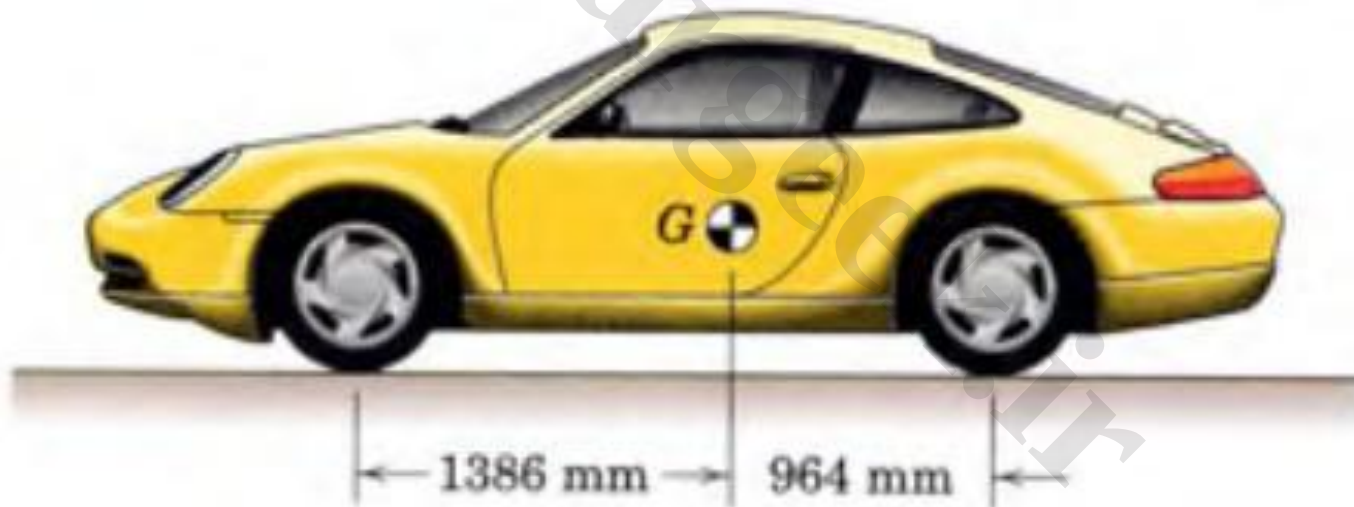
$$T = 9.09 \text{ kN} \quad C = 3.03 \text{ kN}$$

تعادل

مثال ۷

3/1 The mass center G of the 1400-kg rear-engine car is located as shown in the figure. Determine the normal force under each tire when the car is in equilibrium. State any assumptions.

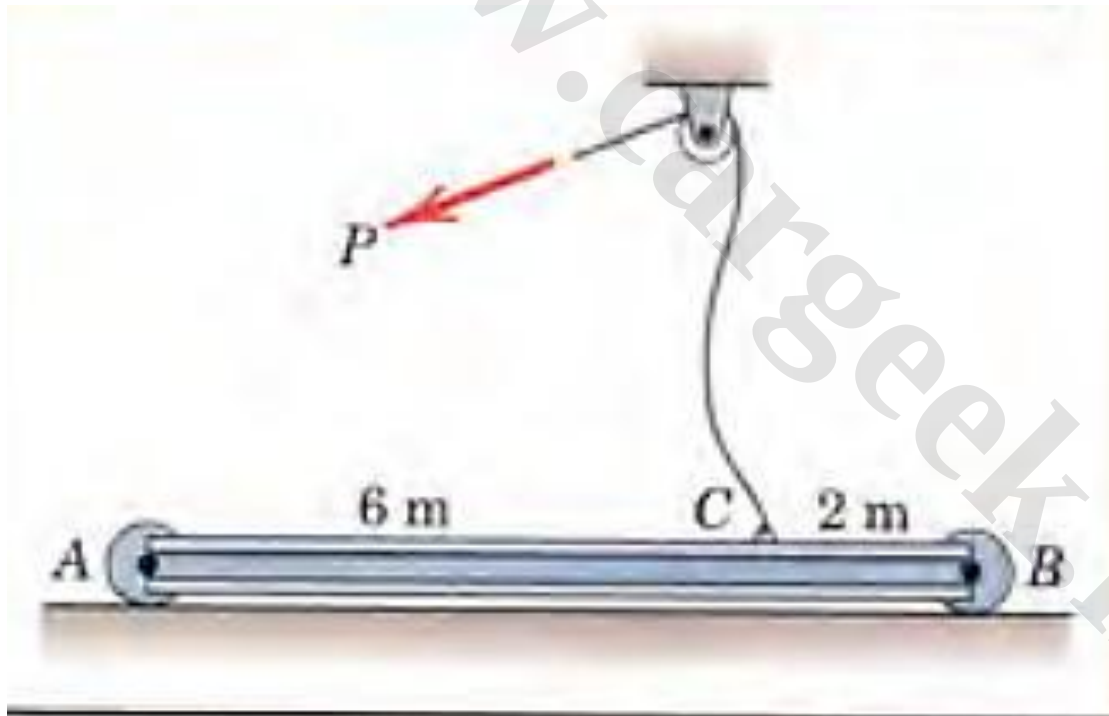
Ans. $N_f = 2820 \text{ N}$, $N_r = 4050 \text{ N}$



Problem 3/1

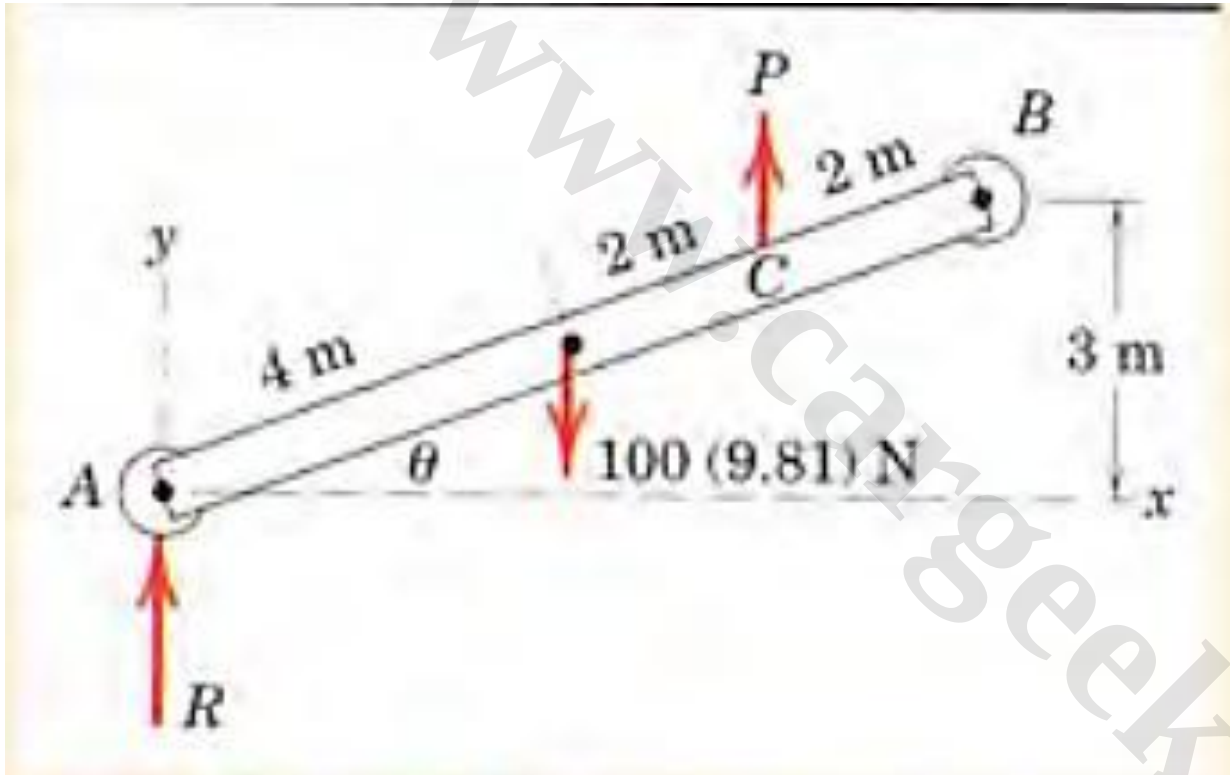
تعادل

مثال ۶. در شکل زیر برای آنکه لبه B تیر در ارتفاع ۳ متری از سطح زمین قرار گیرد چه مقدار نیروی کشیدن طناب لازم است؟ (جرم تیر ۱۰۰ کیلوگرم می باشد)



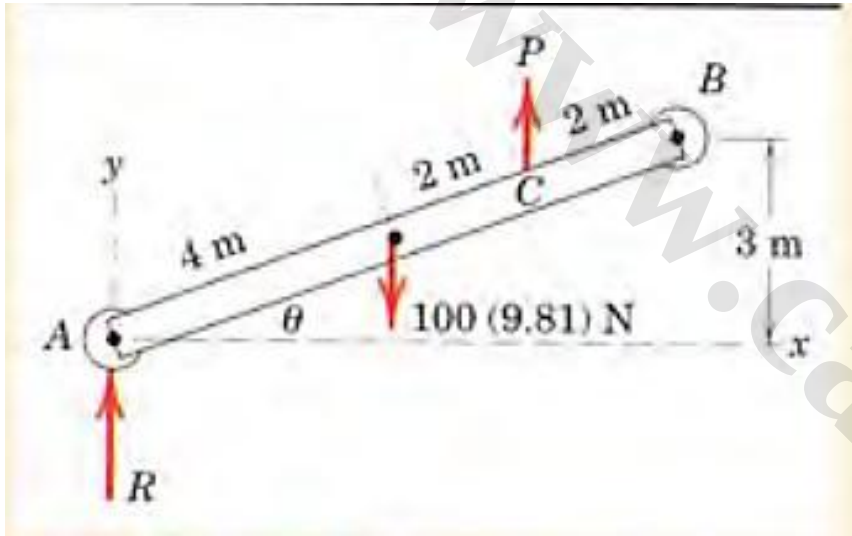
تعادل

مثال ۶



تعدادل

مثال ۶



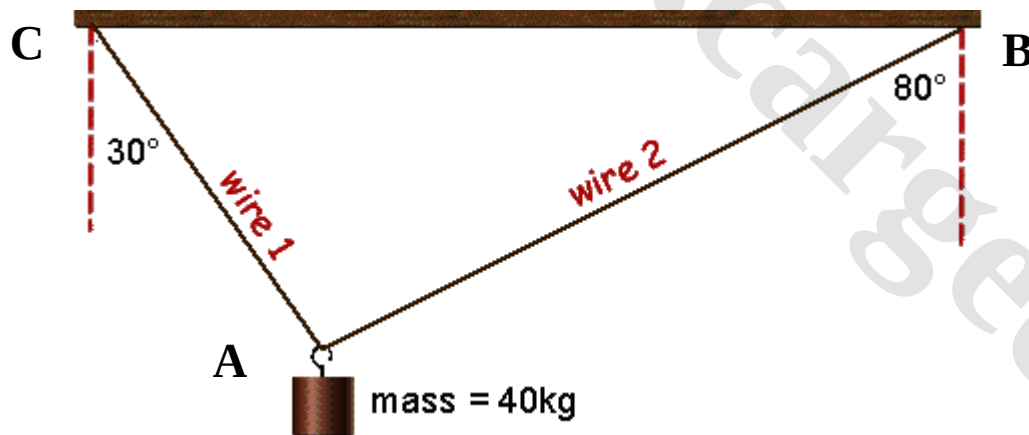
$$[\Sigma F_y = 0] \quad 654 + R - 981 = 0 \quad R = 327 \text{ N}$$

The angle θ depends only on the specified geometry and is

$$\sin \theta = 3/8 \quad \theta = 22.0^\circ$$

تعدادل

مثال ۸. در شکل روبرو مقدار نیروی وارد بر هر سیم را به نحوی محاسبه نمایند که مجموعه سیم ها و جرم در حالت تعادل قرار بگیرد؟



$$W = 40 * 10 = 400N$$

$$\sum F_X = 0 \quad -T_{AC} \sin 60 + T_{AB} \sin 80 = 0$$

$$T_{AC} = 612.81N$$

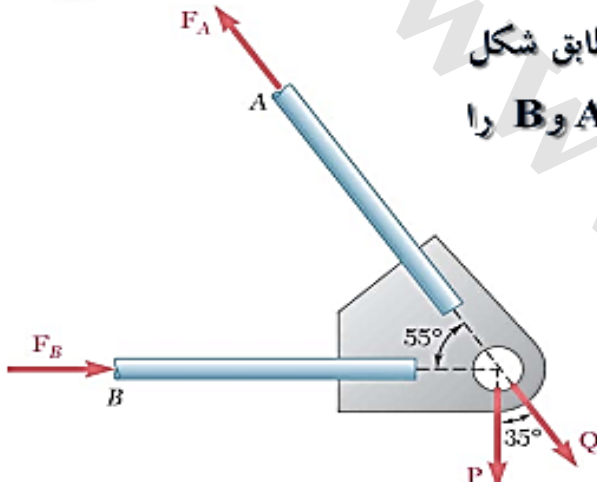
$$\sum F_Y = 0 \quad T_{AC} \cos 60 + T_{AB} \cos 80 - W = 0$$

$$T_{AB} = 538.97N$$

تعدادل

مثال ۹.

❖ دو نیروی $P=1.8\text{kN}$ و $Q=2.3\text{kN}$ به صفحه اتصال دو میله مطابق شکل وارد میشود. در شرایط تعادل مقدار نیروهای اعمالی به میله های A و B را مشخص کنید.



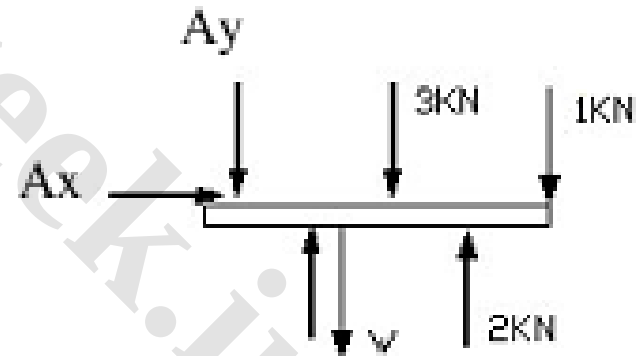
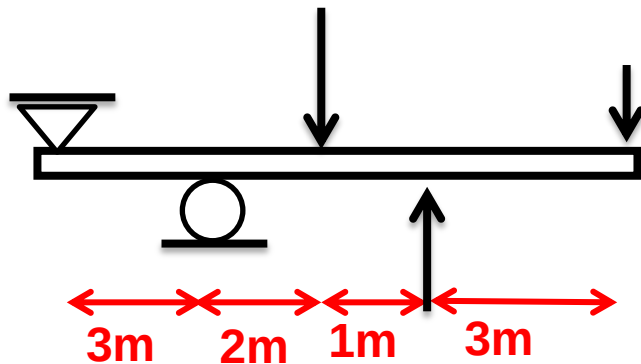
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \Rightarrow F_A(\sin 55^\circ) - P - Q(\cos 35^\circ) = 0 \Rightarrow F_A = 4.48\text{kN} \uparrow$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow F_B + Q(\sin 35^\circ) - F_A(\cos 55^\circ) = 0 \Rightarrow F_B = -1.24\text{kN} \Rightarrow F_B = 1.24\text{kN} \leftarrow$$

تعادل

مثال ۱۰.

تیر یکنواخت ۹ متری دارای جرمی برابر 200 kg کیلو گرم می باشد در صفحه قائم توسط نیروهای موازی به صورت نشان داده شده در شکل بار گذاری شده است. عکس العمل های تکیه گاه های مفصلی متمرکز در A, B را محاسبه کنید.



تعدادل

جواب مثال ۱۰

$$W = m \cdot g = 200 \times 10 = 2000 \text{ N} = 2 \text{ KN}$$

$$\curvearrowleft + \sum M_A = 0 \Rightarrow$$

$$- B_y \times 3 + 2 \times 3.5 - 2 \times 6 + 1 \times 8 - 3 \times 5 = 0$$

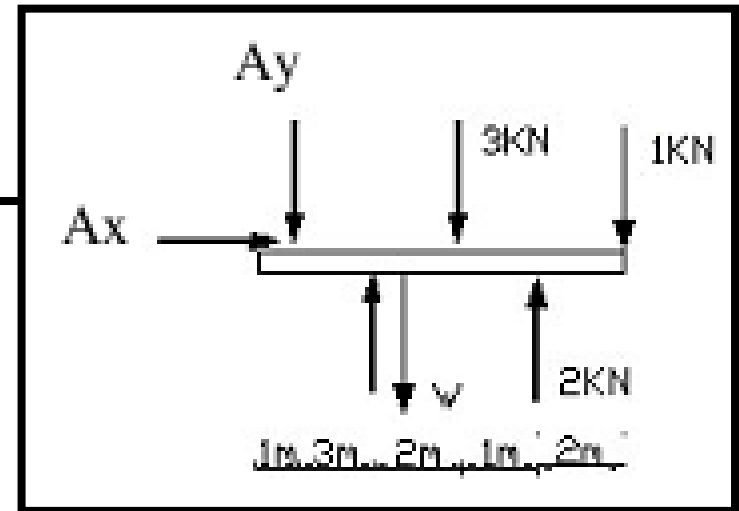
$$B_y = 6 \text{ KN}$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0$$

$$- A_y + 6 - 2 - 3 + 2 - 1 = 0 \rightarrow$$

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0$$

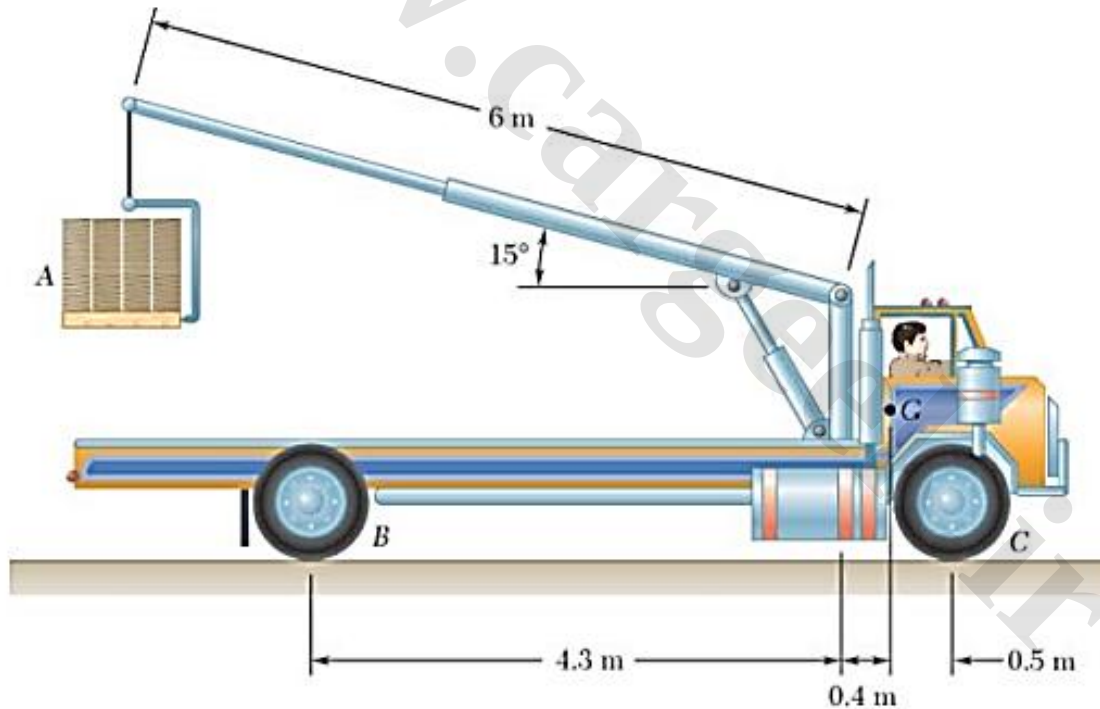
$$\text{cont} = + \uparrow \sum M_B = 0 \Rightarrow -2 \times 3 + 2 \times 0.5 + 3 \times 2 - 2 \times 3 + 1 \times 5 = 0$$



تعادل

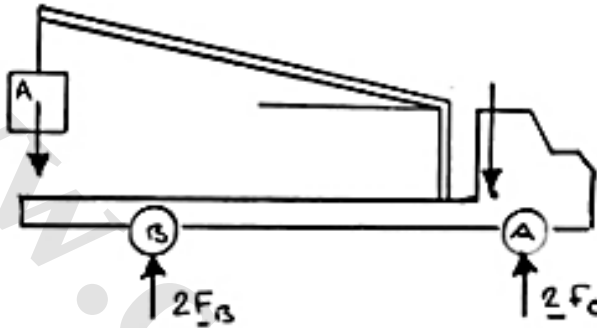
مثال ۱۱

❖ جک متصل به کامیونی به وزن 4300 kg جعبه ای به وزن 1600 kg را حمل میکند. عکس عملهای هر یک چرخهای عقب و جلو را مشخص کنید.



تعدادل

❖ راه حل:



$$+\curvearrowright \sum M_C = 0: \quad (16000N)[(0.5 + 0.4 + 6\cos 15^\circ)m] - 2F_B[(0.5 + 0.4 + 4.3)m] + (43000N)(0.5m) = 0$$

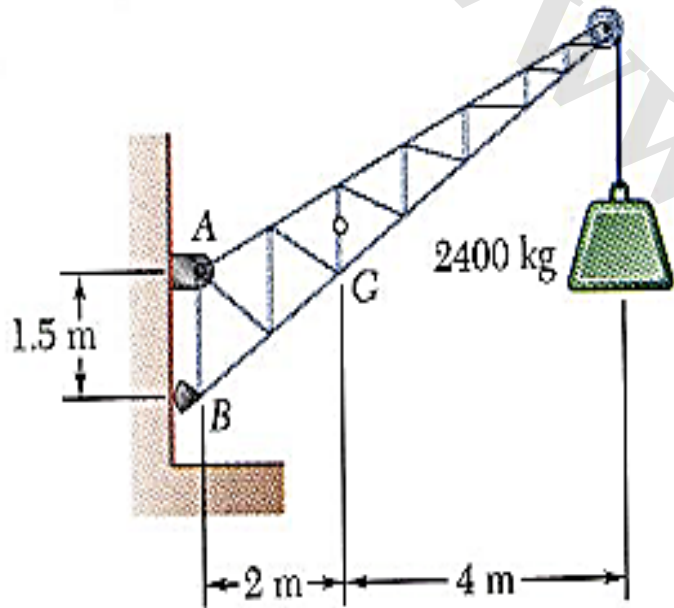
$$\Rightarrow F_B = 12.3 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\curvearrowright \sum M_B = 0: \quad (16000N)[(6\cos 15^\circ - 4.3)m] - (43000N)[(4.3 + 0.4)m] + 2F_C[(4.3 + 0.4 + 0.5)m] = 0$$

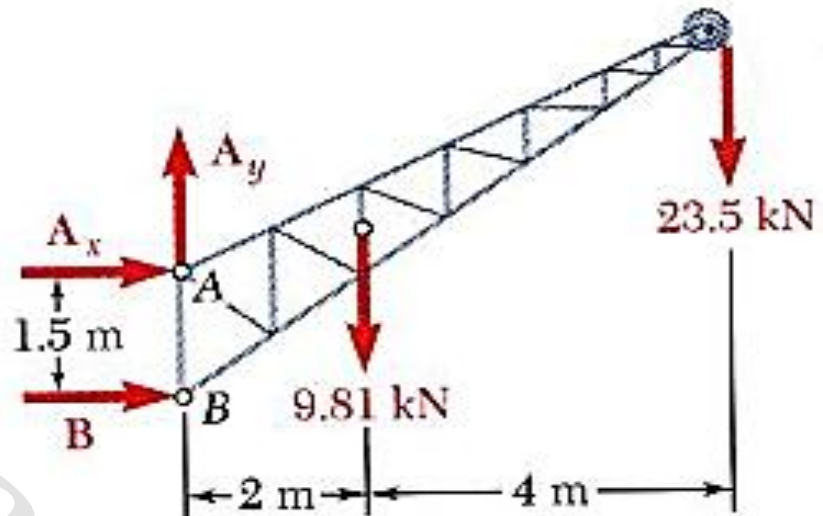
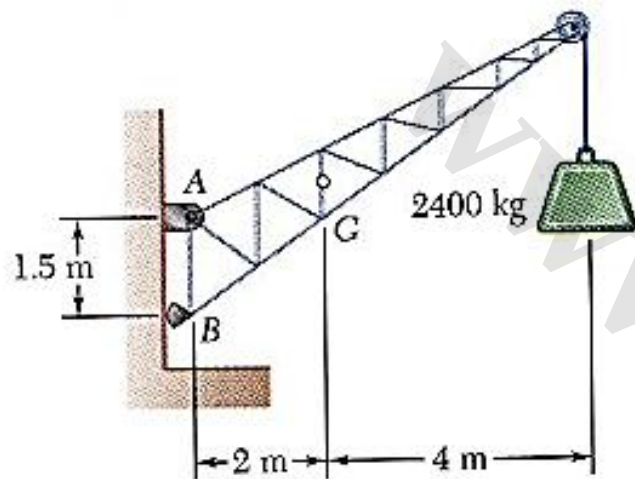
$$\Rightarrow F_C = 17.1 \text{ kN} \uparrow$$

تعادل

مثال ۱۲.



❖ از بالابر ثابتی به جرم 1000 kg برای بالا بردن صندوقی به وزن 2400 kg استفاده میشود. بالابر با یک پین در A و مقطع مخروطی در B نگهداری میشود. مرکز ثقل بالابر G است. مولفه های عکس عملهای نقاط A و B را معین کنید.



$$\sum M_A = 0: +B(1.5\text{m}) - 9.81\text{ kN}(2\text{m}) - 23.5\text{ kN}(6\text{m}) = 0$$

$$B = +107.1\text{ kN}$$

$$\sum F_x = 0: A_x + B = 0$$

$$A_x = -107.1\text{ kN}$$

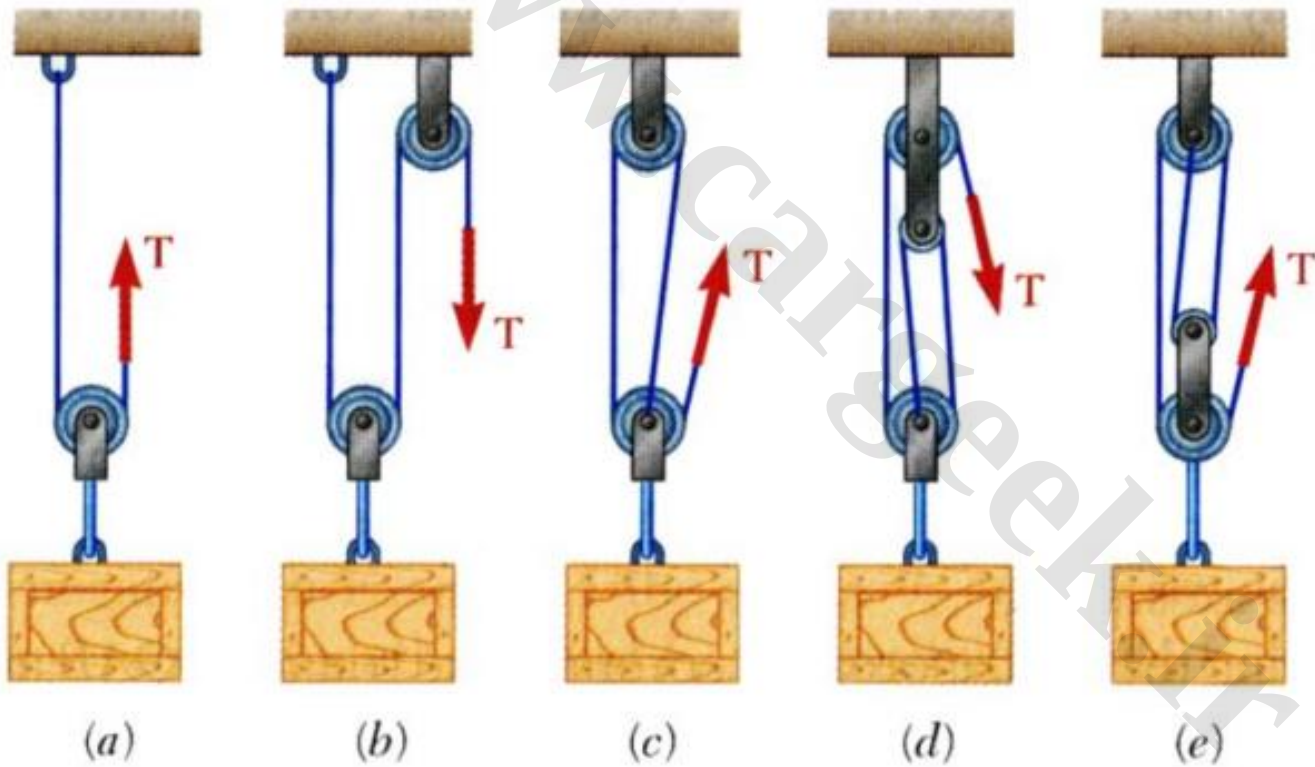
$$\sum F_y = 0: A_y - 9.81\text{ kN} - 23.5\text{ kN} = 0$$

$$A_y = +33.3\text{ kN}$$

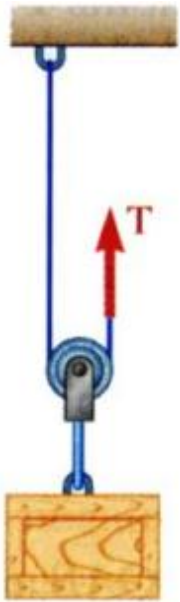
مثال ۱۴.

❖ صندوق 280kg توسط طناب و قرقره نگهداری میشود. کشش طناب را به ترتیب در شکلهای روبرو

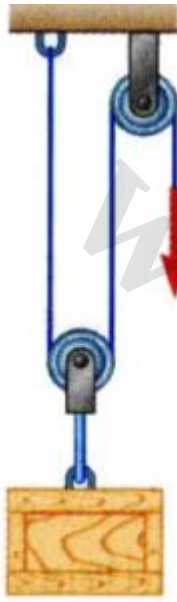
حساب کنید.



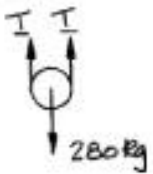
مثال ۱۳.



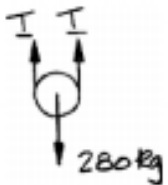
(a)



(b)

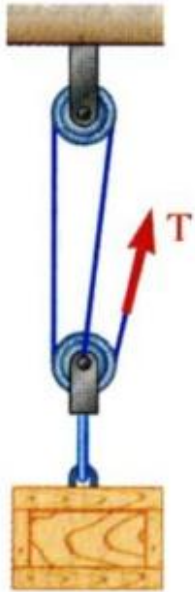


$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 2T - (280 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 0 \Rightarrow T = \frac{1}{2}(2746.8 \text{ N}) = 1373 \text{ N}$$

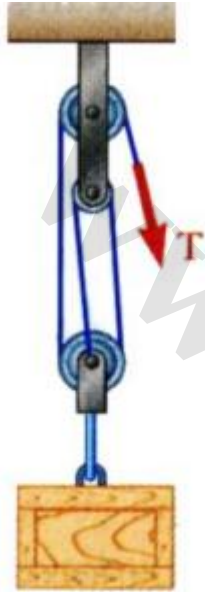


$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 2T - (280 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 0 \Rightarrow T = \frac{1}{2}(2746.8 \text{ N}) = 1373 \text{ N}$$

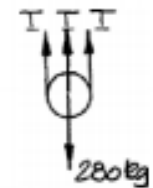
مثال ۱۳.



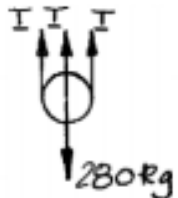
(c)



(d)

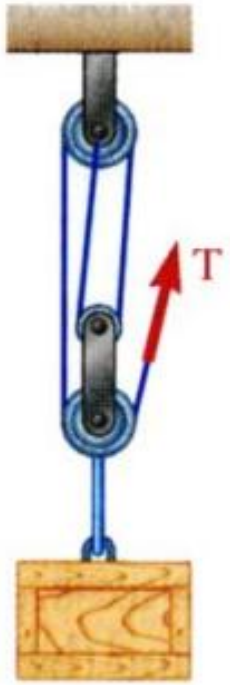


$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 3T - (280 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 0 \Rightarrow T = \frac{1}{3}(2746.8 \text{ N}) = 916 \text{ N}$$

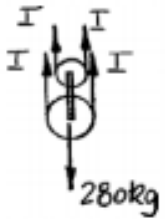


$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad 3T - (280 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 0 \Rightarrow T = \frac{1}{3}(2746.8 \text{ N}) = 916 \text{ N}$$

مثال ۱۳.



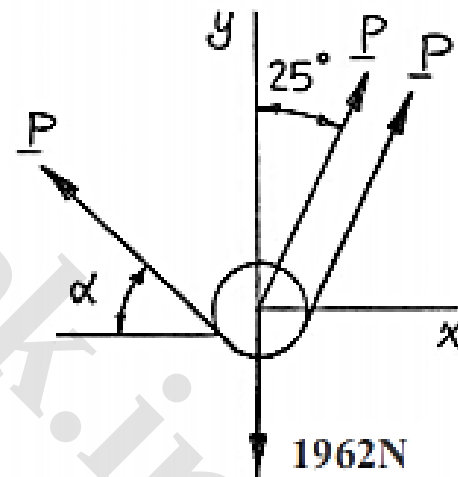
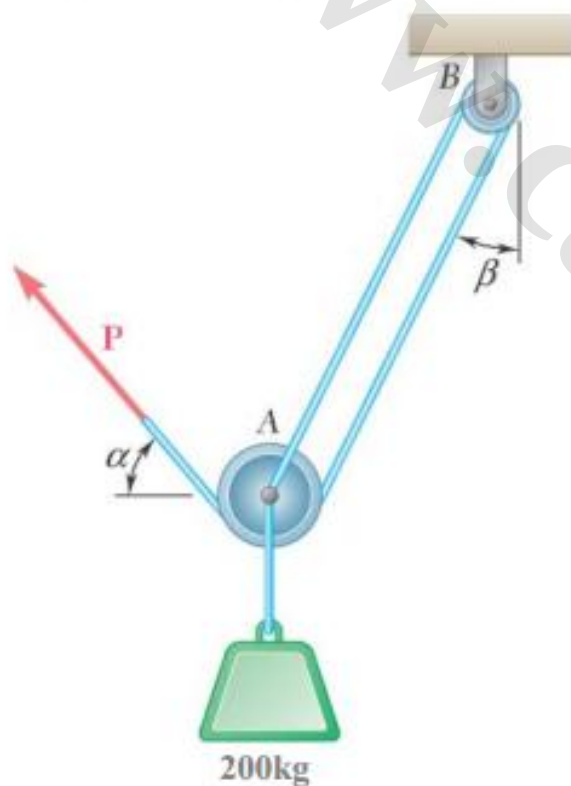
(e)



$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: 4T - (280 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 0 \Rightarrow T = \frac{1}{4}(2746.8 \text{ N}) = 687 \text{ N}$$

مثال ۱۴.

❖ صندوقی به وزن 200kg بوسیله طناب و قرقره نگهداری میشود. بازای $\beta=25^\circ$ ، مقدار و امتداد نیروی F را که باید بر سر آزاد طناب وارد نمود حساب کنید.



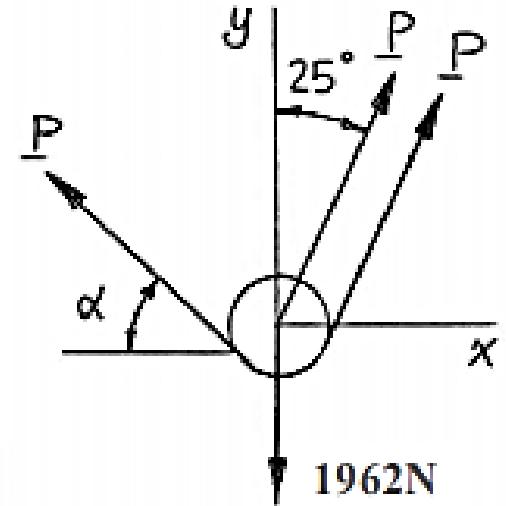
$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x = 0: & \quad 2P \sin 25^\circ - P \cos \alpha = 0 \\ \cos \alpha = 0.8452 & \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm 32.3^\circ \end{aligned}$$

for $\alpha = +32.3^\circ$

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y = 0: & \quad 2P \cos 25^\circ + P \sin 32.3^\circ - (200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 0 \\ \Rightarrow P = 662.79 \text{ N} & \quad \searrow 32.3^\circ \end{aligned}$$

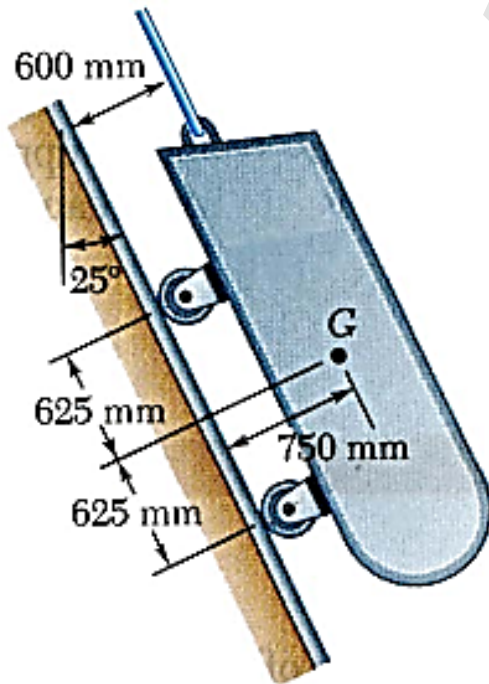
for $\alpha = -32.3^\circ$

$$\begin{aligned} + \uparrow \sum F_y = 0: & \quad 2P \cos 25^\circ + P \sin(-32.3^\circ) - (200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 0 \\ \Rightarrow P = 1218.8 \text{ N} & \quad \nearrow 32.3^\circ \end{aligned}$$



تعادل

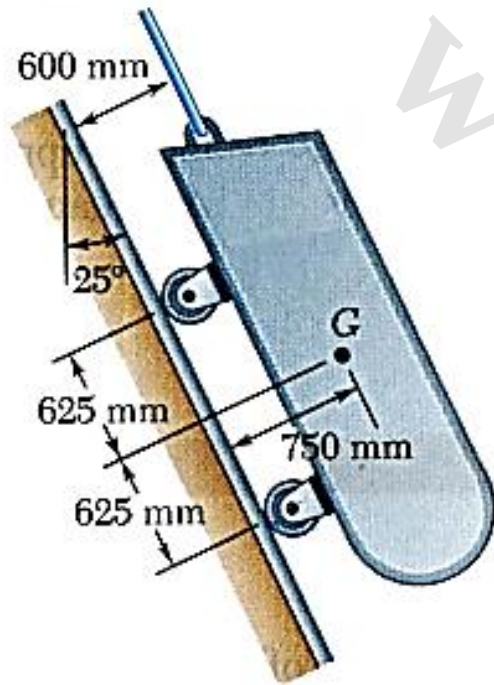
مثال ۱۵.



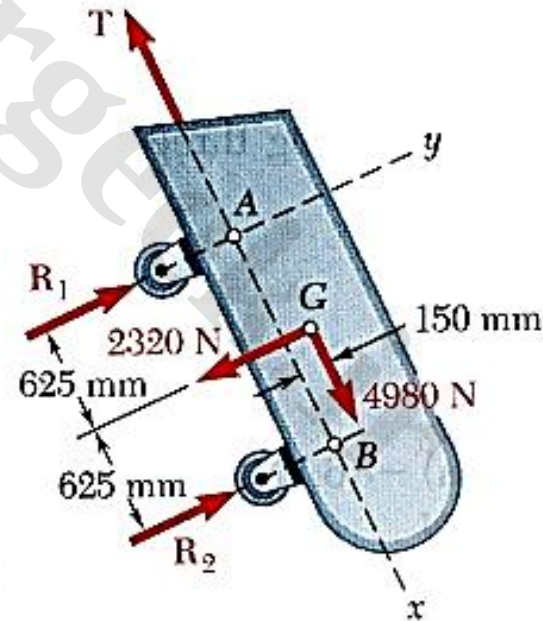
❖ یک واگن باربری بر روی ریلی که با امتداد عمودی زاویه 25° میسازد در حال سکون است. جرم واگن و بار آن 5500 N و مرکز گرانی آن G ، در وسط خط واصل بین دو محور چرخ و به ارتفاع 750 mm در بالای ریل قرار دارد. واگن توسط کابلی به ارتفاع 600 mm در بالای ریل نگهداری میشود. کشش کابل و عکس العملهای هر جفت چرخ را معین کنید.

تعادل

مثال ۱۵.

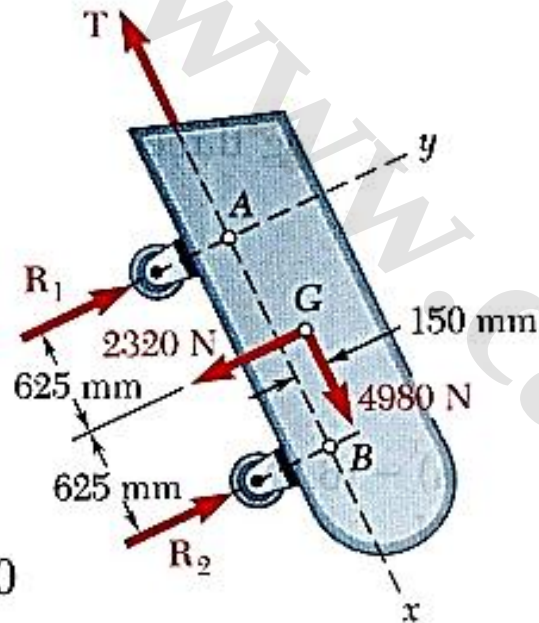


□ نمودار جسم آزاد واگن را رسم میکنیم. عکس العمل در هر چرخ بر سطح ریل عمود و نیروی کشش T با سطح ریل موازی است. برای سهولت، محور x را موازی با ریل و محور y را عمود بر آن انتخاب میکنیم.



$$W_x = +(5500N) \cos 25^\circ = +4980N$$

$$W_y = -(5500N) \sin 25^\circ = -2320kN$$



$$\sum M_A = 0$$

$$-(2320\text{ N})(0.625\text{ m}) - (4980\text{ N})(0.15\text{ m}) + R_2(1.25\text{ m}) = 0 \Rightarrow R_2 = +1757.6\text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$+(2320\text{ N})(0.625\text{ m}) - (4980\text{ N})(0.15\text{ m}) - R_1(1.25\text{ m}) = 0 \Rightarrow R_1 = +562.4\text{ N}$$

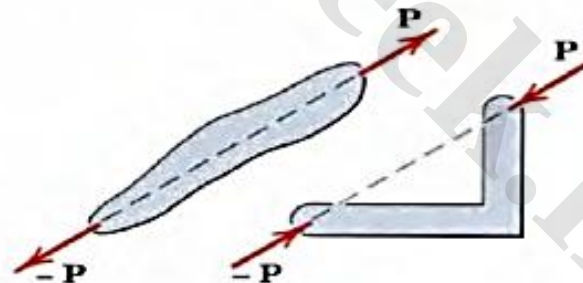
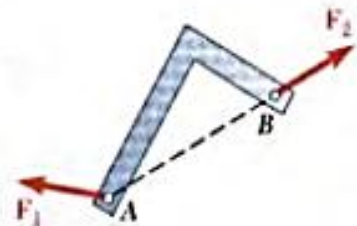
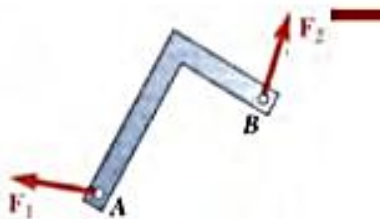
$$\sum F_x = 0: +4980\text{ N} - T = 0 \Rightarrow T = 4980\text{ N}$$

عضو دو نیرویی



هر گاه بر یک جسم یا سازه تنها و تنها دو نیروی خارجی وارد شود نتیجه میگیریم که برای تعادل سازه باید این نیروها از نظر مقدار مساوی یکدیگر ولی مختلف الجهت باشند. در غیر این صورت شرط تعادل برقرار نخواهد شد

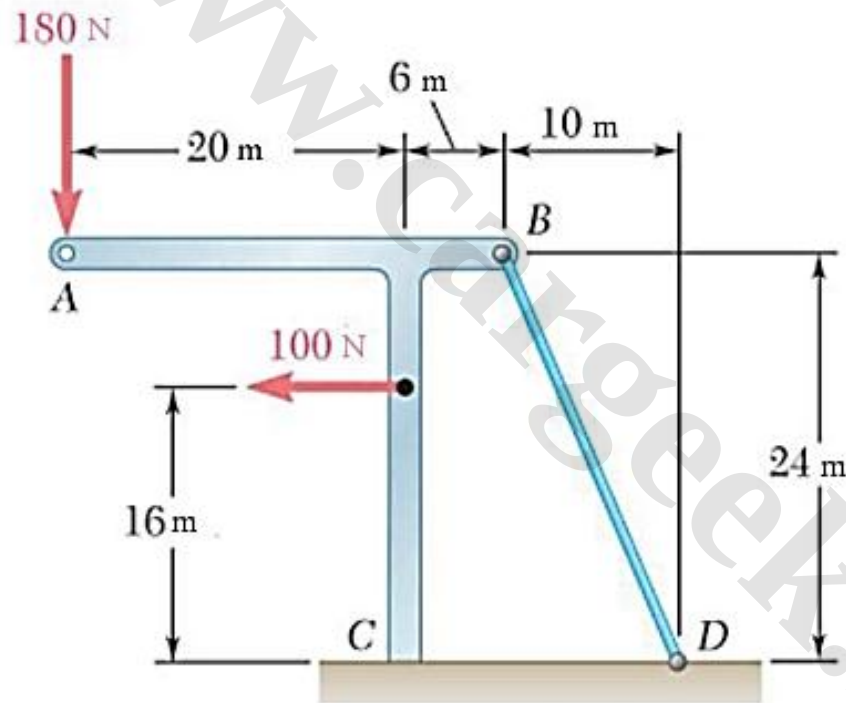
Two-Force Body (Members)



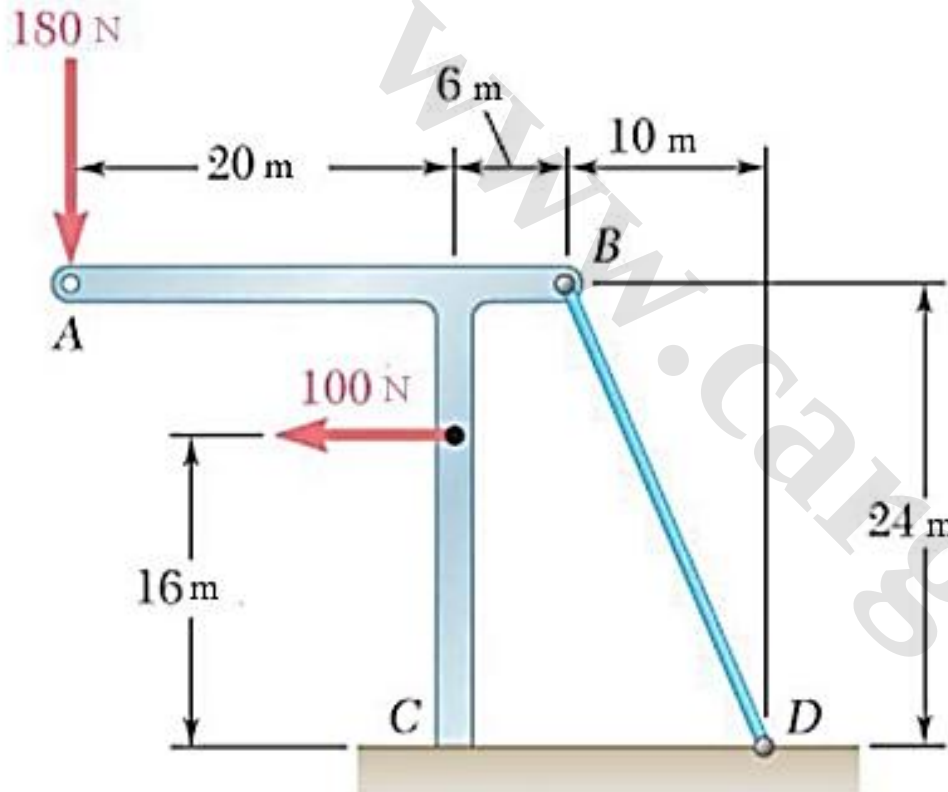
Two-force members

مثال ۱۶.

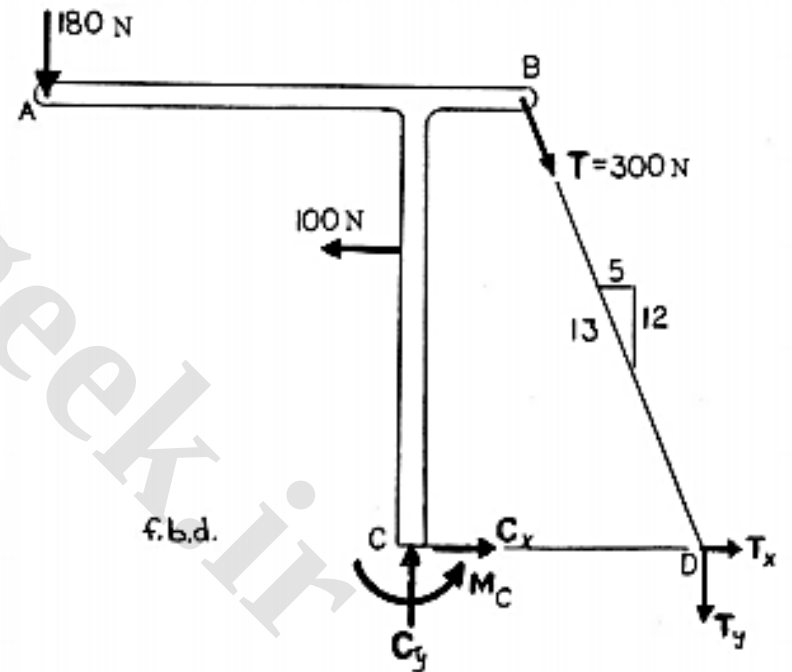
❖ چنانچه کشش در کابل BD برابر 300 N باشد، عکس العمل در تکیه گاه ثابت C از قاب چقدر است؟



مثال ۱۶.



□ راه حل:



$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0: C_x - 100 \text{ N} + \left(\frac{5}{13}\right) 300 \text{ N} = 0$$

$$\therefore C_x = -15.3846 \text{ N} \text{ or } C_x = 15.3846 \text{ N} \leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: C_y - 180 \text{ N} - \left(\frac{12}{13}\right) 300 \text{ N} = 0$$

$$\therefore C_y = 456.92 \text{ N} \text{ or } C_y = 456.92 \text{ N} \uparrow$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{(15.3846)^2 + (456.92)^2} = 457.18 \text{ N}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{C_y}{C_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{456.92}{-15.3846}\right) = -88.072^\circ$$

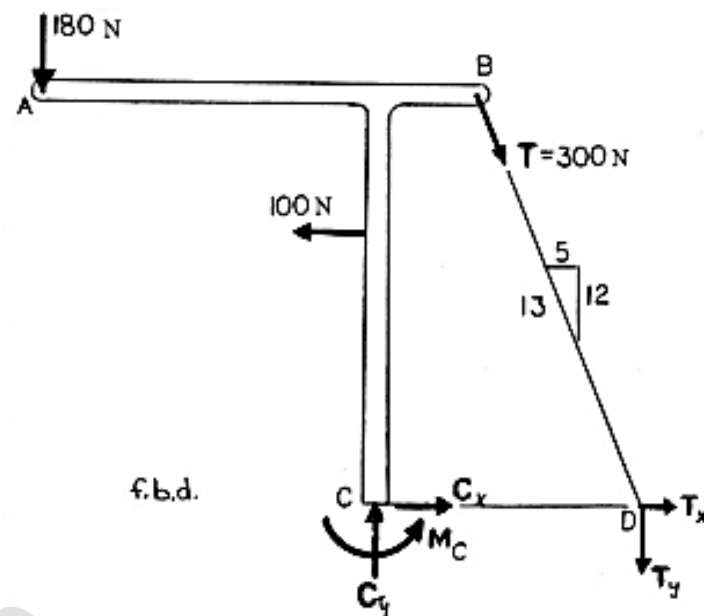
$$C = 457 \text{ N} \searrow 88.1^\circ$$

$$+\curvearrowright \Sigma M_C = 0: M_C + (180 \text{ N})(20 \text{ m.}) + (100 \text{ N})(16 \text{ m.}) - \left[\left(\frac{12}{13}\right) 300 \text{ N}\right](16 \text{ m.}) = 0$$

$$\therefore M_C = -769.23 \text{ N} \cdot \text{m.}$$

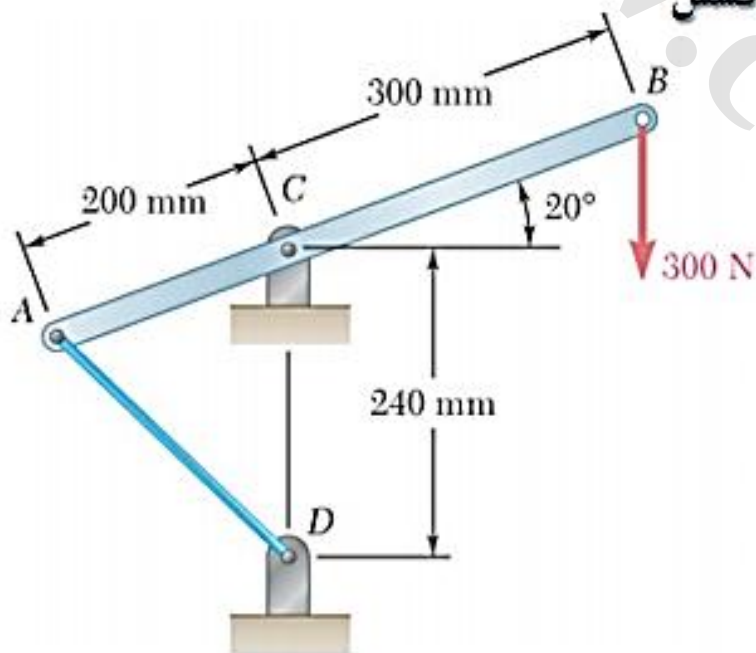
$$\mathbf{M}_C = 769 \text{ N} \cdot \text{m.}$$

راه حل: □

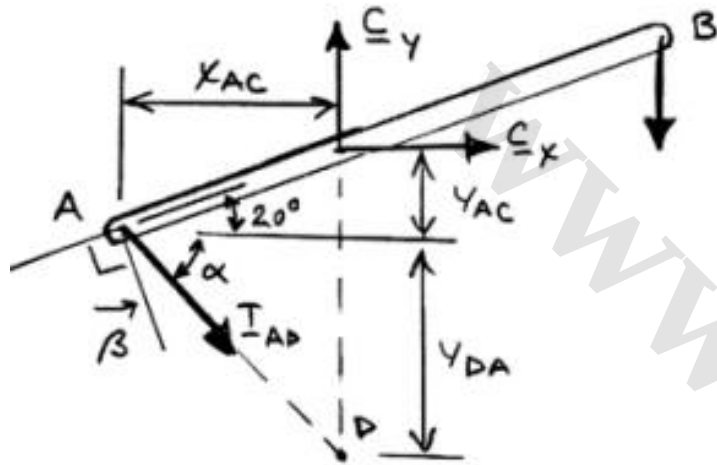


مثال ۱۷.

❖ اهرم AB در C لولا شده و در A به کابل کنترل متصل است. اگر اهرم تحت تاثیر نیروی عمودی 300N در B قرار گیرد، کشش کابل و عکس العمل C را مشخص کنید.



مثال ۱۷.



$$x_{AC} = (0.2m) \cos 20^\circ = 0.187m$$

$$y_{AC} = (0.2m) \sin 20^\circ = 0.068m$$

$$\Rightarrow y_{DA} = 0.24m - 0.068m = 0.172m$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{y_{DA}}{x_{AC}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0.172m}{0.187m} \right) = 42.6^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - 20^\circ - 42.6^\circ = 27.4^\circ$$

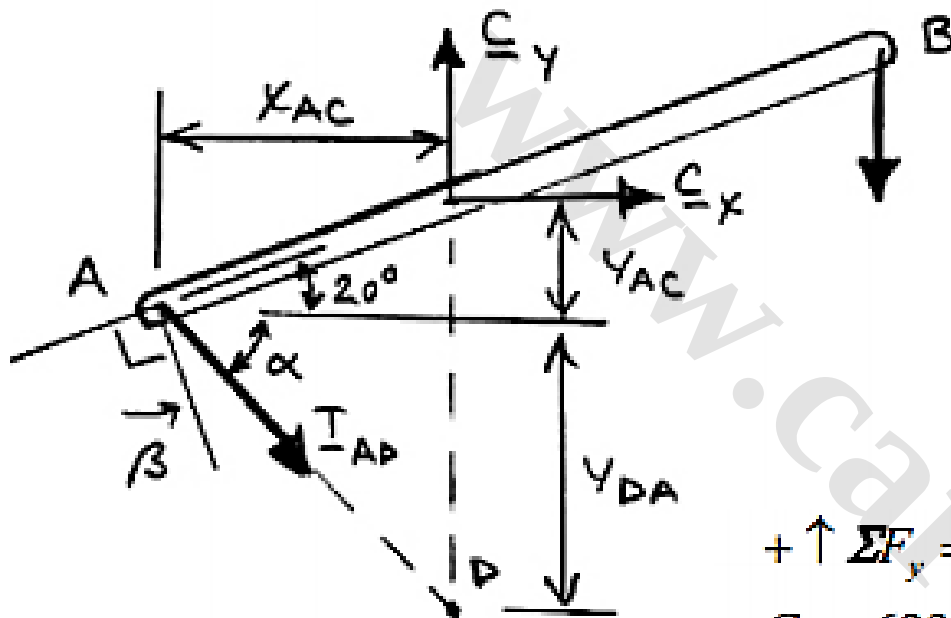
$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0: \quad T_{AD} \cos 27.4^\circ (0.2m) - (300N) [(0.3m) \cos 20^\circ] = 0$$

$$T_{AD} = 477.5N \quad \blacktriangleleft$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0: \quad C_x + (477.5N) \cos 42.6^\circ = 0$$

$$C_x = -351.4N$$

مثال ۱۷.



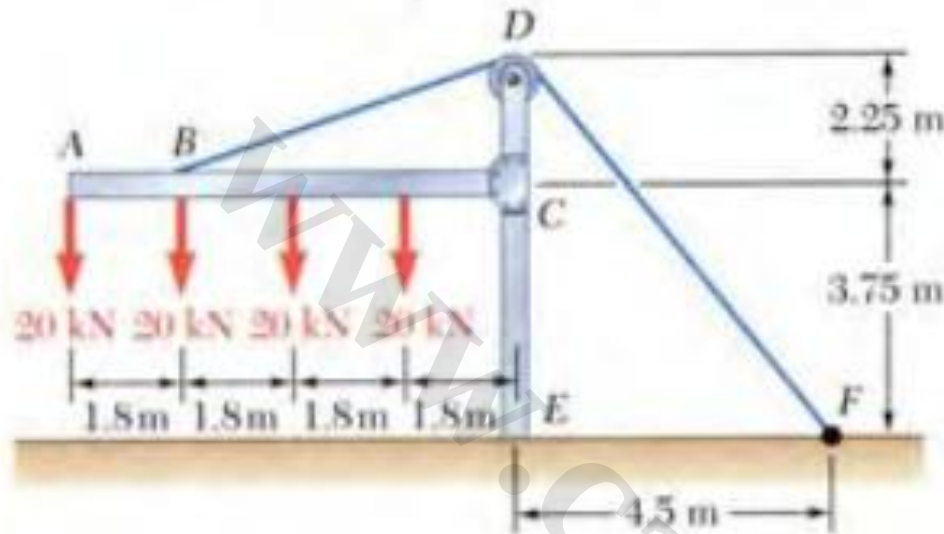
$$+\uparrow \sum F_y = 0: \quad C_y - 300N - (477.5N) \sin 42.6^\circ = 0$$

$$C_y = 623.2N$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{(-351.4)^2 + (623.2)^2} = 715.4 N$$

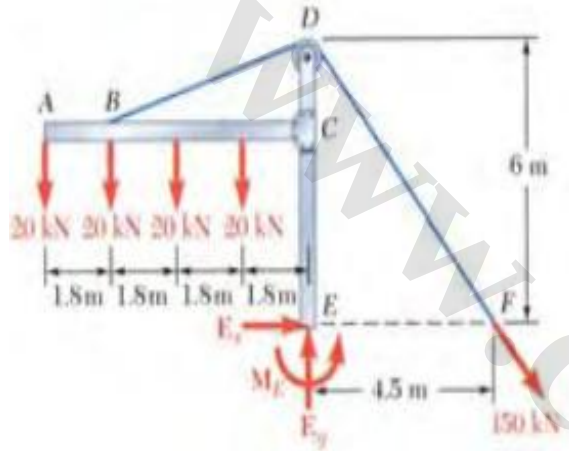
$$\theta = \tan^{-1} \frac{C_y}{C_x} = \tan^{-1} \frac{623.2}{351.4} = 60.5^\circ$$

$$\therefore C = 715.4 N \searrow 60.5^\circ \blacktriangleleft$$



The frame supports part of the roof of a small building. The tension in the cable is 150 kN.

Determine the reaction at the fixed end E .



- Solve 3 equilibrium equations for the reaction force components and couple.

$$\sum F_x = 0: E_x + \frac{4.5}{7.5}(150 \text{ kN}) = 0$$

$$E_x = -90.0 \text{ kN}$$

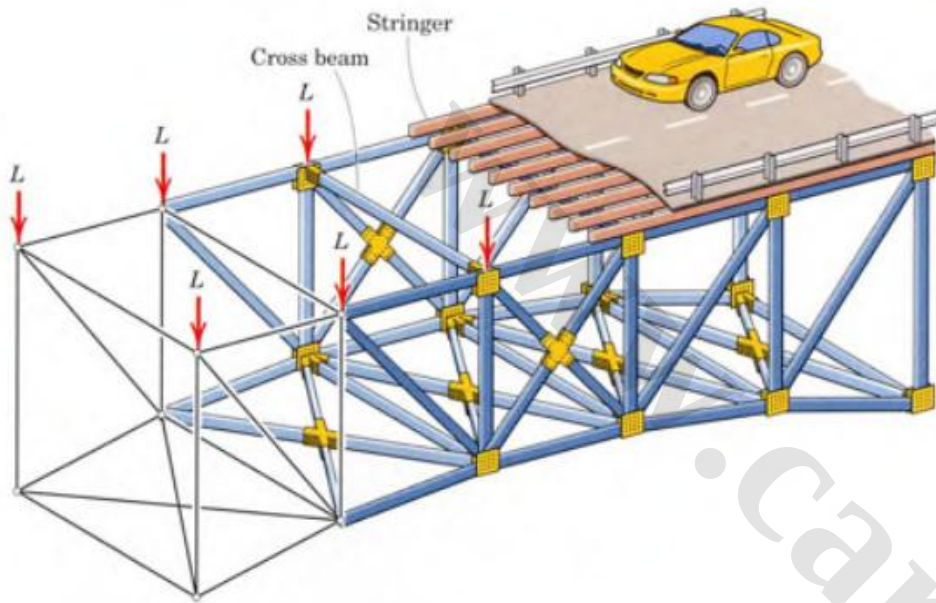
$$\sum F_y = 0: E_y - 4(20 \text{ kN}) - \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN}) = 0$$

$$E_y = +200 \text{ kN}$$

- Create a free-body diagram for the frame and cable.

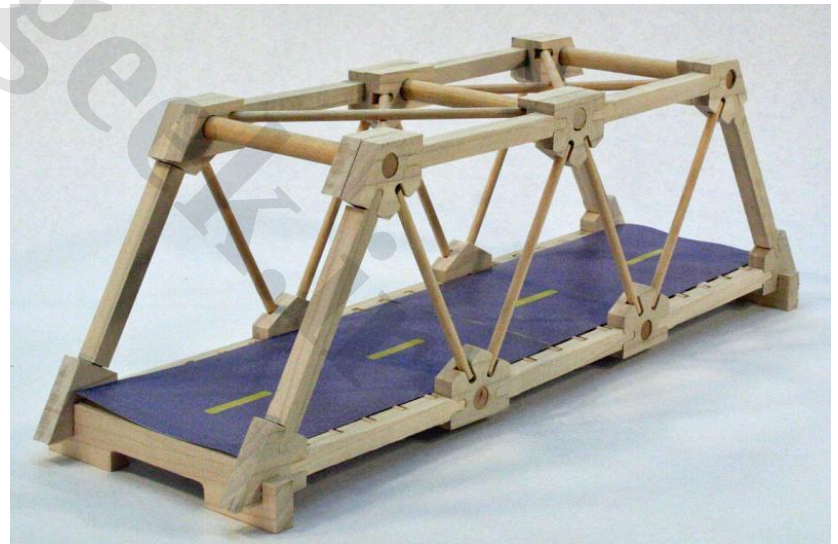
$$\begin{aligned} \sum M_E = 0: & +20 \text{ kN}(7.2 \text{ m}) + 20 \text{ kN}(5.4 \text{ m}) \\ & + 20 \text{ kN}(3.6 \text{ m}) + 20 \text{ kN}(1.8 \text{ m}) \\ & - \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN})4.5 \text{ m} + M_E = 0 \end{aligned}$$

$$M_E = 180.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



خوپا

Truss

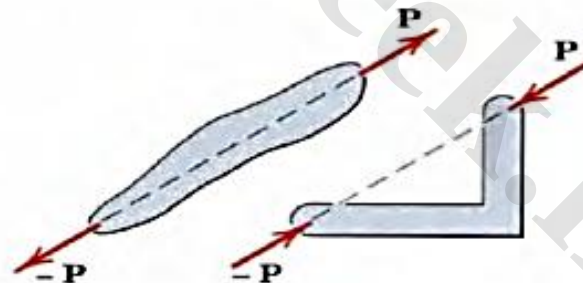
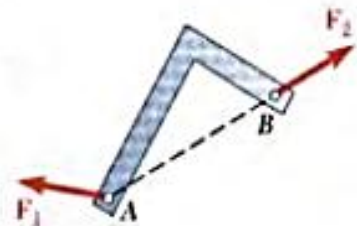
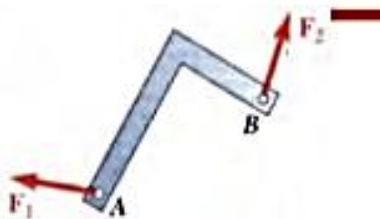


عضو دو نیرویی



هر گاه بر یک جسم یا سازه تنها و تنها دو نیروی خارجی وارد شود نتیجه میگیریم که برای تعادل سازه باید این نیروها از نظر مقدار مساوی یکدیگر ولی مختلف الجهت باشند. در غیر این صورت شرط تعادل برقرار نخواهد شد

Two-Force Body (Members)



Two-force members

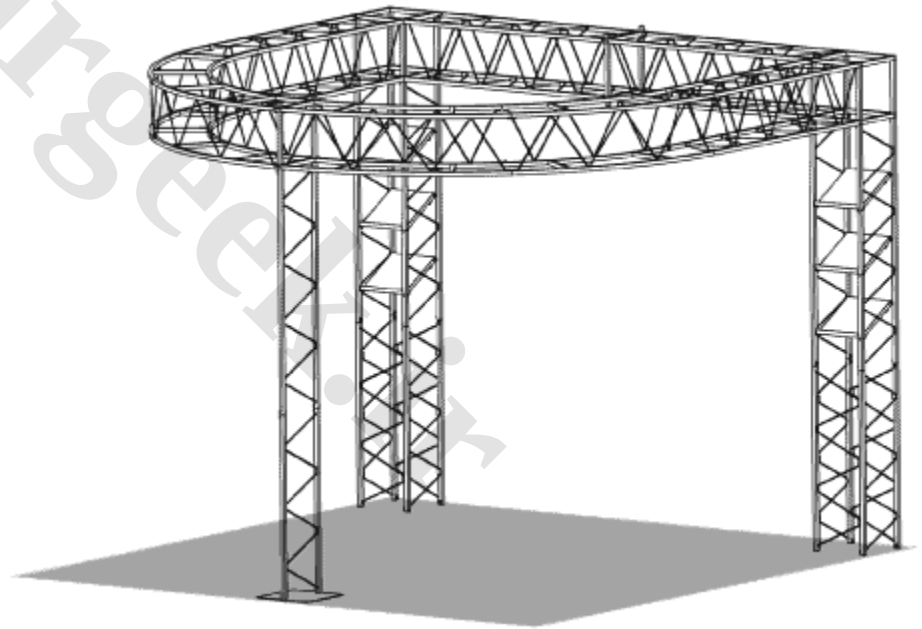
• در اینجا سه گروه از سازه های مهندسی را بررسی می نمایم:

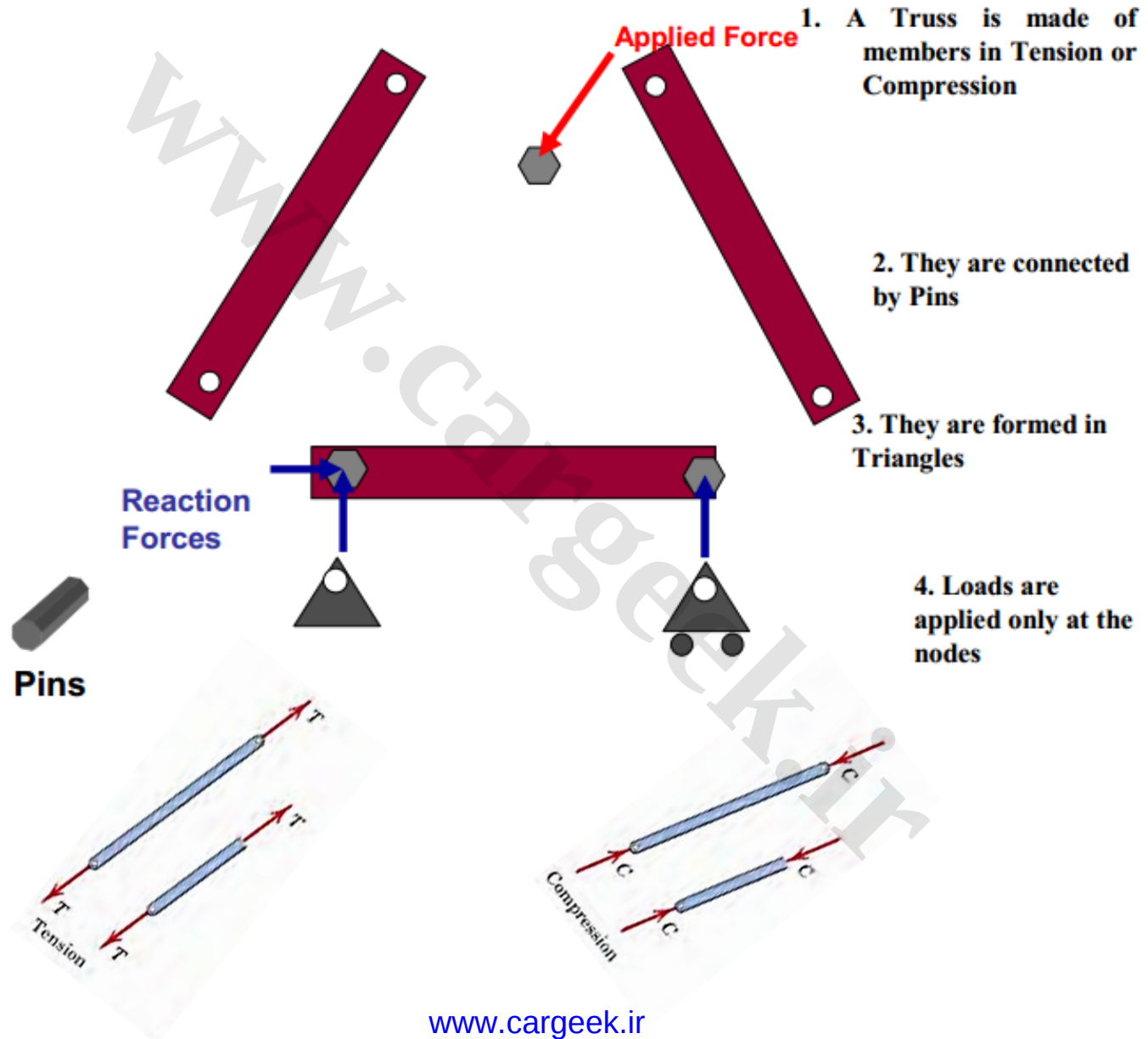
1. خرپاها (Truss): از اعضای دو نیرویی مستقیم با نقاط اتصال در انتهای

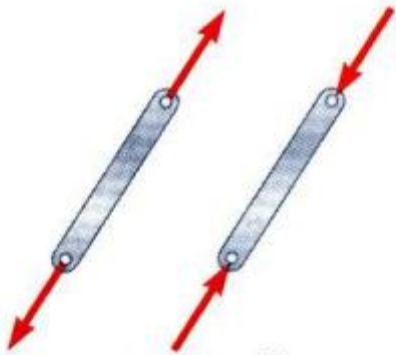
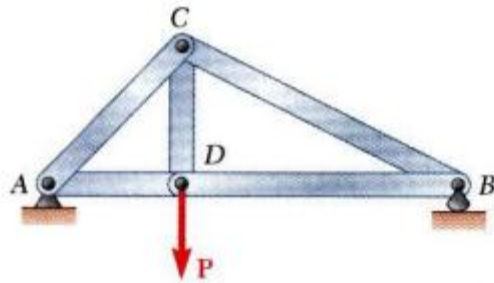
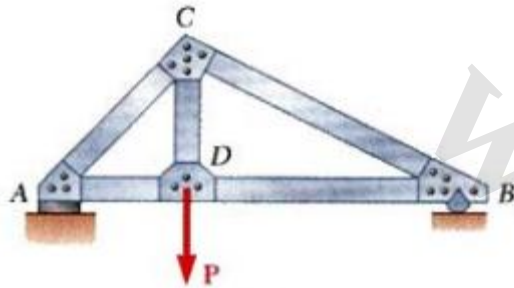
اعضاء تشکیل میشوند.

2. قابها (Frames): حداقل از یک عضو چند نیرویی که سه یا چند نیرو بر

آن وارد میشوند و در حالت کلی در امتداد عضو نیستند، تشکیل میشوند.





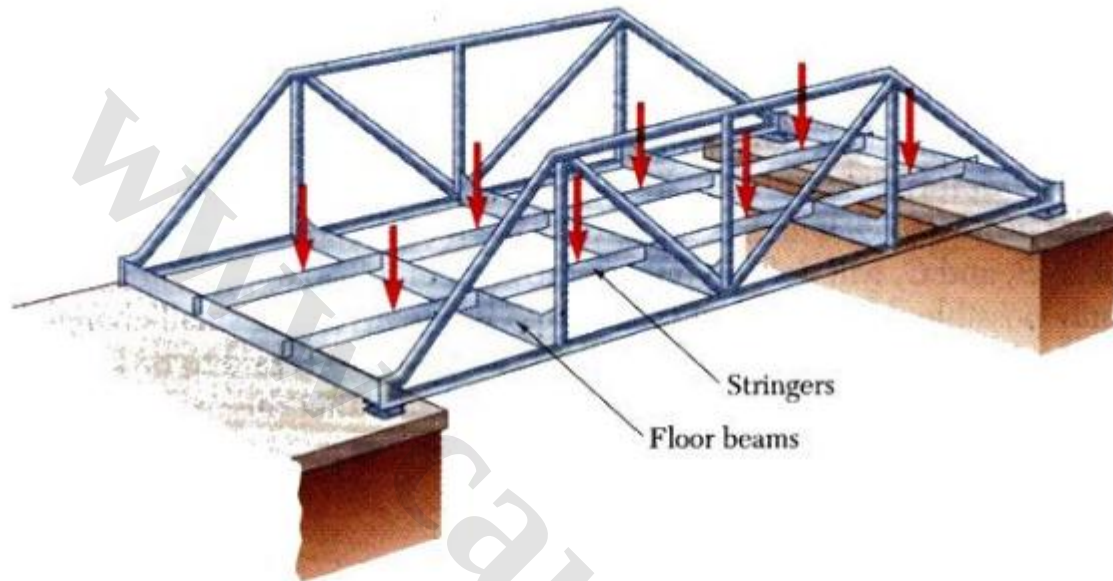


- یک خرپا شامل اعضاء مستقیمی است که توسط مفاصل بهم متصلند. هیچ عضوی از میان مفصل امتداد پیدا نمیکند.

- اکثر سازه ها از چندین خرپای متصل بهم ساخته شده و همه با هم قابی فضایی را تشکیل میدهند. هر خرپا برای حمل بارهایی که در صفحه آن اثر میکند طراحی شده است و بنابراین به مثابه سازه ای دو بعدی عمل میکند.

- اتصالات پیچ شده یا جوشکاری شده فرض میشوند که بوسیله پین بهم متصل شده اند لذا نیروهای موثر در انتهای اعضاء به یک نیروی ساده بدون کوپل تبدیل میشوند. فقط اعضاء دو نیرویی در نظر گرفته میشوند.

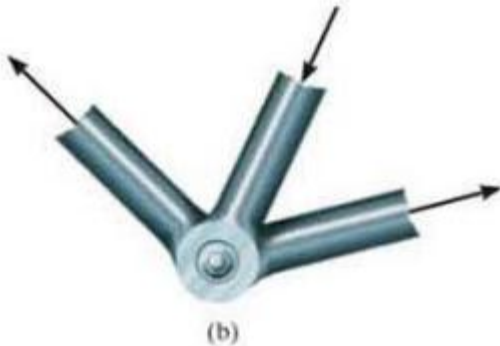
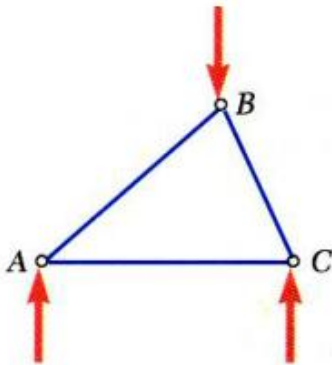
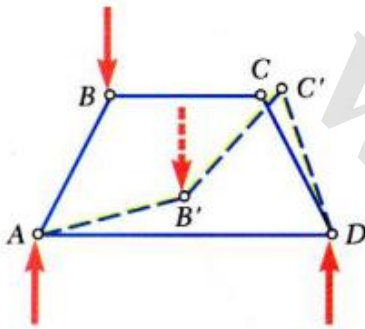
- وقتی نیروها به کشیدن و جدا کردن عضو تمایل دارند، عضو در حال کشش است و اگر نیروها به فشردن عضو تمایل داشته باشند عضو در حال فشار است.



• اعضاء يك خرپا باريك اند و بار جانبى اندكى را ميتوانند تحمل كنند، بنابراين همه بارها بايد بر مفصلهاى مختلف وارد شوند و نه بر خود اعضاء.

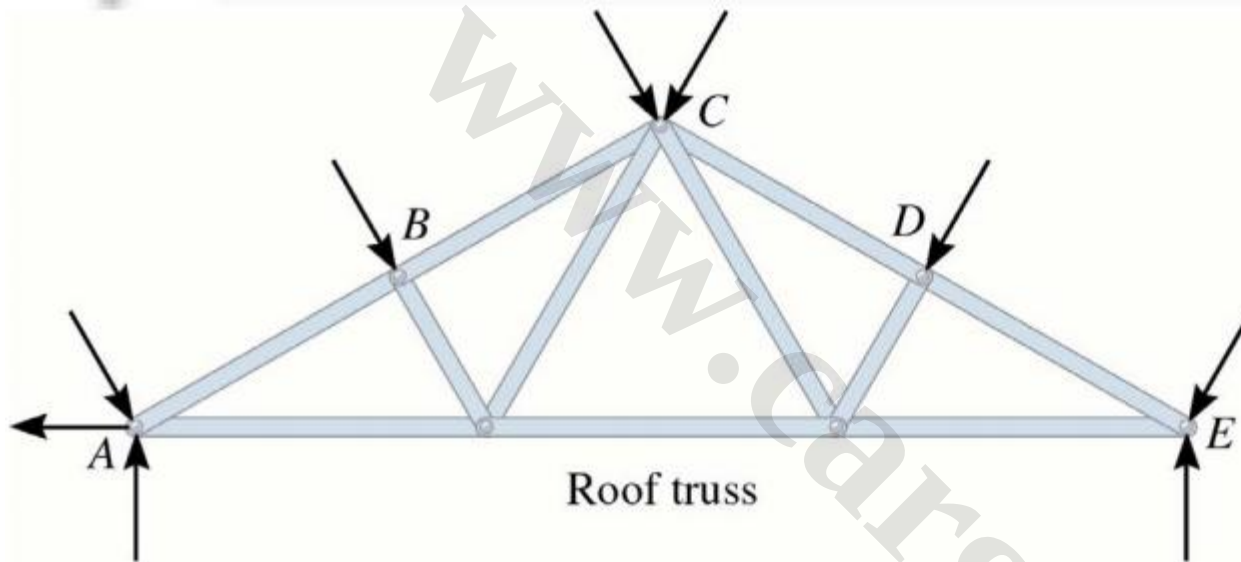
• فرض ميشود كه وزن عضوهاى خرپا نيز بر مفصلها وارد ميشود. نصف وزن هر عضو به هر يك از دو مفصل عضو وارد ميشود.

- یک خرپای صلب بر اثر اعمال بار فرو نمی ریزد.

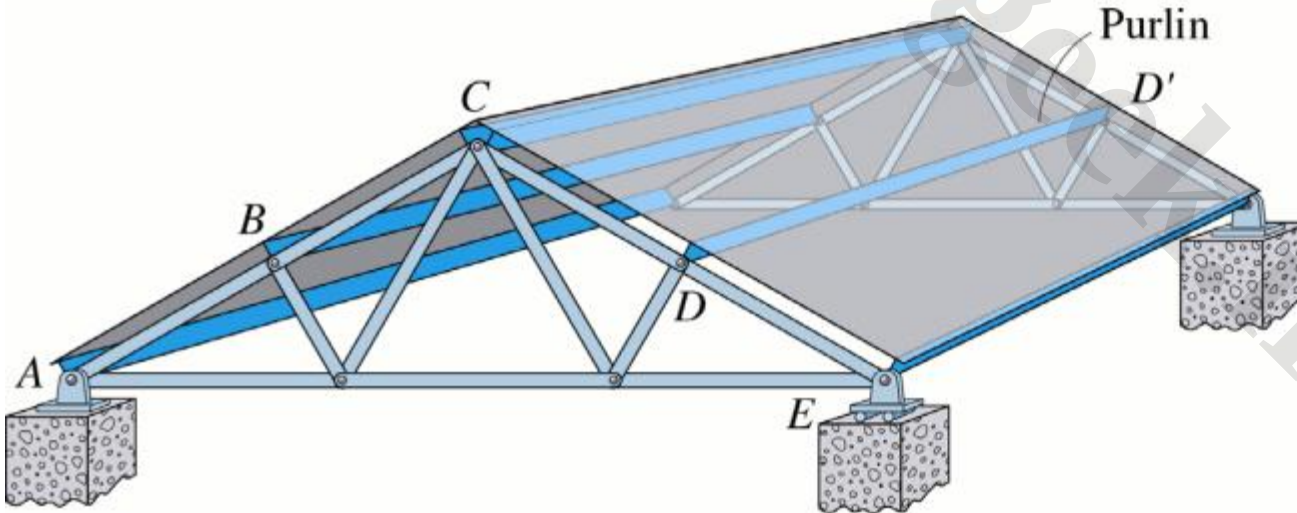


(b)

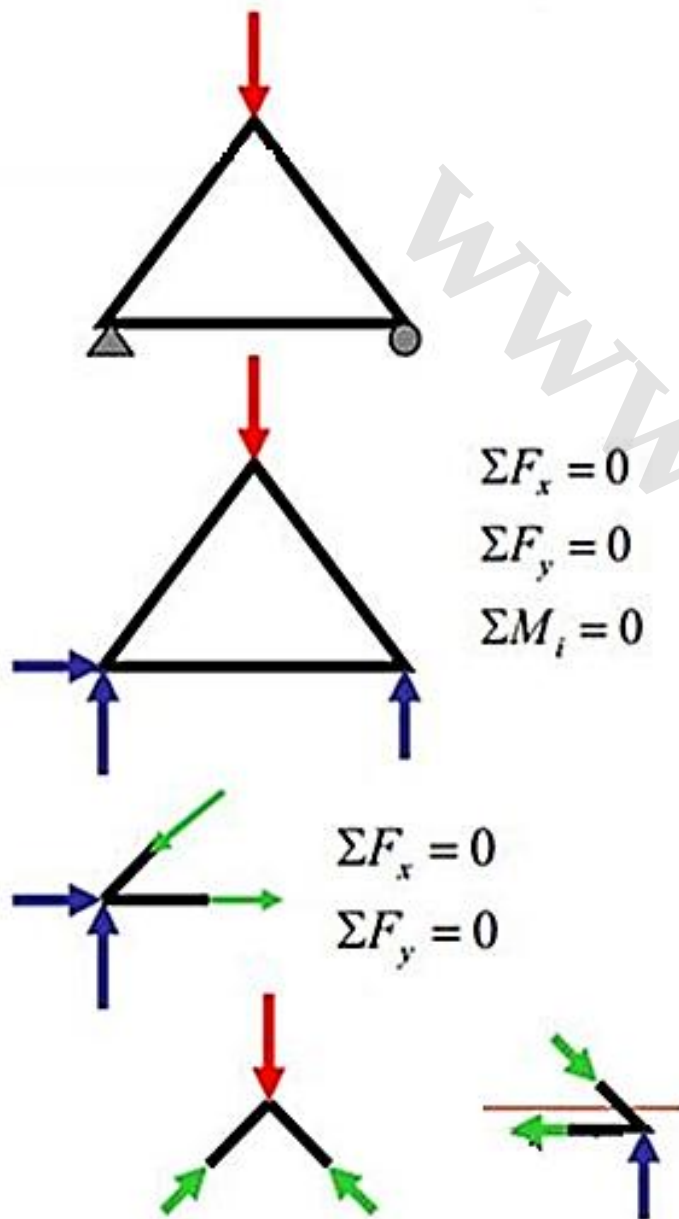




- خرپای سقفی از دو خرپای مسطح ساخته شده که بوسیله یک سری تیرهای افقی روی ستونها بهم متصلند



تحلیل خریا به روش تعادل مفصل



$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$\Sigma M_i = 0$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

1. محاسبه نیروهای خارجی

2. تک تک مفصل ها را جدا کرده و بردارهای

نیرویی آن مفصل را رسم می نمائیم.

3. معادلات تعادل را برای آن مفصل حل می نمائیم

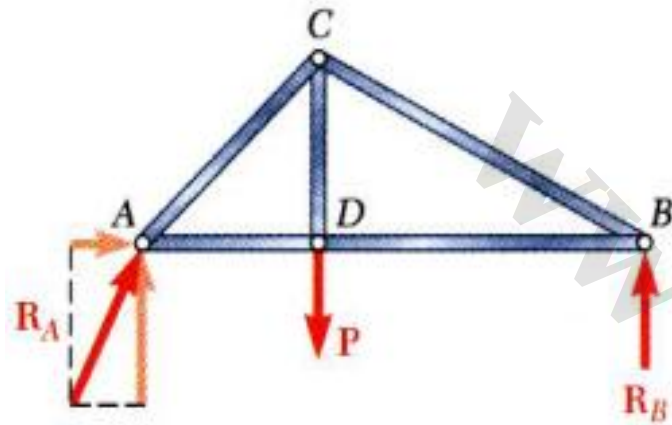
4. برای سایر مفصل ها به همین شکل معادلات

تعادل را حل می نمائیم.

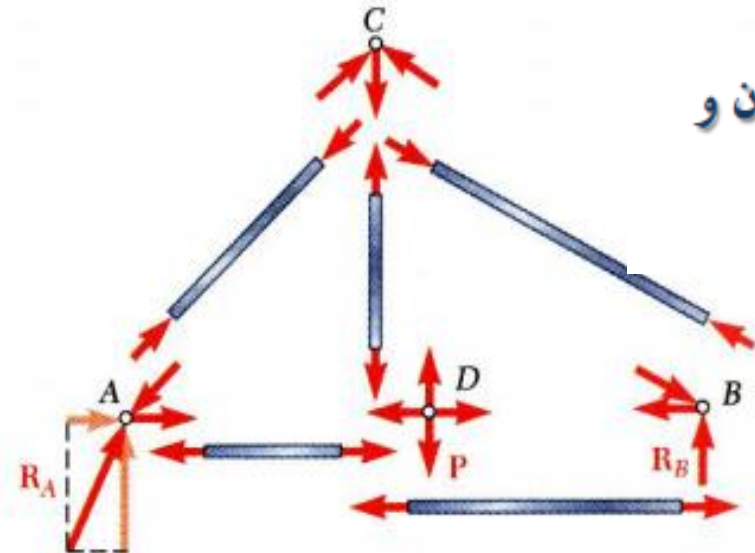
5. برای سایر مفصل ها به همین شکل معادلات

تعادل را حل می نمائیم.

تحلیل خریا به روش تعادل مفصل



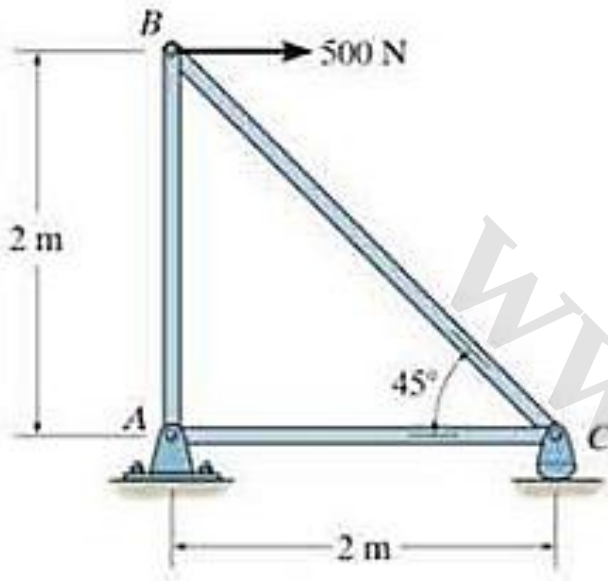
- اعضاء خریا را از هم جدا کرده و نمودار جسم آزاد را برای هر عضو و پین رسم میکنیم.



- دو نیروی اعمالی روی هر عضو، برابر، دارای خط اثر یکسان و جهات مخالف هم هستند.

- نیروهای اعمالی توسط اعضاء روی پینها یا مفاصل در انتهای آنها، همراستای عضو، مساوی و مخالف هستند.

مثال ۱.

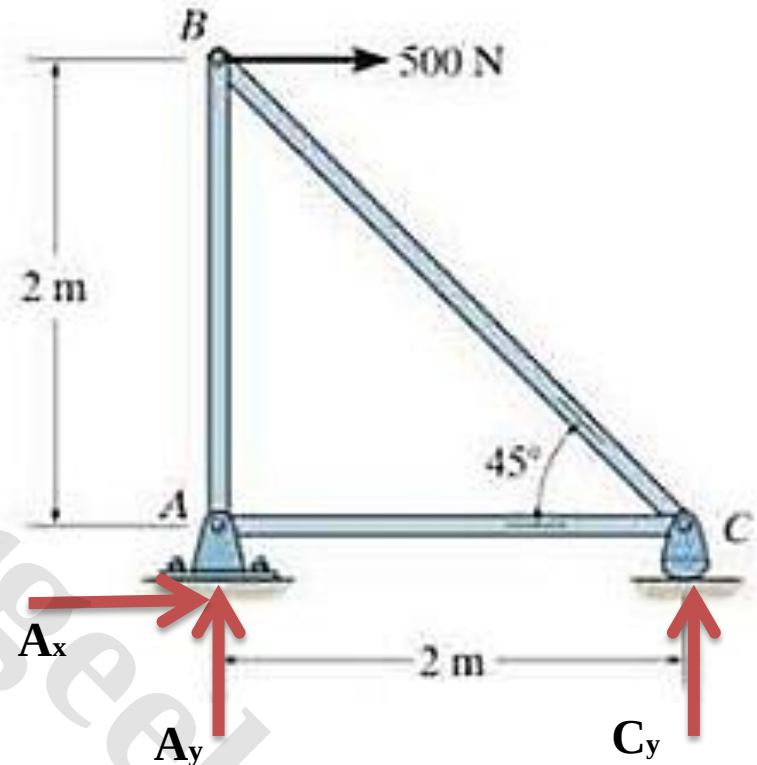


$$\sum F_x = 0 \quad A_x + 500 = 0$$

$$A_x = -500N$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + C_y = 0$$

$$A_y = -C_y$$

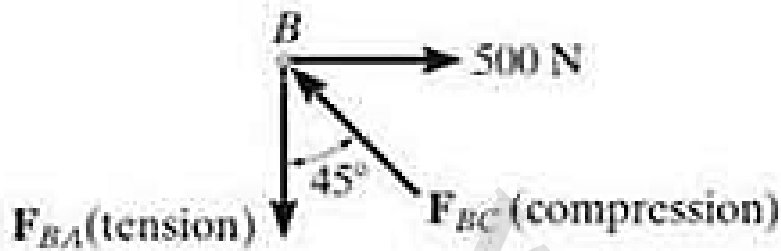


$$\sum M_A = 0 \quad C_y \times 2 - 500 \times 2 = 0$$

$$C_y = 500N$$

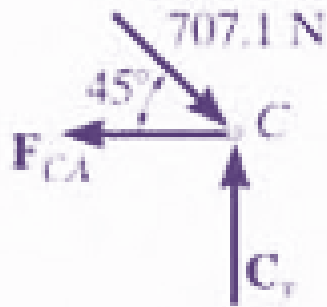
$$A_y = -500N$$

مثال ۱.



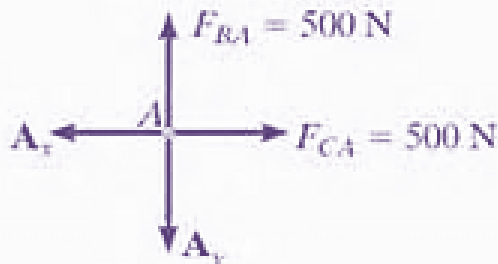
$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad 500 \text{ N} - F_{BC} \sin 45^\circ = 0 \quad F_{BC} = 707.1 \text{ N (C)}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad F_{BC} \cos 45^\circ - F_{BA} = 0 \quad F_{BA} = 500 \text{ N (T)}$$



$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad -F_{CA} + 707.1 \cos 45^\circ \text{ N} = 0 \quad F_{CA} = 500 \text{ N (T)}$$

جهت چک کردن مقادیر نیرویی در نقطه A معادلات تعادل برای این نقطه را می نویسیم.

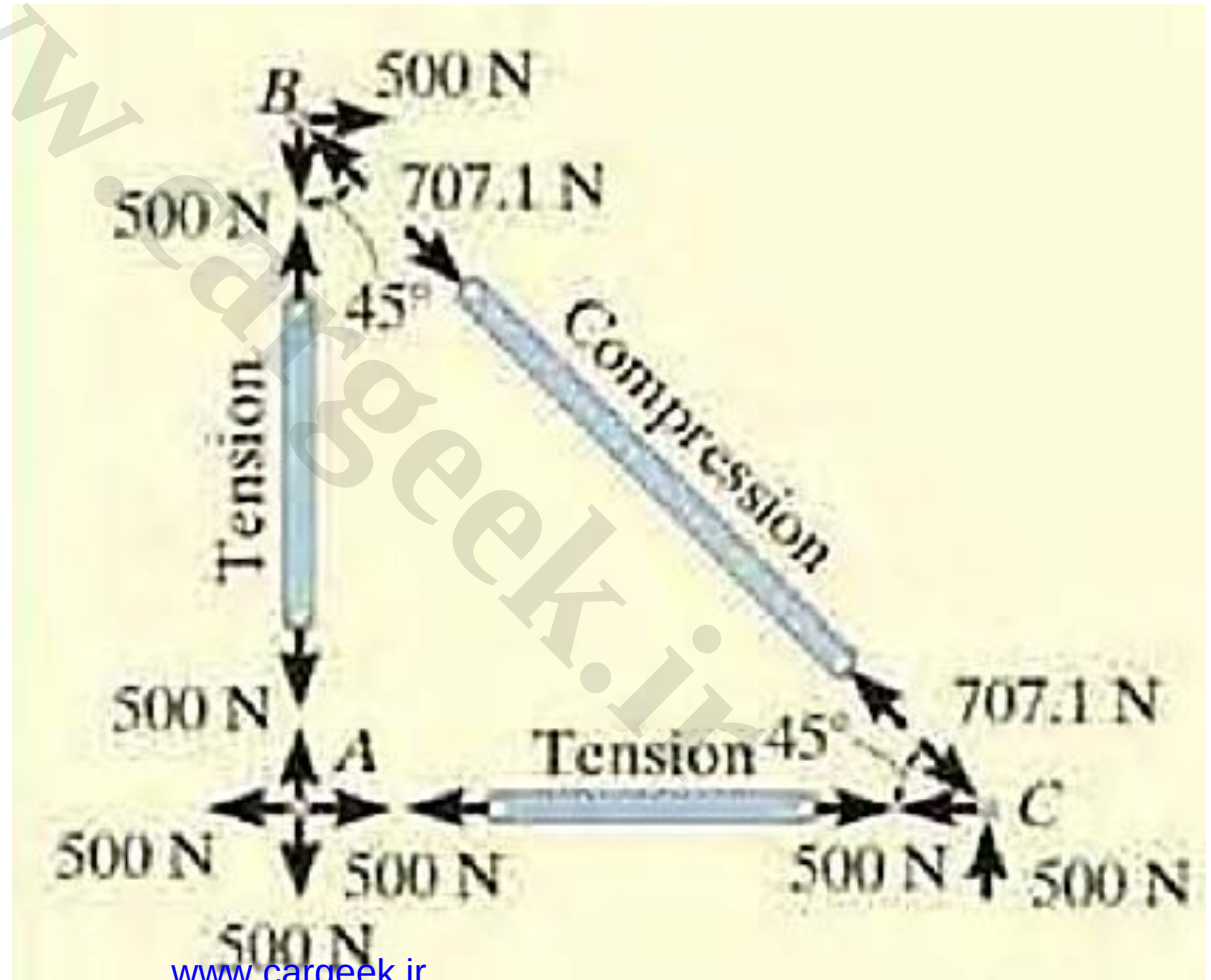
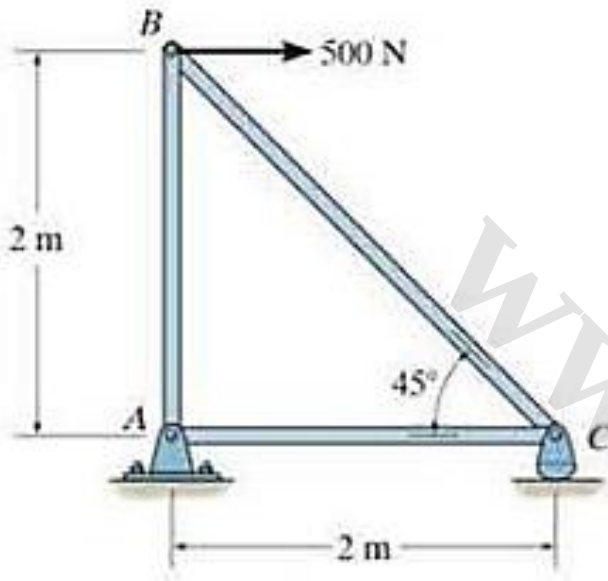


$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad 500 \text{ N} - A_x = 0 \quad A_x = 500 \text{ N}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 500 \text{ N} - A_y = 0 \quad A_y = 500 \text{ N}$$

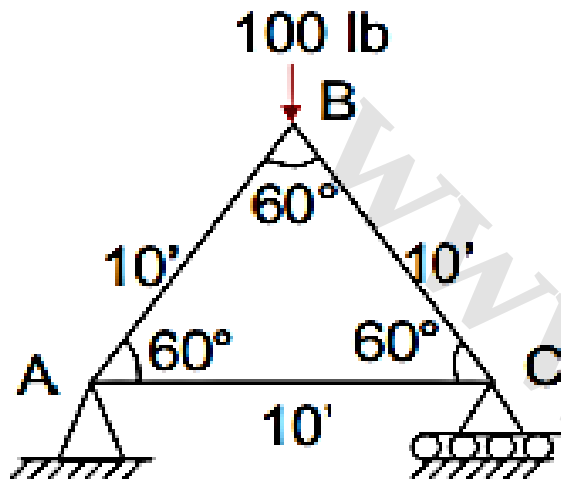
مثال ۱.

آنالیز نیرویی اعضای خرپا

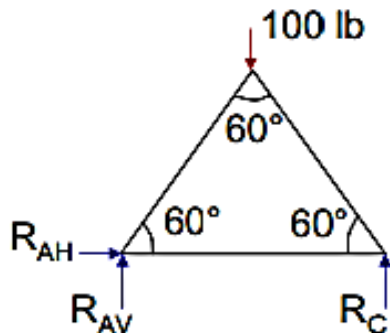


مثال ۲.

مقدار نیروی کششی و یا فشاری
هر عضو را مشخص نمایید.



Step 1: Free body diagram



$$R_{AH} = 0$$

• Step 2: Solve for Reaction forces

$$R_C \times 10 - 100 \times 5 = 0$$

$$R_C = 50 \text{ lb}$$

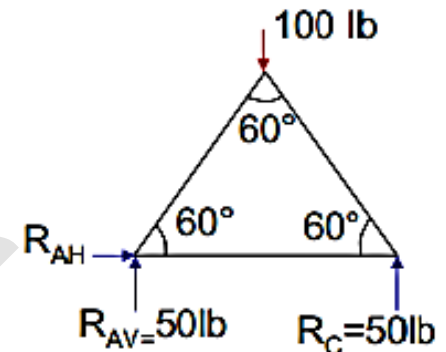
$$\sum M_A = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

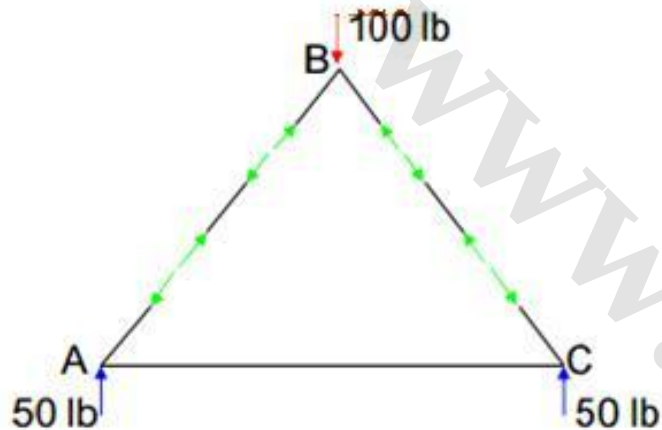
$$R_C + R_{AV} - 100 = 0$$

$$50 + R_{AV} - 100 = 0$$

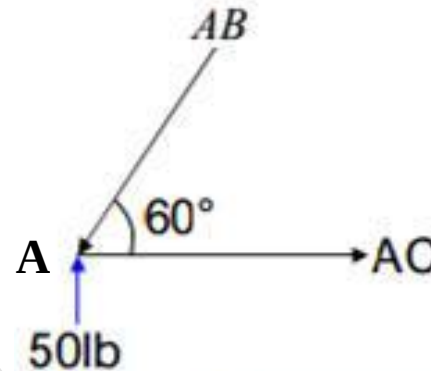
$$R_{AV} = 50 \text{ lb}$$



Step 3: Isolate a joint with no more than two internal forces



• Step 4: Write and solve equations equilibrium



$$\sum F_Y = 0$$

$$AB \sin 60^\circ = 50$$

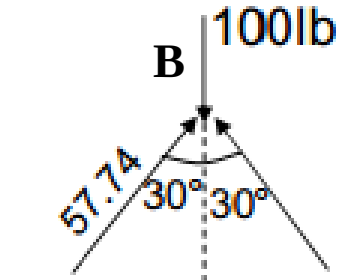
$$AB = 50 / \sin 60^\circ = 57.74 \text{ lb}$$

$$\sum F_X = 0$$

$$AB \cos 60^\circ = AC$$

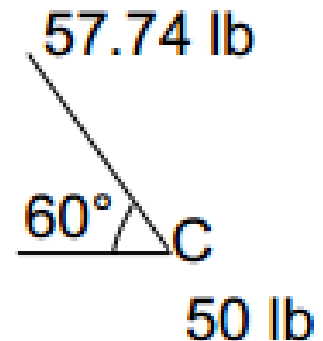
$$AC = 57.74 \cos 60^\circ = 57.74 * 0.5 = 28.87 \text{ lb}$$

• Step 5: Proceed to another joint with no more than two internal force



$$\sum F_Y = 0$$

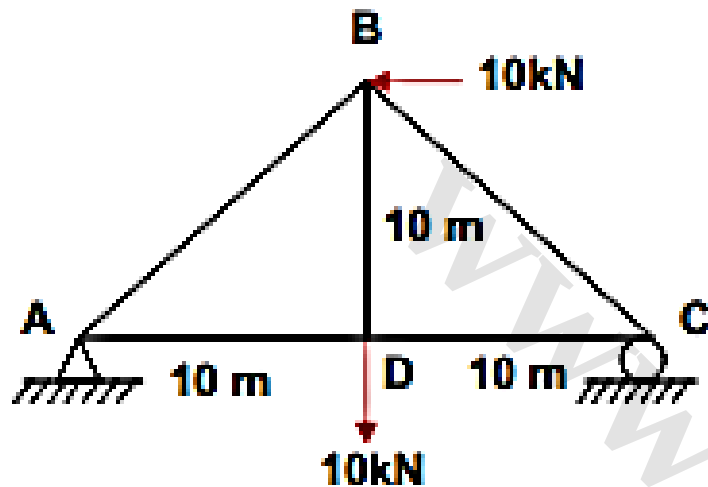
• Step 6: Proceed to the next joint C



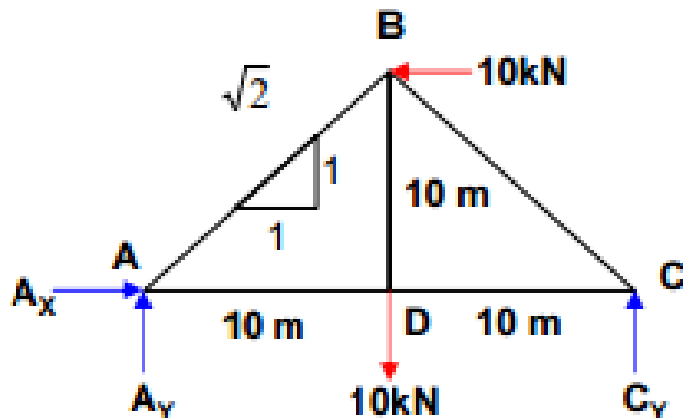
$$\sum F_Y = 0$$

مثال ۳.

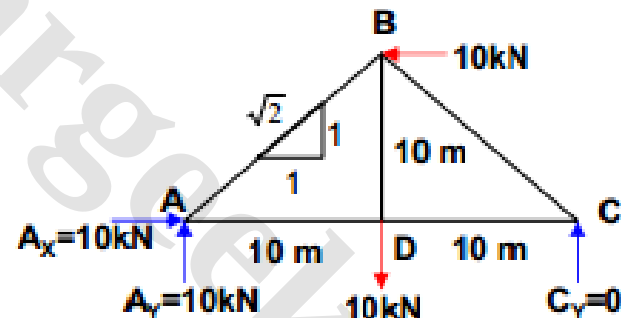
مقدار نیروی کششی و یا فشاری
هر عضو را مشخص نمایید.



• Step 1: Free body diagram



• Step 2: Solve for Reaction forces



$$\sum F_x = 0$$

$$A_x - 10 = 0$$

$$A_x = 10 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$C_y \cdot 20 - 10 \cdot 10 + 10 \cdot 10 = 0$$

$$C_y \cdot 20 = 100 - 100 = 0$$

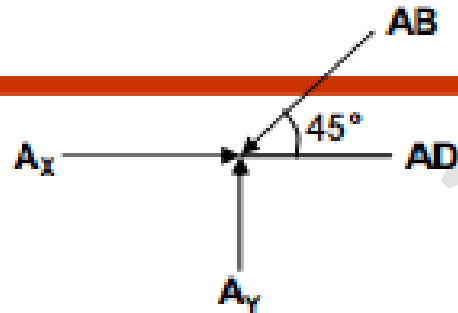
$$C_y = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$A_y - 10 = 0$$

$$A_y = 10 \text{ kN}$$

• Step 3: Joint A



$$\sum F_y = 0$$

$$AB \sin 45^\circ = A_y$$

$$AB = A_y / \sin 45^\circ = 10 / 0.707 = 14.14$$

$$\sum F_x = 0$$

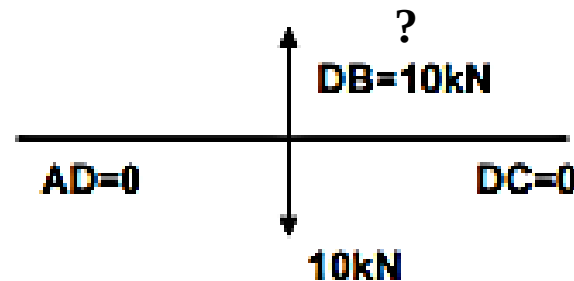
$$A_x - AB \cos \theta - AD = 0$$

$$10 - 14.14 \cos 45^\circ - AD = 0$$

$$10 - 10 - AD = 0$$

$$AD = 0$$

• Step 4: Joint D

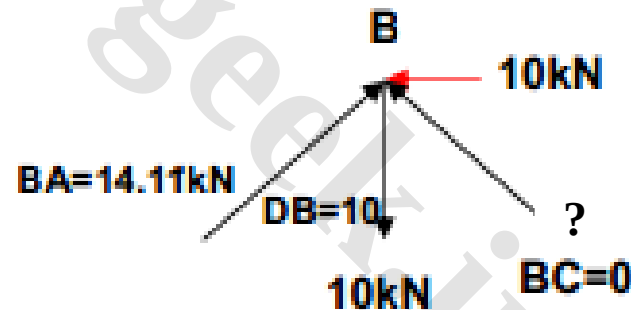


$$\sum F_y = 0$$

$$DB - 10 = 0$$

$$DB = 10 \text{ kN}$$

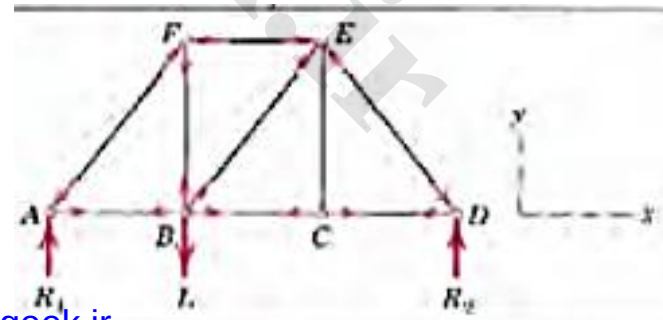
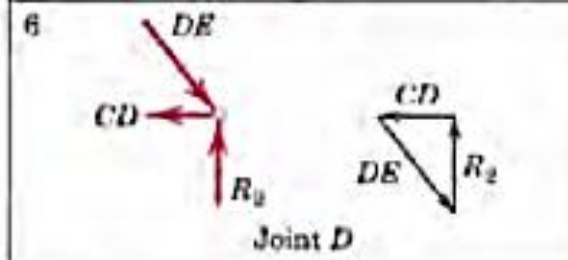
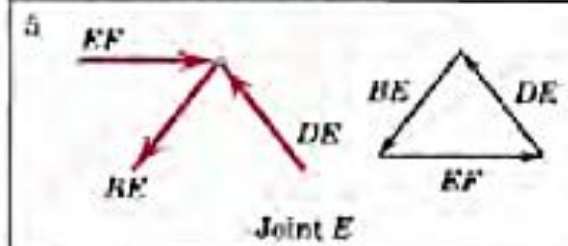
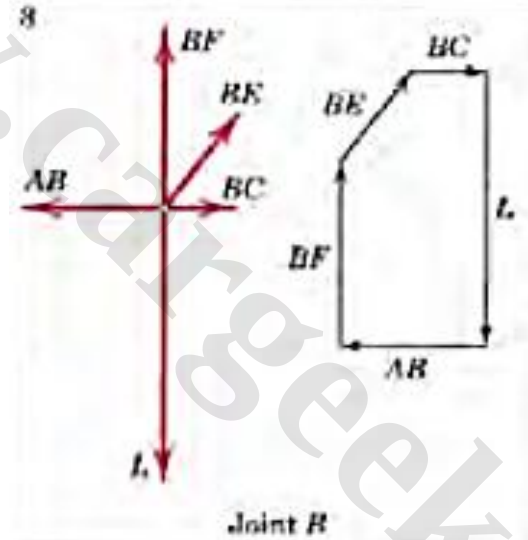
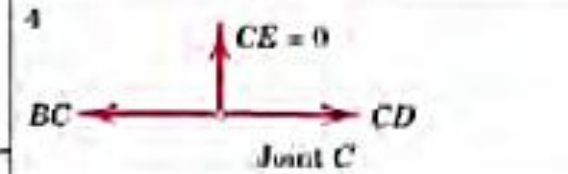
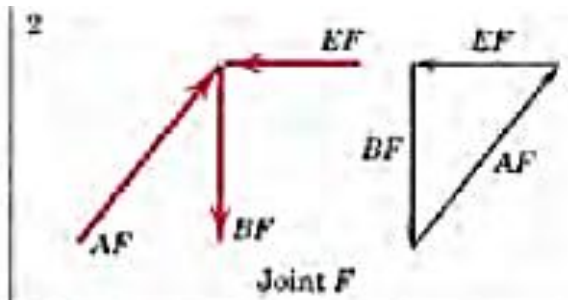
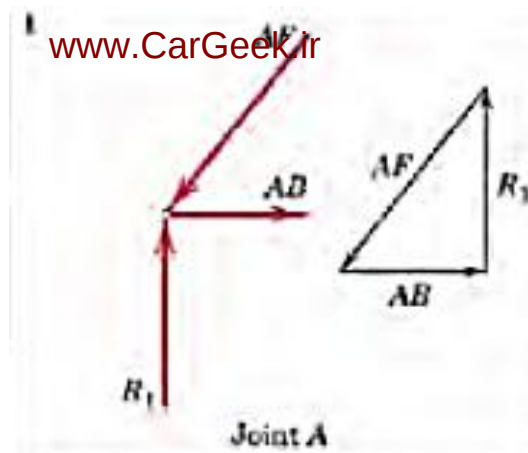
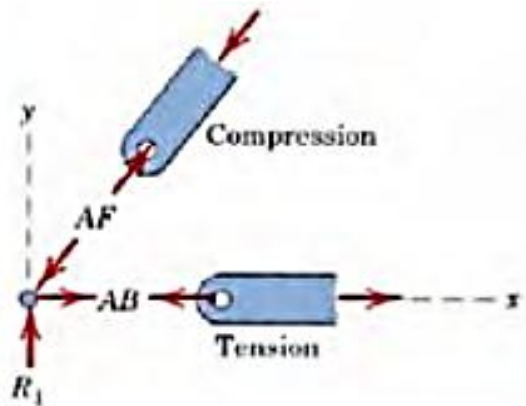
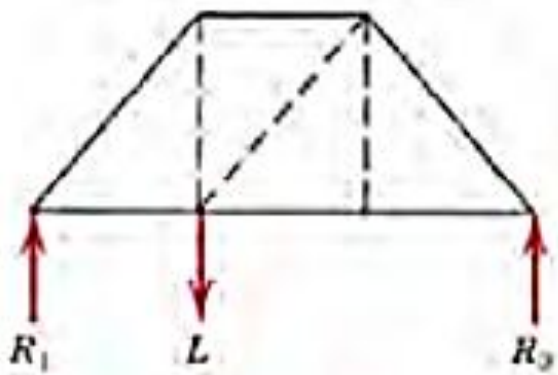
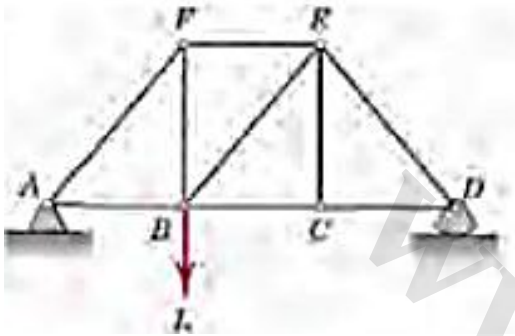
• Step 5: Joint B



$$BA \cos 45^\circ - 10 - BC \cos 45^\circ = 0$$

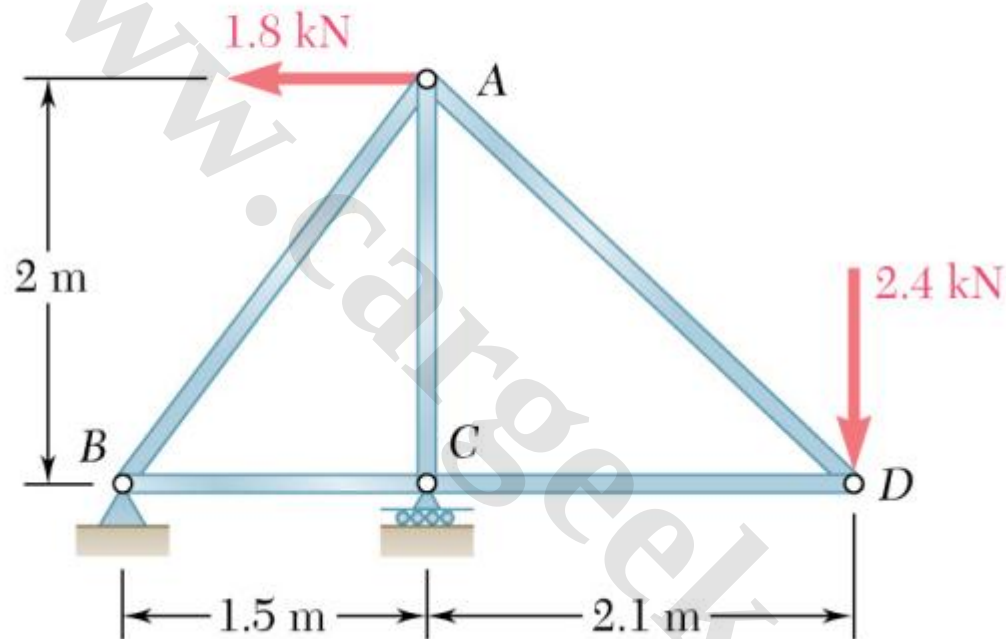
$$14.11 * 0.707 - 10 = BC \cos 45^\circ$$

$$BC = 0$$

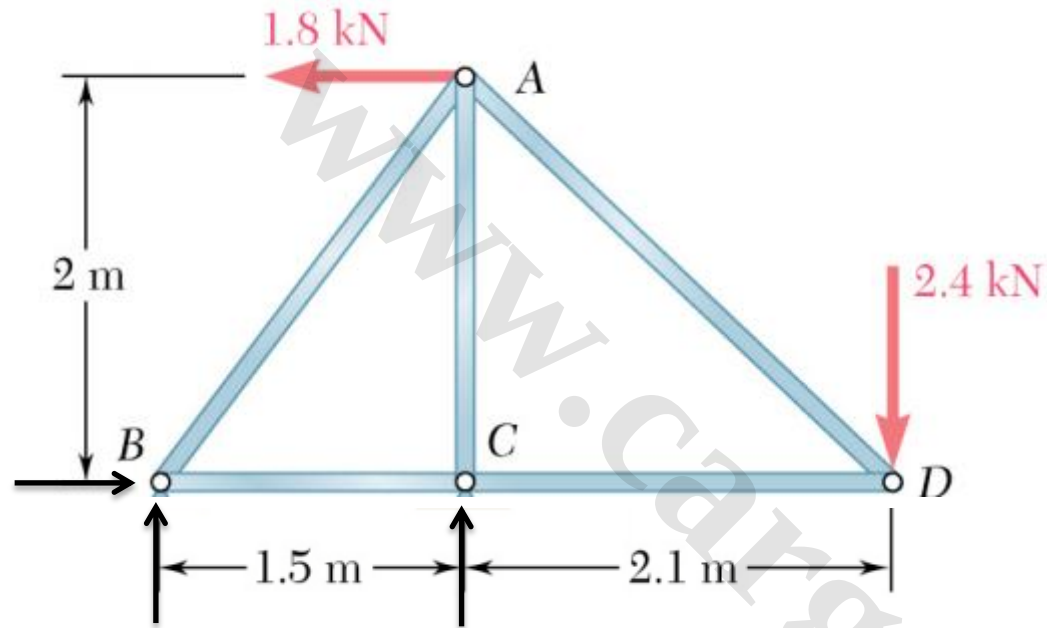


مثال ۴.

❖ با استفاده از روش مفاصل، نیروها در هر عضو از خرابای نشان داده شده را مشخص کنید. اعضاء تحت کشش و فشار را معین کنید.



مثال ۴.



$$C_y = 3.36$$

$$B_y = -0.96$$

$$B_x = 1.8$$

$$F_{ab} = 1.2 \text{ N}$$

$$\text{Alfa} = 53.13$$

$$F_{bc} = 2.52 \text{ N}$$

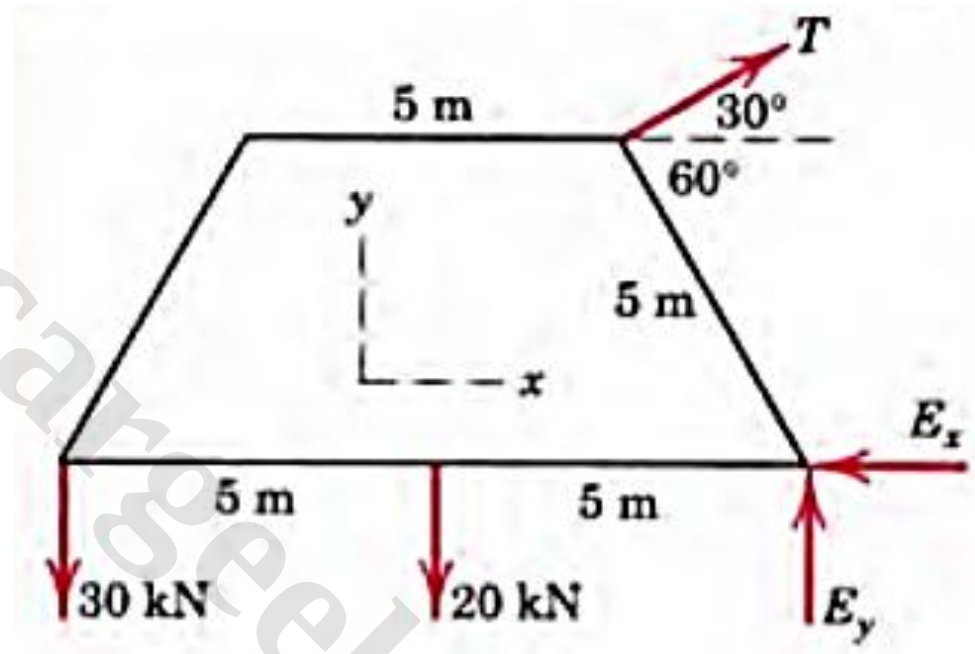
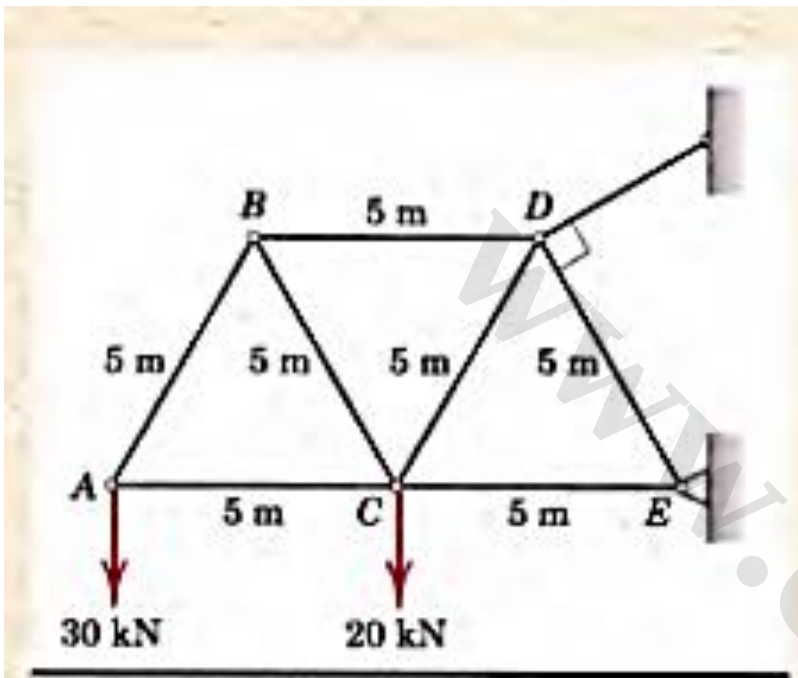
$$\text{Beta} = 43.6$$

$$F_{ad} = 3.48$$

$$F_{ac} = 3.36$$

$$F_{cd} = 2.52$$

مثال ۵.



$$[\Sigma M_E = 0]$$

$$5T - 20(5) - 30(10) = 0$$

$$T = 80 \text{ kN}$$

$$[\Sigma F_x = 0]$$

$$80 \cos 30^\circ - E_x = 0$$

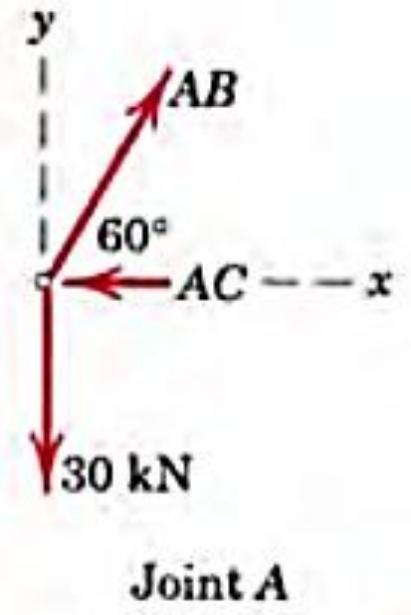
$$E_x = 69.3 \text{ kN}$$

$$[\Sigma F_y = 0]$$

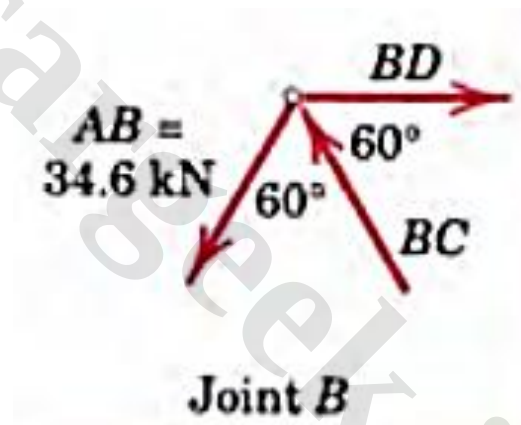
$$80 \sin 30^\circ + E_y - 20 - 30 = 0$$

$$E_y = 10 \text{ kN}$$

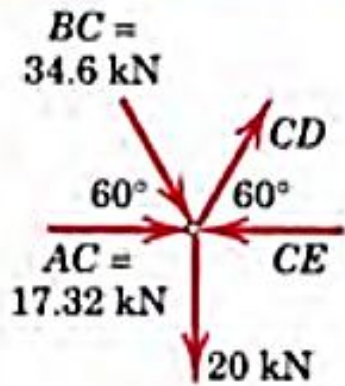
مثال ۵.



$$\begin{aligned}
 [\Sigma F_y = 0] \quad & 0.866AB - 30 = 0 \quad AB = 34.6 \text{ kN T} \\
 [\Sigma F_x = 0] \quad & AC - 0.5(34.6) = 0 \quad AC = 17.32 \text{ kN C}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 [\Sigma F_y = 0] \quad & 0.866BC - 0.866(34.6) = 0 \quad BC = 34.6 \text{ kN C} \\
 [\Sigma F_x = 0] \quad & BD - 2(0.5)(34.6) = 0 \quad BD = 34.6 \text{ kN T}
 \end{aligned}$$



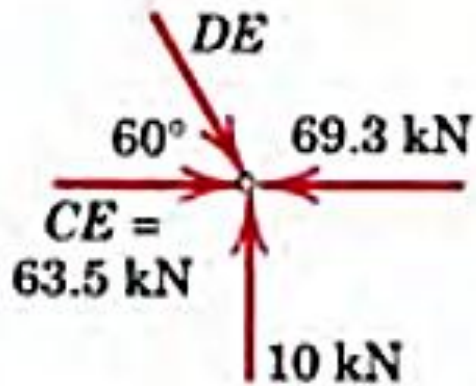
Joint C

$$[\Sigma F_y = 0] \quad 0.866CD - 0.866(34.6) - 20 = 0$$

$$CD = 57.7 \text{ kN } T$$

$$[\Sigma F_x = 0] \quad CE - 17.32 - 0.5(34.6) - 0.5(57.7) = 0$$

$$CE = 63.5 \text{ kN } C$$



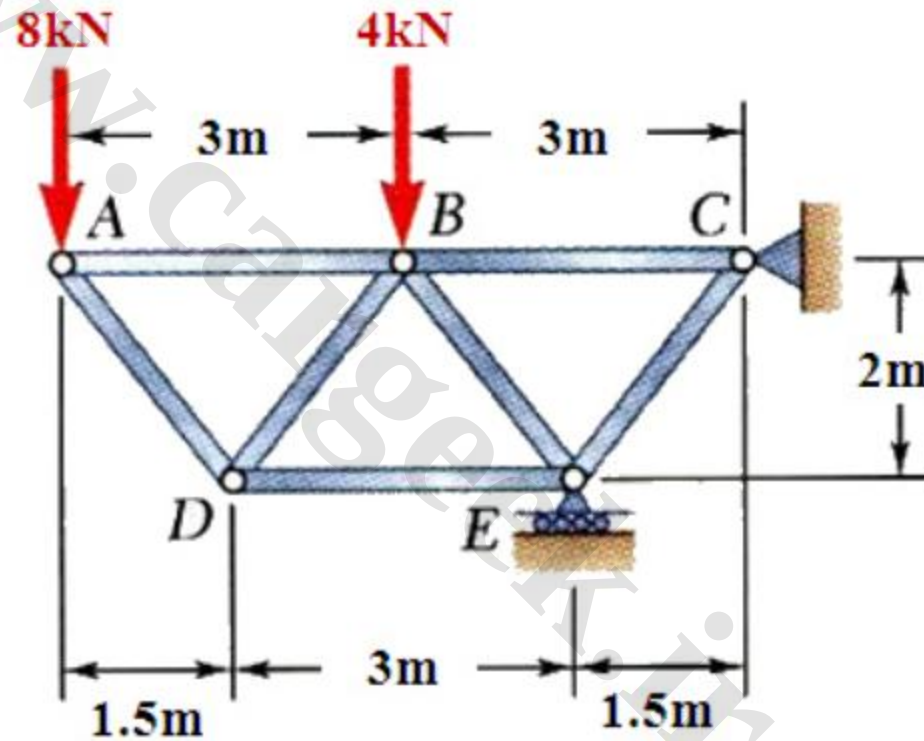
Joint E

$$[\Sigma F_y = 0] \quad 0.866DE = 10 \quad DE = 11.55 \text{ kN } C$$

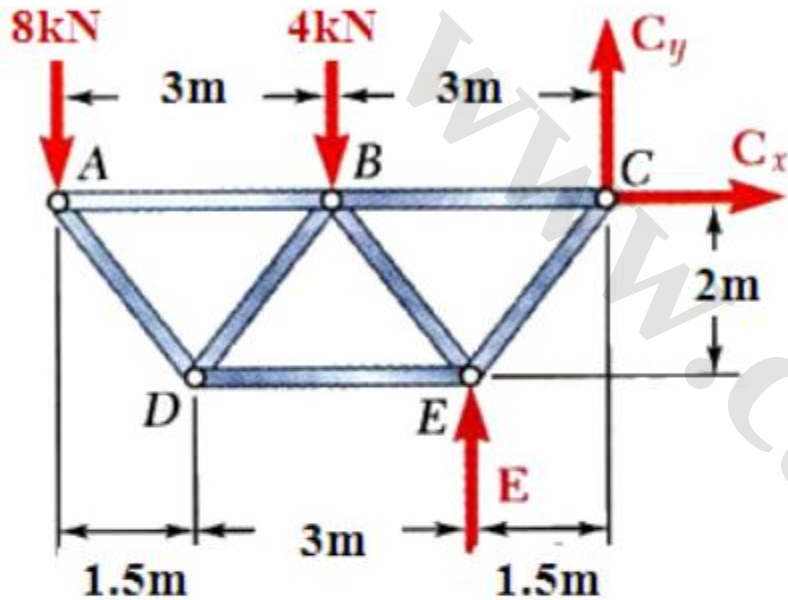
and the equation $\Sigma F_x = 0$ checks.

مثال ۶.

❖ با استفاده از روش مفصلها، نیرو در هر عضو خربای نشان داده شده را تعیین کنید.



مثال ۶.



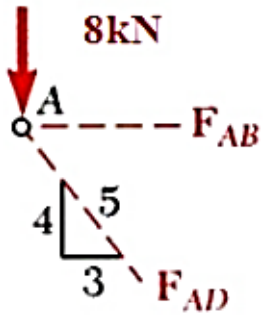
□ برپایه نمودار جسم آزاد کل خرابا، نیروهای خارجی شامل بارهای وارد شده و عکس العملها در C و E میباشد.

$$\sum M_C = (8kN)(6m) + (4kN)(3) - E(1.5m) = 0 \Rightarrow E = 40kN \uparrow$$

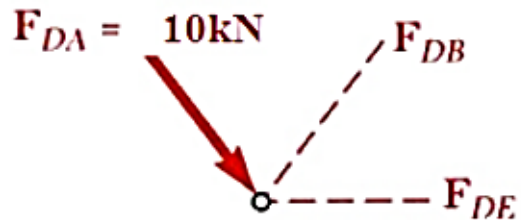
$$\sum F_x = 0 = C_x$$

$$\sum F_y = 0 = -8kN - 4kN + 40kN + C_y \Rightarrow C_y = 28kN \downarrow$$

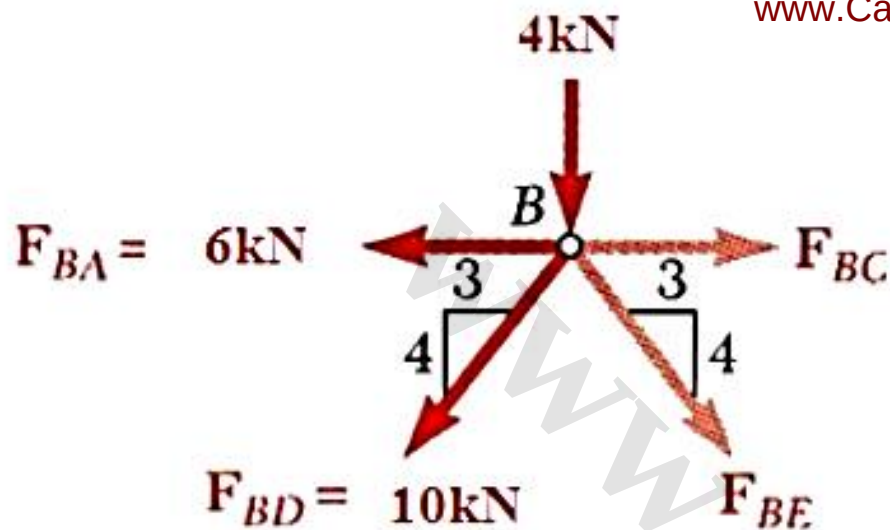
مثال ۷.



$$F_{ab} = 6 \text{ t}$$



$$F_{ad} = 10 \text{ c}$$



$$\sum F_y = 0 = -4\text{kN} - \frac{4}{5}(10\text{kN}) - \frac{4}{5}F_{BE}$$

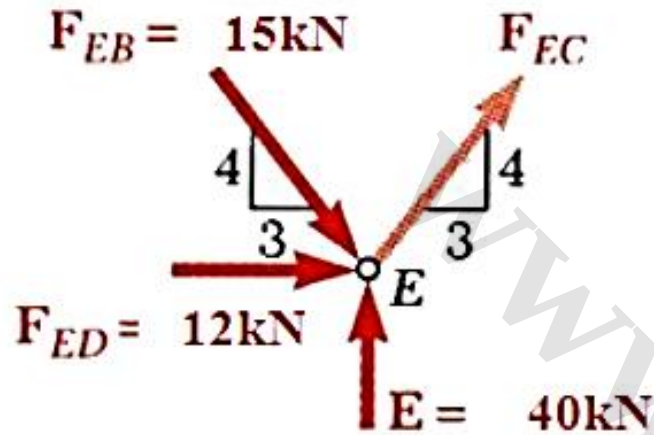
$$F_{BE} = -15\text{kN}$$

$$F_{BE} = 15\text{kN } C$$

$$\sum F_x = 0 = F_{BC} - 6\text{kN} - \frac{3}{5}(10\text{kN}) - \frac{3}{5}(15\text{kN})$$

$$F_{BC} = +21\text{kN}$$

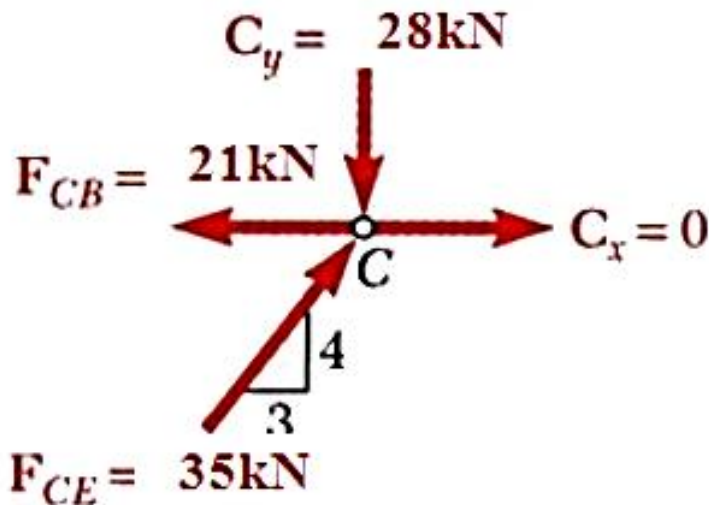
$$F_{BC} = 21\text{kN } T$$



$$\sum F_x = 0 = \frac{3}{5} F_{EC} + 12kN + \frac{3}{5} (15kN)$$

$$F_{EC} = -35kN$$

$$F_{EC} = 35kN \text{ C}$$

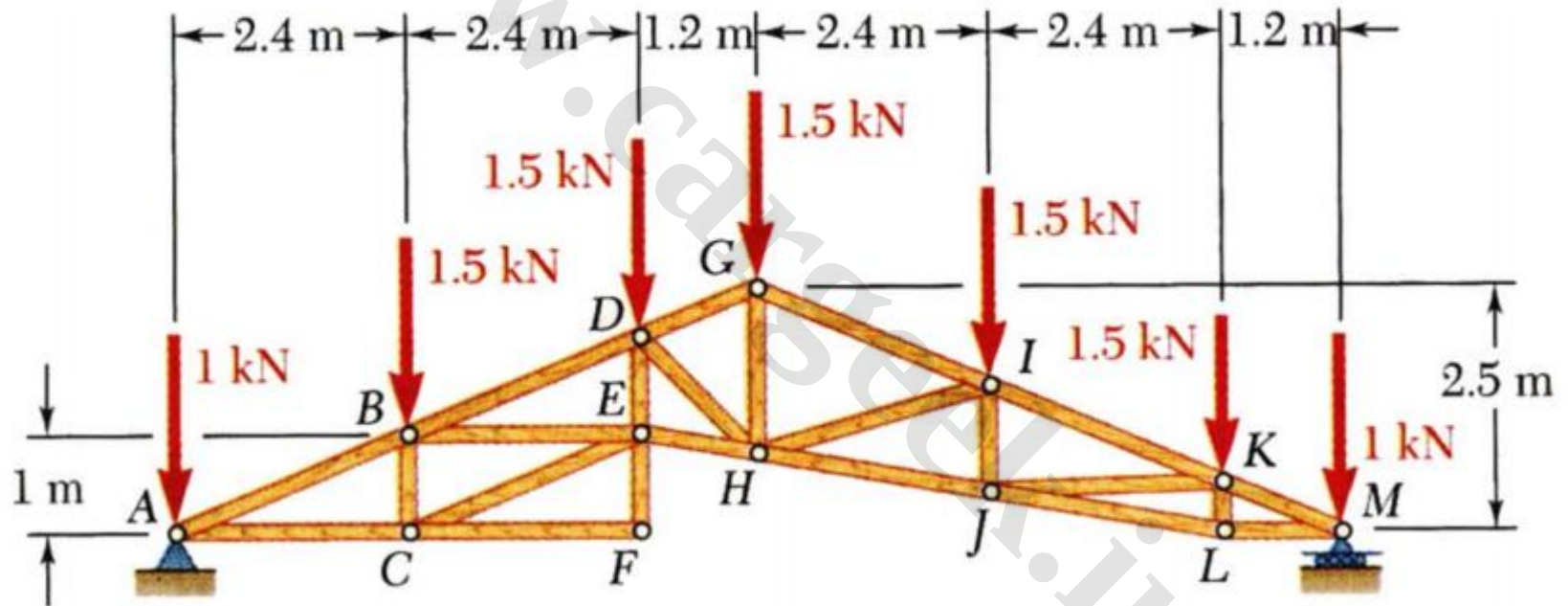


$$\sum F_x = -5250 + \frac{3}{5} (8750) = 0 \quad (checks)$$

$$\sum F_y = -7000 + \frac{4}{5} (8750) = 0 \quad (checks)$$

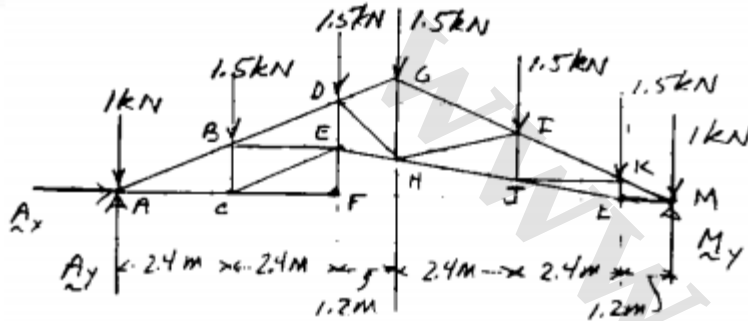
تمرین ۱.

❖ با استفاده از روش مفاصل، نیروها در هر یک از اعضای سمت چپ عضو GH از خرابای نشان داده شده را محاسبه و اعضاء تحت کشش و فشار را مشخص کنید.



تمرین ۱.

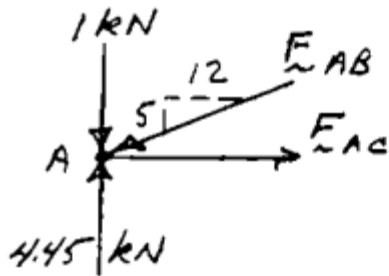
➤ با استفاده از دیاگرام آزاد کل خرپا داریم:



$$\rightarrow \sum F_x = 0: A_x = 0$$

$$\sum M_A = 0: (12 \text{ m})(M_y - 1 \text{ kN}) - (2.4 \text{ m} + 4.8 \text{ m} + 6 \text{ m} + 8.4 \text{ m} + 10.8 \text{ m})(1.5 \text{ kN}) = 0 \Rightarrow M_y = 5.05 \text{ kN} \uparrow$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0: A_y - 2(1 \text{ kN}) - 5(1.5 \text{ kN}) + M_y = 0 \Rightarrow A_y = 4.45 \text{ kN} \uparrow$$



➤ برای مفصل A

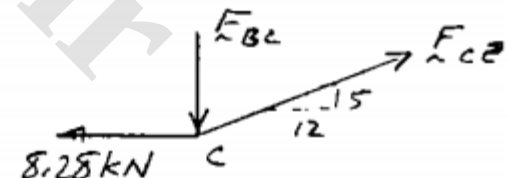
$$+\uparrow \sum F_y = 0: 4.45 \text{ kN} - 1 \text{ kN} - \frac{5}{13} F_{AB} = 0 \Rightarrow F_{AB} = 8.97 \text{ kN} \text{ C} \blacktriangleleft$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0: F_{AC} - \frac{12}{13} (8.97 \text{ kN}) = 0 \Rightarrow F_{AC} = 8.28 \text{ kN} \text{ T} \blacktriangleleft$$

➤ برای مفصل C

$$\rightarrow \sum F_x = 0: \frac{12}{13} F_{CE} - 8.28 \text{ kN} = 0 \Rightarrow F_{CE} = 8.97 \text{ kN} \text{ T} \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0: \frac{5}{13} (8.97 \text{ kN}) - F_{BC} = 0 \Rightarrow F_{BC} = 3.45 \text{ kN} \text{ C} \blacktriangleleft$$

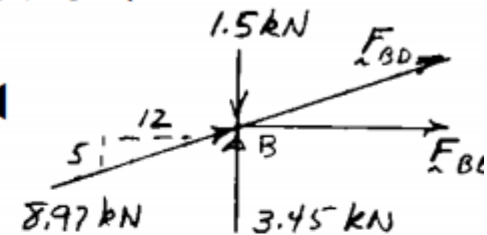


تمرین ۱.

➤ برای مفصل B

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \frac{5}{13}(8.97 \text{ kN}) - 1.5 \text{ kN} + 3.45 \text{ kN} - \frac{5}{13}F_{BD} = 0 \Rightarrow F_{BD} = 14.04 \text{ kN } C \blacktriangleleft$$

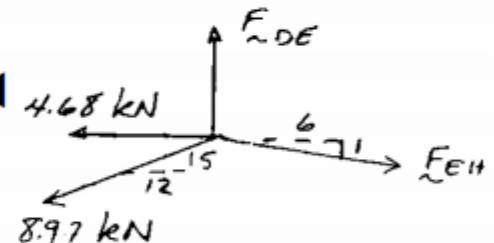
$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0: \frac{12}{13}(8.97 \text{ kN}) - \frac{12}{13}(14.04 \text{ kN}) + F_{BE} = 0 \Rightarrow F_{BE} = 4.68 \text{ kN } T \blacktriangleleft$$



➤ برای مفصل E

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0: \frac{6}{\sqrt{37}}F_{EH} - 4.68 \text{ kN} - \frac{12}{13}(8.97 \text{ kN}) = 0 \Rightarrow F_{EH} = 13.14 \text{ kN } T \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: F_{DE} - \frac{5}{13}(8.97 \text{ kN}) - \frac{1}{\sqrt{37}}(13.1388) = 0 \Rightarrow F_{DE} = 5.61 \text{ kN } T \blacktriangleleft$$

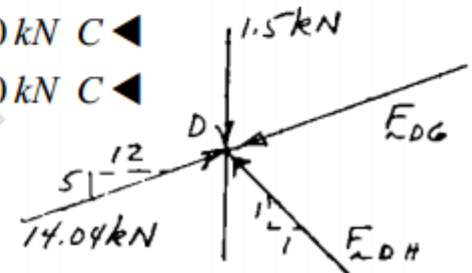


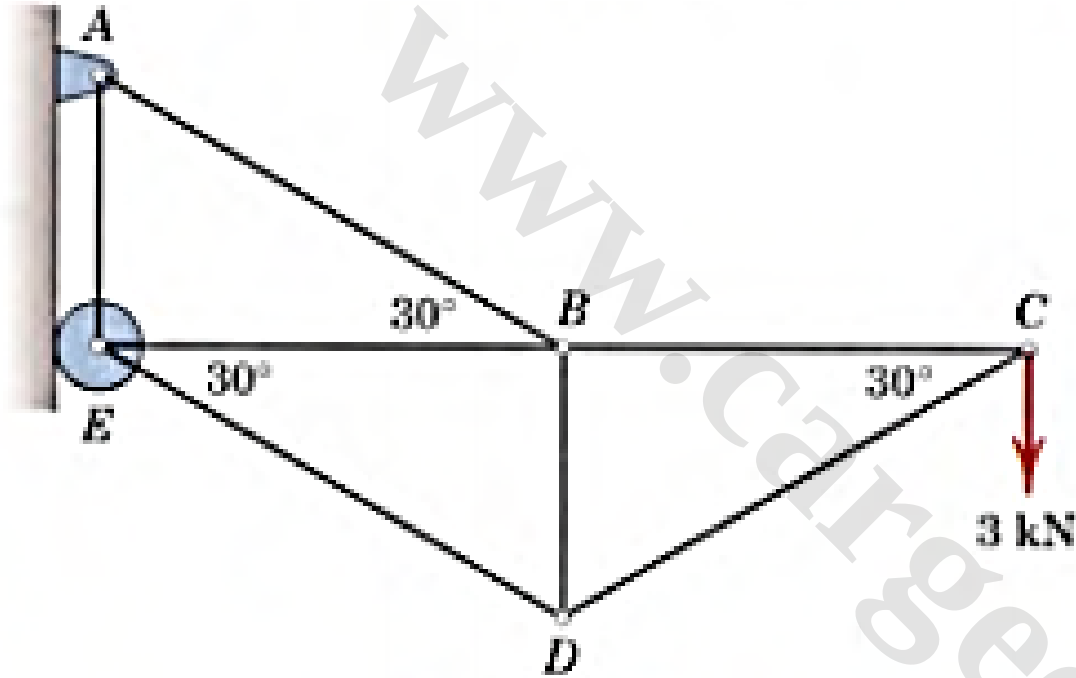
➤ برای مفصل D

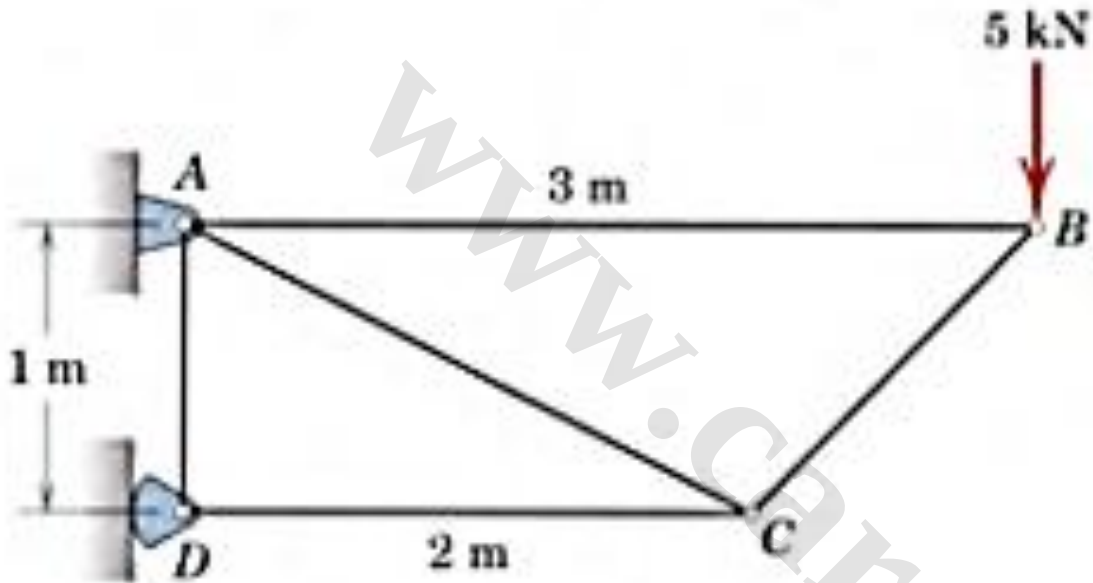
$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0: \frac{12}{13}(14.04 \text{ kN}) - \frac{12}{13}F_{DG} - \frac{1}{\sqrt{2}}F_{DH} = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \frac{5}{13}(14.04 \text{ kN}) - \frac{5}{13}F_{DG} - 1.5 \text{ kN} - 5.61 \text{ kN} + \frac{1}{\sqrt{2}}F_{DH} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_{DH} = 7.10 \text{ kN } C \blacktriangleleft \\ F_{DH} = 7.10 \text{ kN } C \blacktriangleleft \end{cases}$$

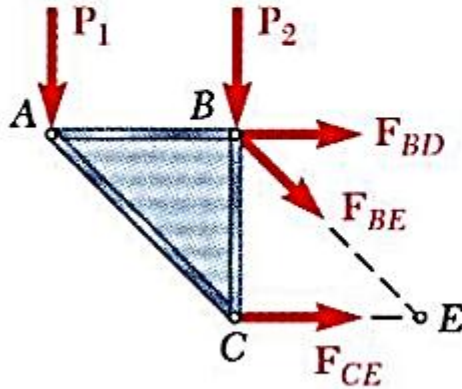
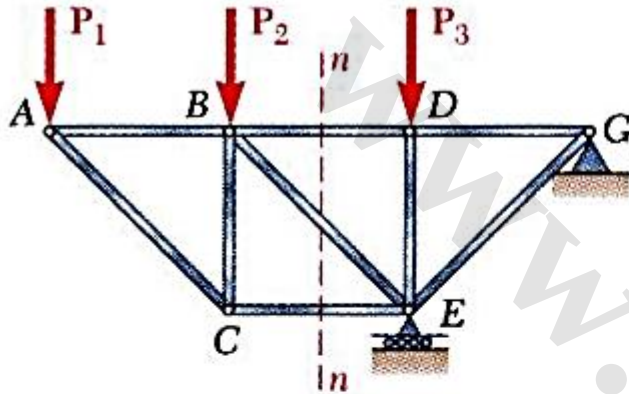




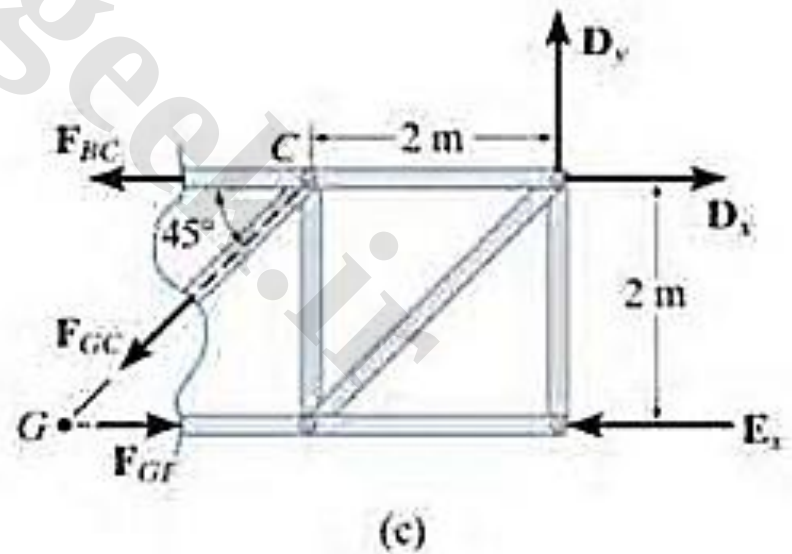
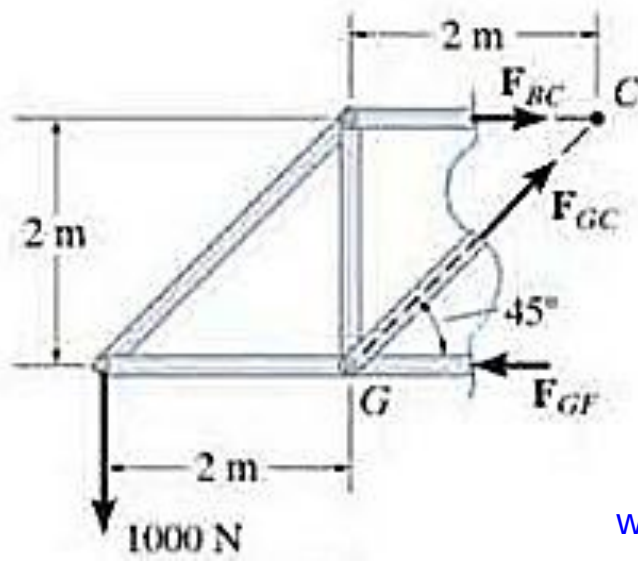
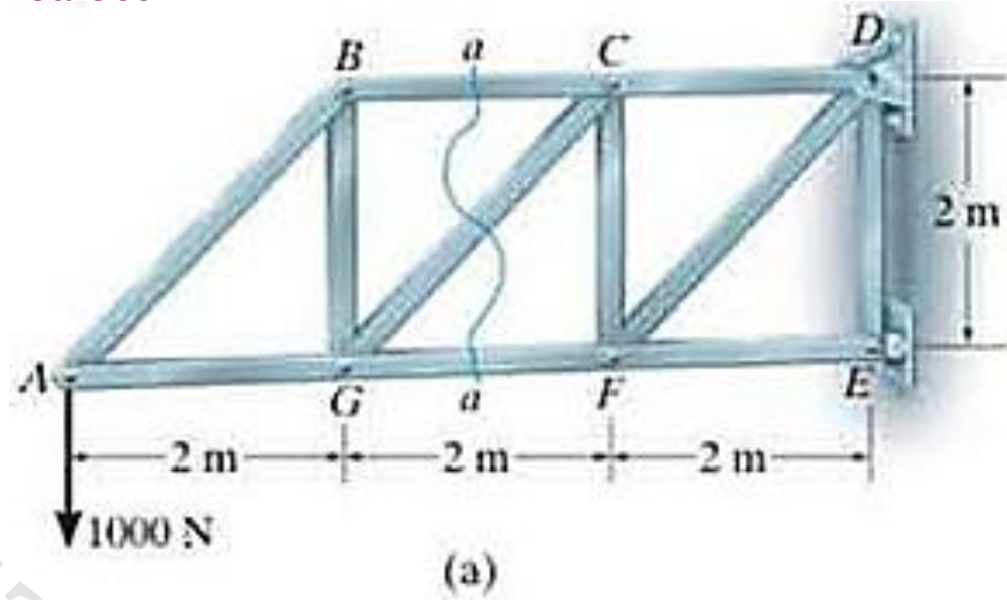
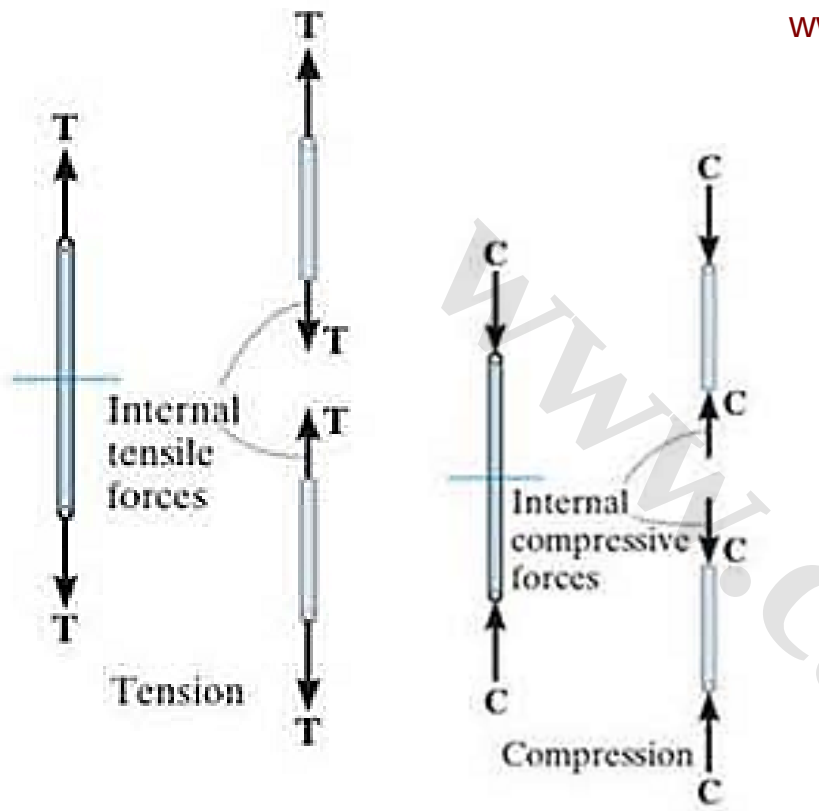


وقتی جسمی در تعادل است آنگاه هر قسمت از آن جسم نیز در تعادل خواهد بود.

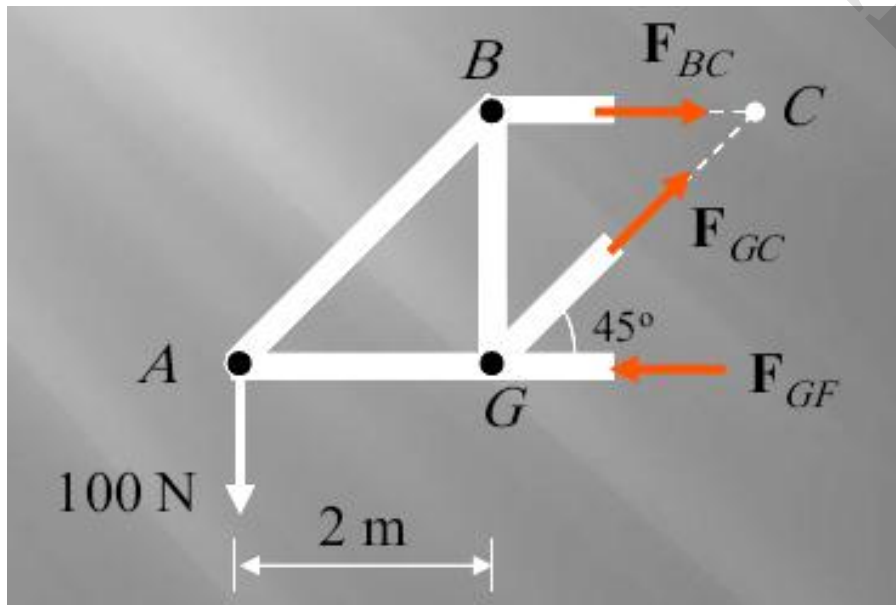
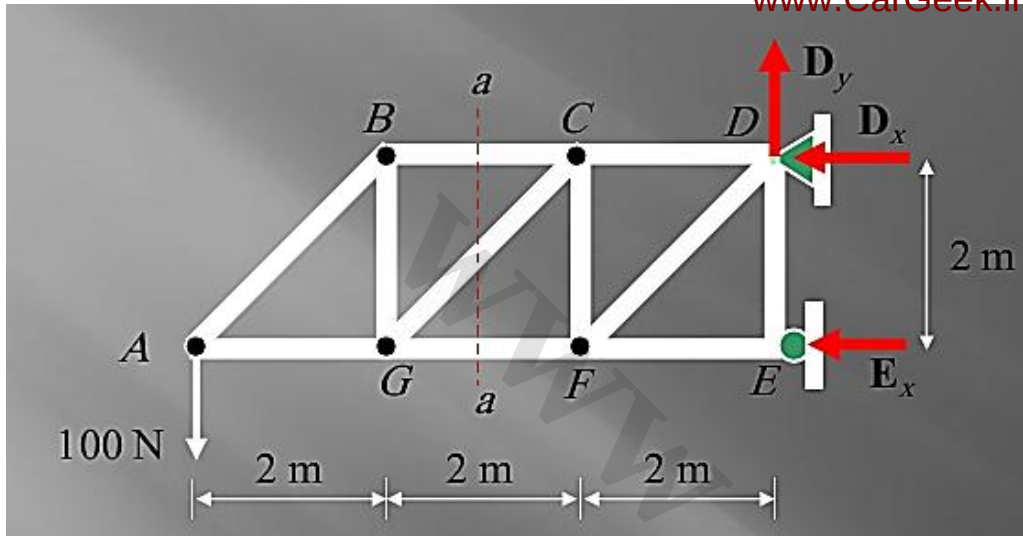
تحلیل خریا به روش مقاطع



- زمانی که بخواهیم نیرو را تنها در یک عضو یا اعضاء محدود مورد بررسی قرار دهیم از روش مقاطع استفاده میکنیم.
- مثلاً برای مشخص کردن نیرو در عضو BD از شکل مقابل، مقطعی از آن میگذرانیم بشرطی که عضو مورد نظر و دو عضو دیگر را قطع کند (تذکر: حداکثر باید ۳ عضو که میخواهیم نیروهای داخلی‌شان را مشخص کنیم و مجهولند را با یک برش مقطع میزنیم) و حال خریا به دو قسمت تقسیم میشود که هر قسمت را به عنوان جسم آزاد میتوان در نظر گرفت.
- با کمک معادلات تعادل استاتیکی نیرو در هر عضو مورد نظر مشخص میشود.



مثال ۱.



$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = 0:$$

$$100(2) - F_{BC}(2) = 0$$

$$F_{BC} = 100 \text{ N (T)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0:$$

$$-100 + F_{GC} \sin 45^\circ = 0$$

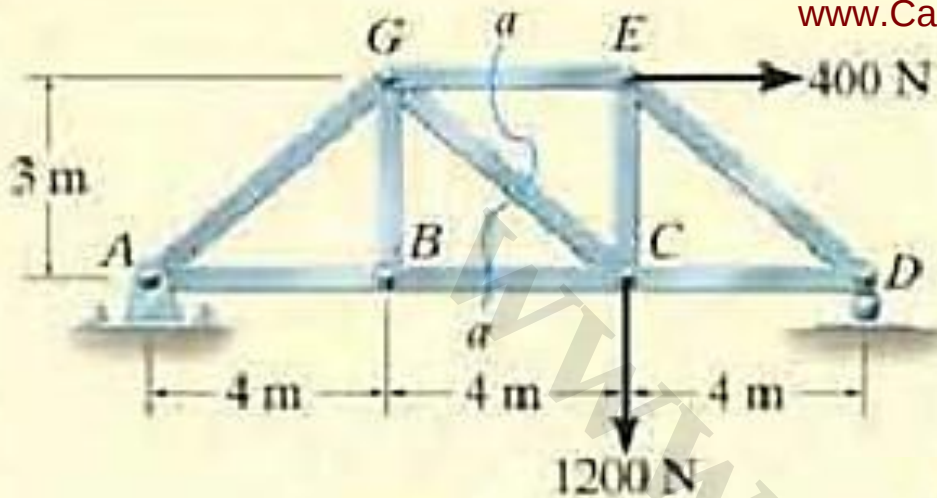
$$F_{GC} = 141.42 \text{ N (T)}$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_C = 0:$$

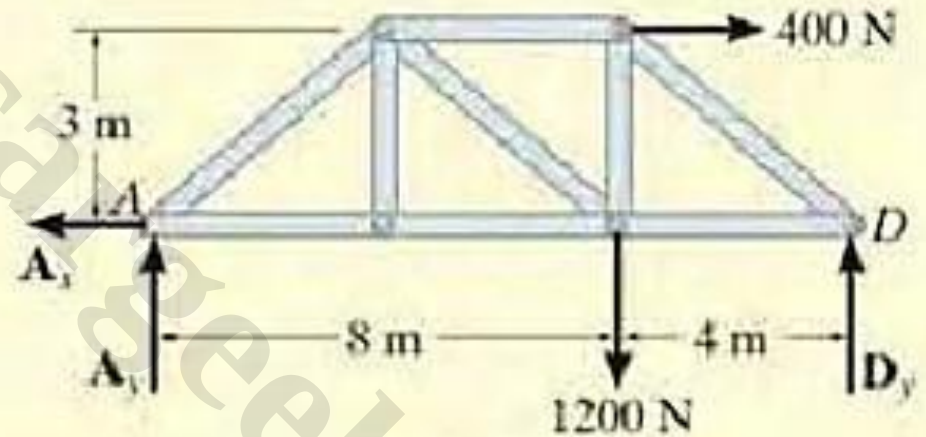
$$100(4) - F_{GF}(2) = 0$$

$$F_{GF} = 200 \text{ N (C)}$$

مثال ۲.



(a)



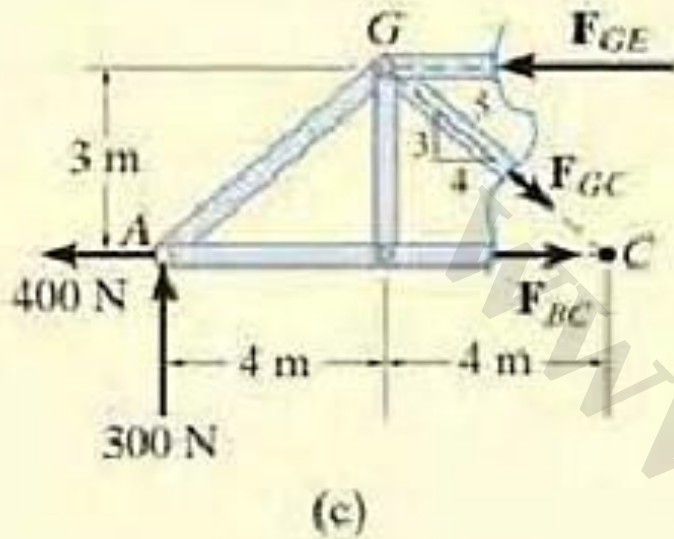
(b)

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 400 \text{ N} - A_x = 0 \quad A_x = 400 \text{ N}$$

$$\zeta + \Sigma M_A = 0; \quad -1200 \text{ N}(8 \text{ m}) - 400 \text{ N}(3 \text{ m}) + D_y(12 \text{ m}) = 0$$

$$D_y = 900 \text{ N}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad A_y - 1200 \text{ N} + 900 \text{ N} = 0 \quad A_y = 300 \text{ N}$$



$$\zeta + \Sigma M_G = 0; \quad -300 \text{ N}(4 \text{ m}) - 400 \text{ N}(3 \text{ m}) + F_{BC}(3 \text{ m}) = 0$$

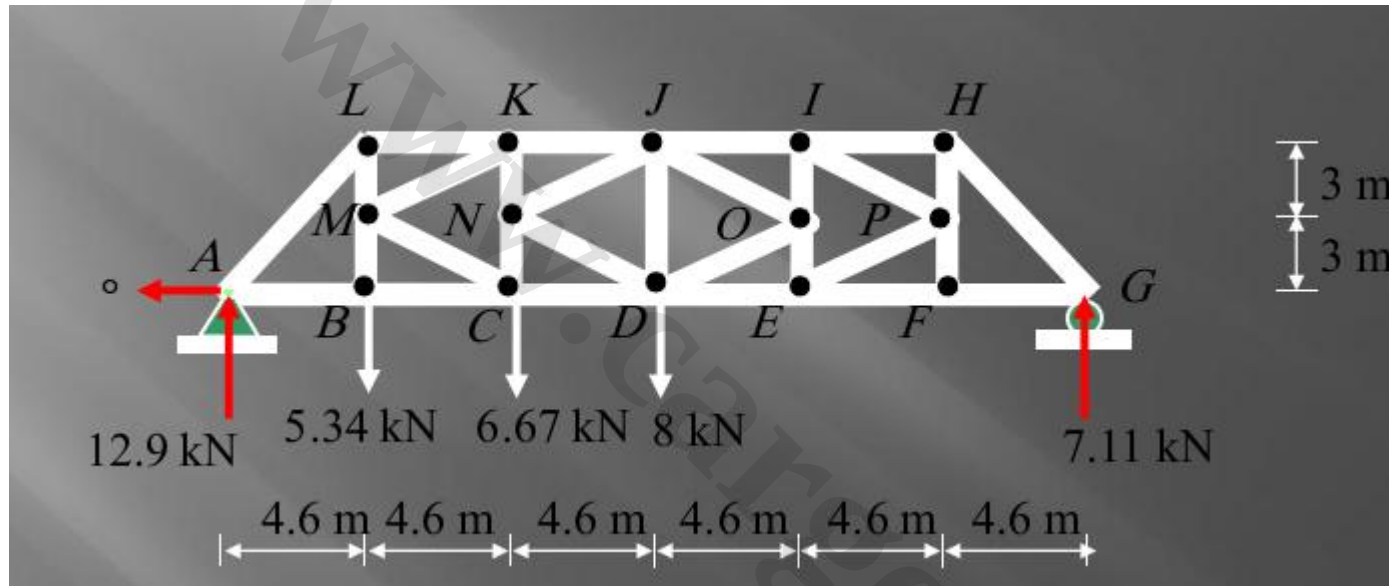
$$F_{BC} = 800 \text{ N} \quad (\text{T}) \quad \text{Ans.}$$

$$\zeta + \Sigma M_C = 0; \quad -300 \text{ N}(8 \text{ m}) + F_{GE}(3 \text{ m}) = 0$$

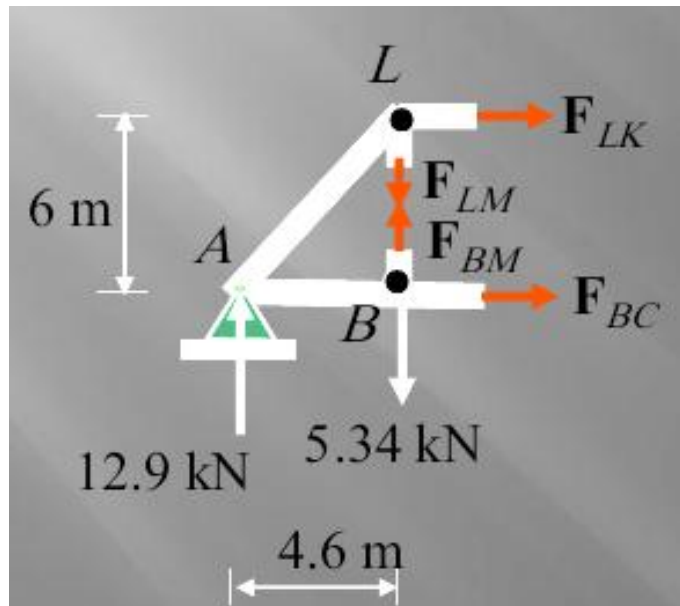
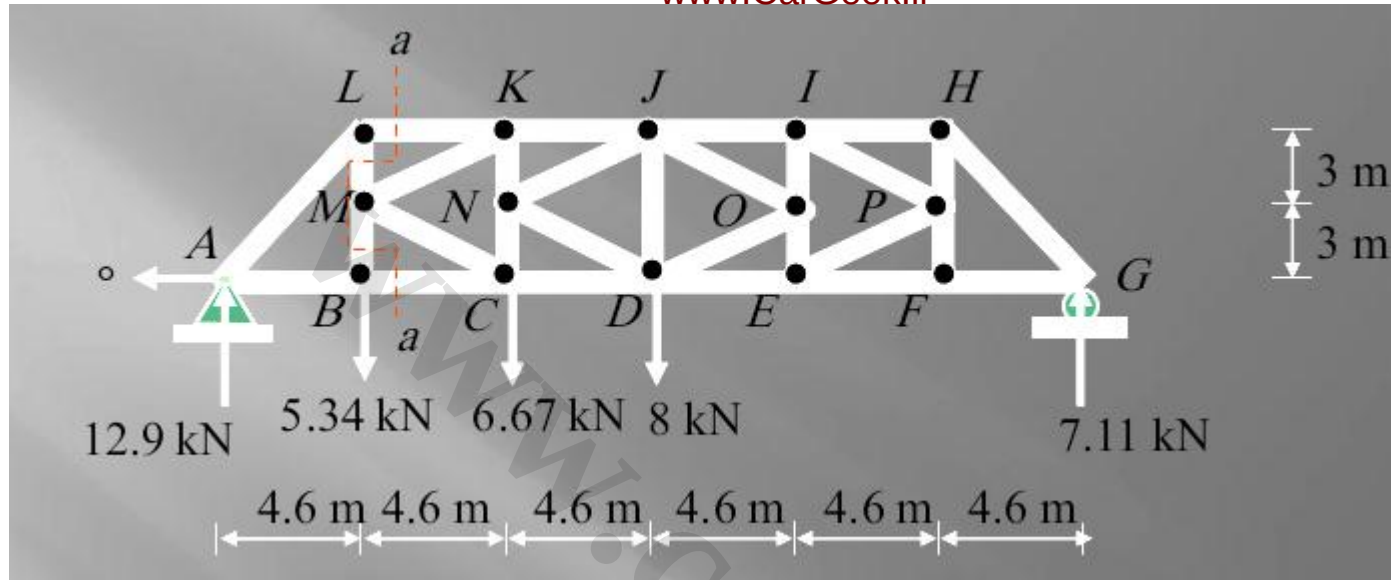
$$F_{GE} = 800 \text{ N} \quad (\text{C})$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 300 \text{ N} - \frac{3}{5} F_{GC} = 0$$

$$F_{GC} = 500 \text{ N} \quad (\text{T})$$



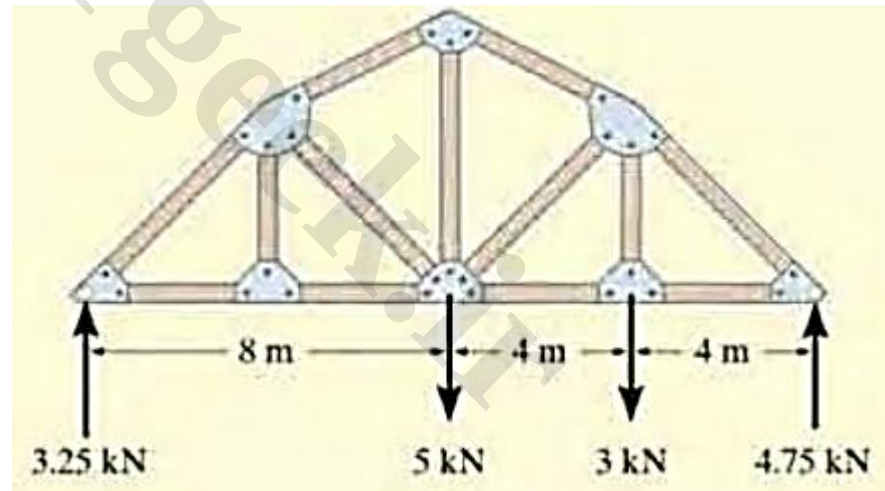
مثال ۳.

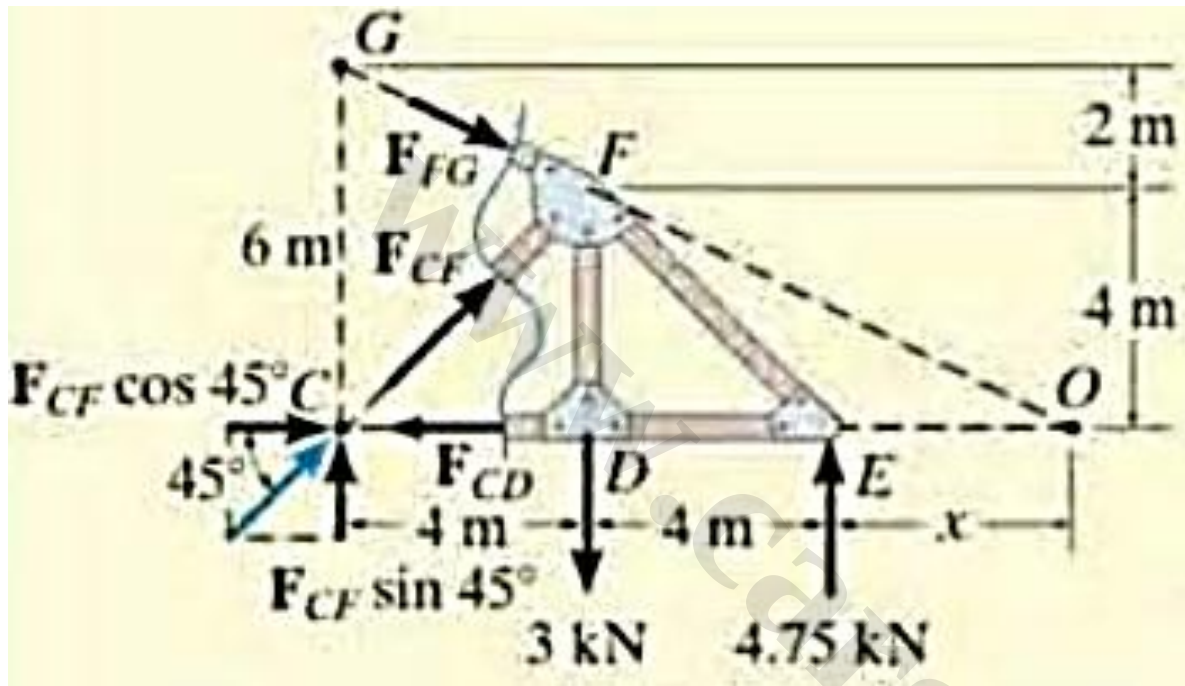


$$+\circlearrowleft \Sigma M_L = 0:$$

$$F_{BC}(6) - 12.9(4.6) = 0,$$

$$F_{BC} = 9.89 \text{ kN (T)}$$





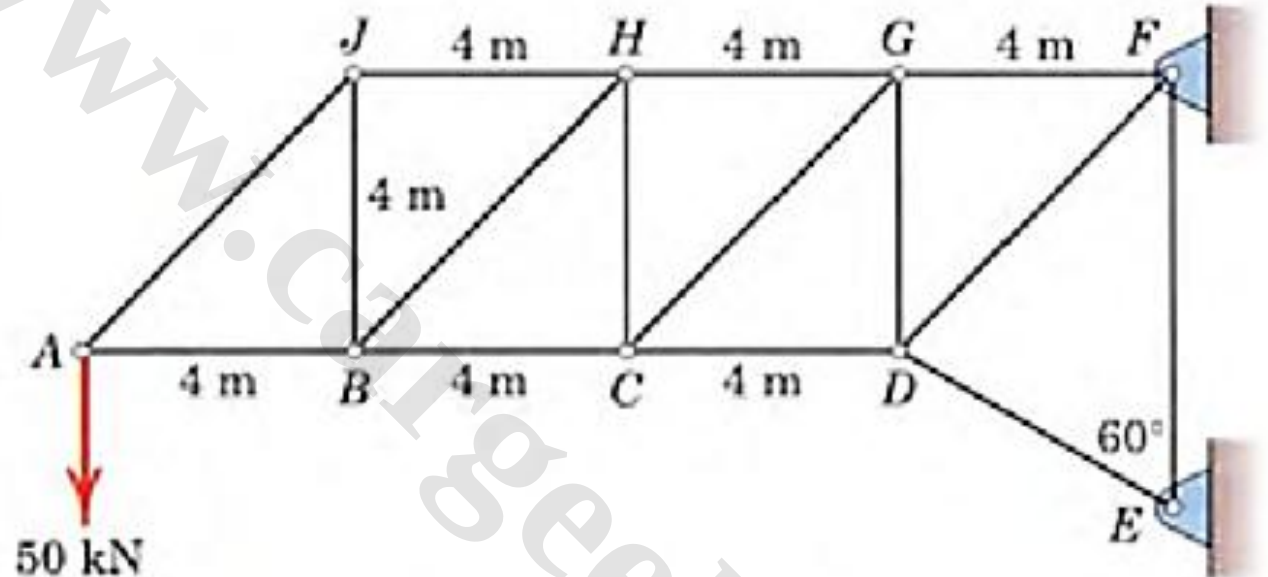
$$\frac{4}{4 + x} = \frac{6}{8 + x}, \quad x = 4 \text{ m.}$$

$$\zeta + \sum M_O = 0;$$

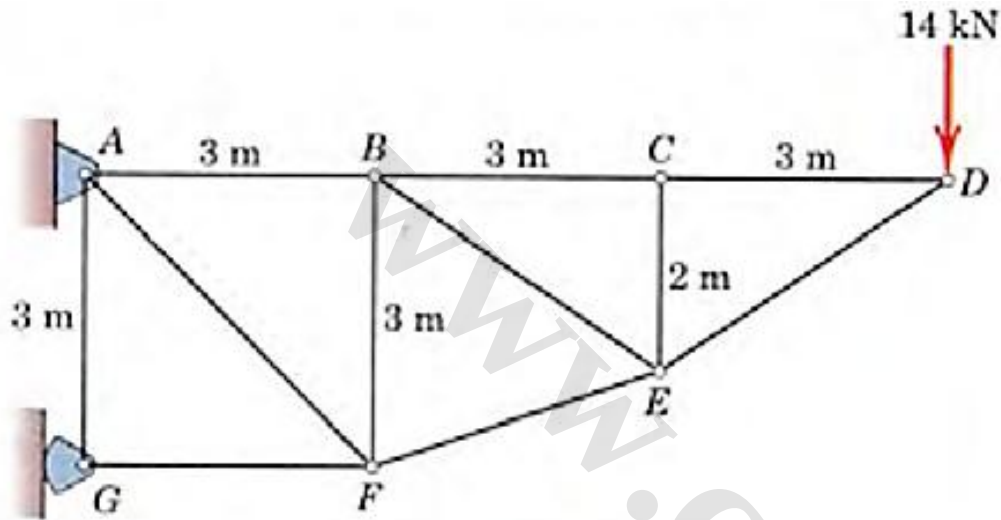
$$-F_{CF} \sin 45^\circ (12 \text{ m}) + (3 \text{ kN})(8 \text{ m}) - (4.75 \text{ kN})(4 \text{ m}) = 0$$

$$F_{CF} = 0.589 \text{ kN} \quad (\text{C})$$

Ans.



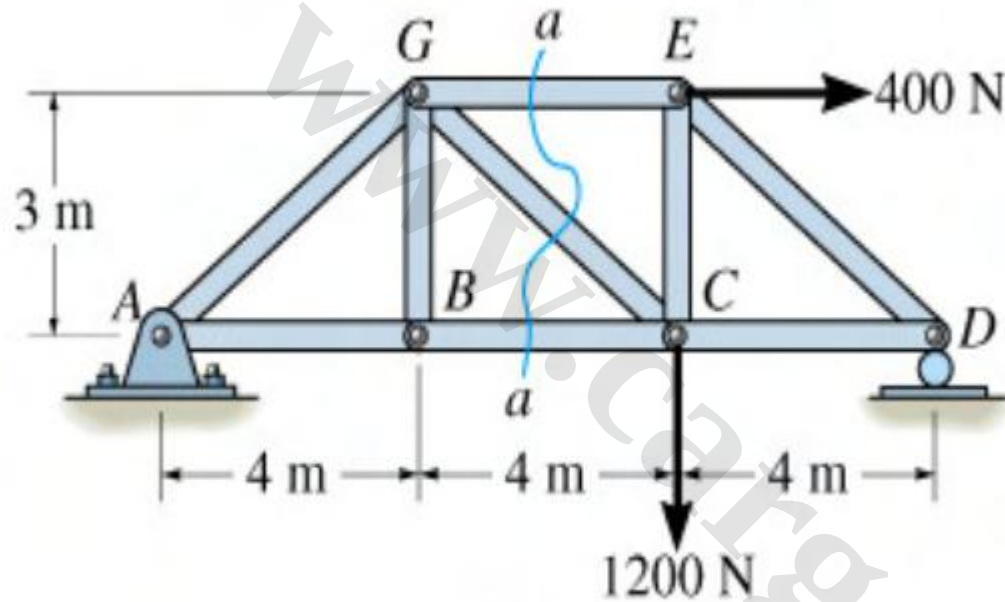
$$CG = 70.7 \text{ kN T}, GH = 100 \text{ kN T}$$



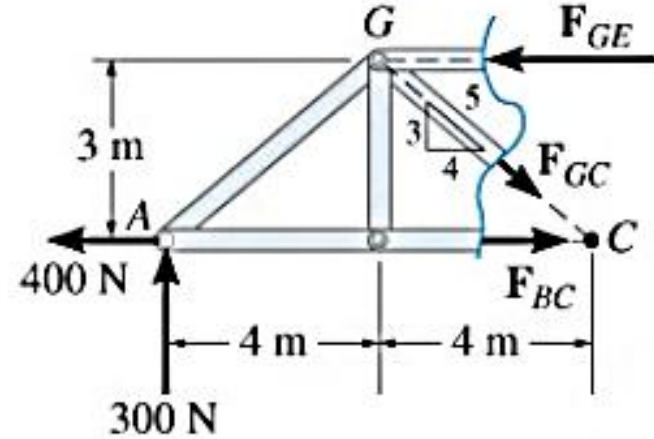
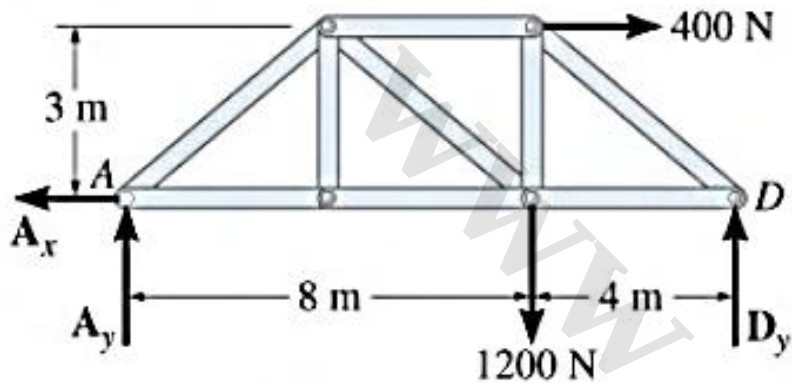
Ans. $BC = 21 \text{ kN } T$, $BE = 8.41 \text{ kN } T$
 $EF = 29.5 \text{ kN } C$

Another Example: Find F_{GC} F_{GE} F_{GC}

مثال ۹.



(a)



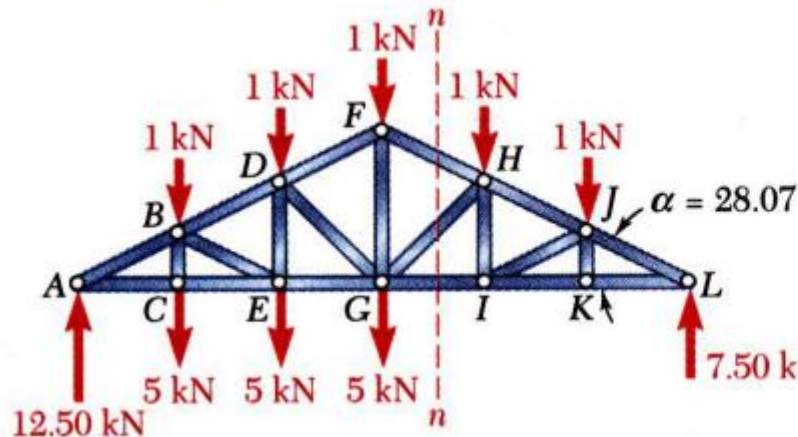
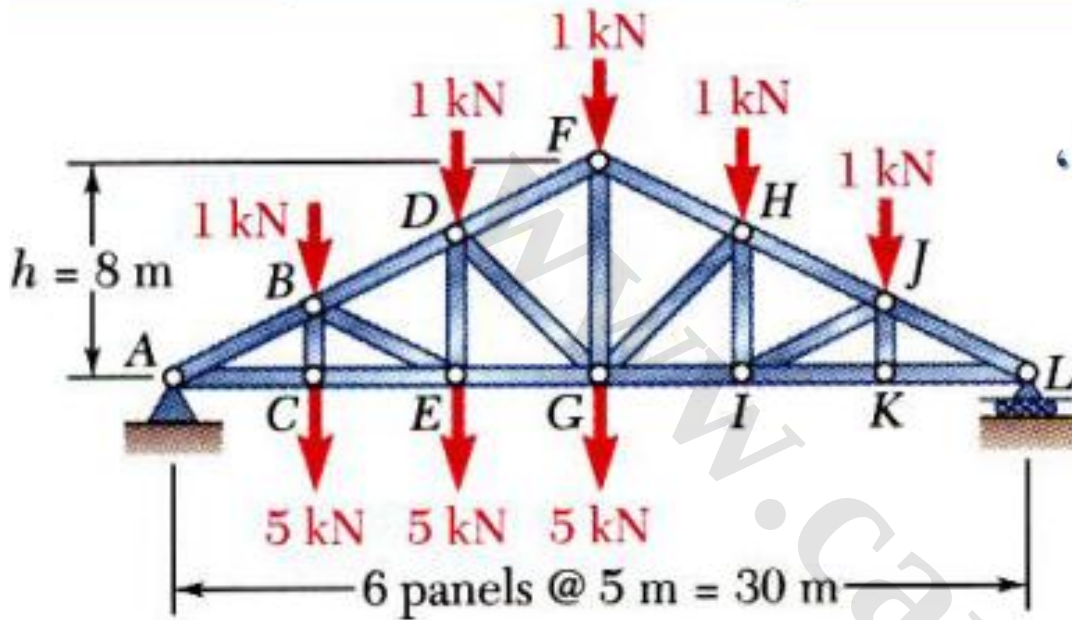
$$\sum M_C = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GE} = 800$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{GC} = 500$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{BC} = 800$$

تمرین ۱.

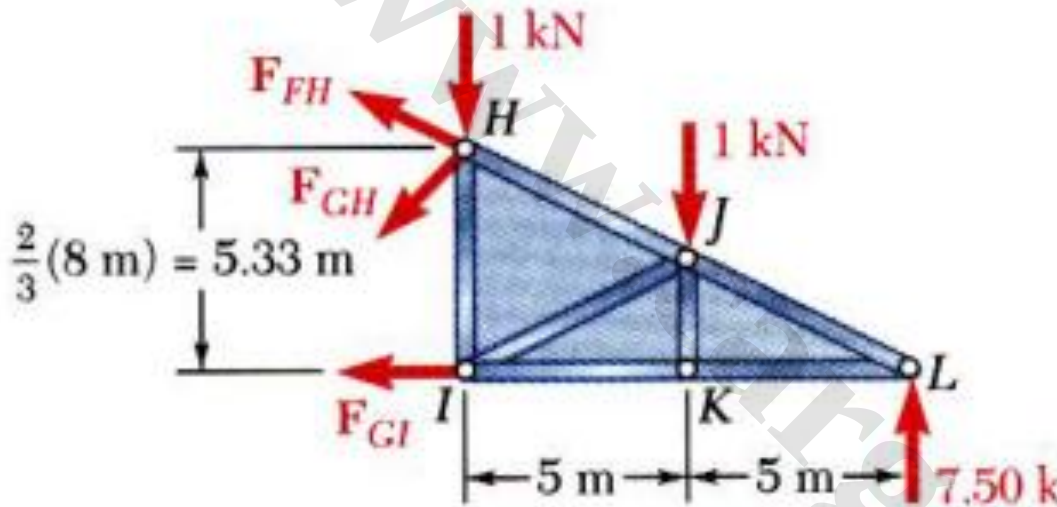
با استفاده از روش مقاطع، نیروها در هر اعضاء FH،
GI و GH را مشخص کنید.



$$\begin{aligned}\sum M_A &= 0 \\ &= -(5\text{ m})(6\text{ kN}) - (10\text{ m})(6\text{ kN}) - (15\text{ m})(6\text{ kN}) \\ &\quad - (20\text{ m})(1\text{ kN}) - (25\text{ m})(1\text{ kN}) + (25\text{ m})L \\ L &= 7.5\text{ kN} \uparrow \\ \sum F_y &= 0 = -20\text{ kN} + L + A \\ A &= 12.5\text{ kN} \uparrow\end{aligned}$$

تمرین ۱.

□ نیرو در عضو GI. با استفاده از قسمت HLI خرابا به عنوان جسم آزاد، مقدار FGI با نوشتن رابطه زیر بدست می آید.

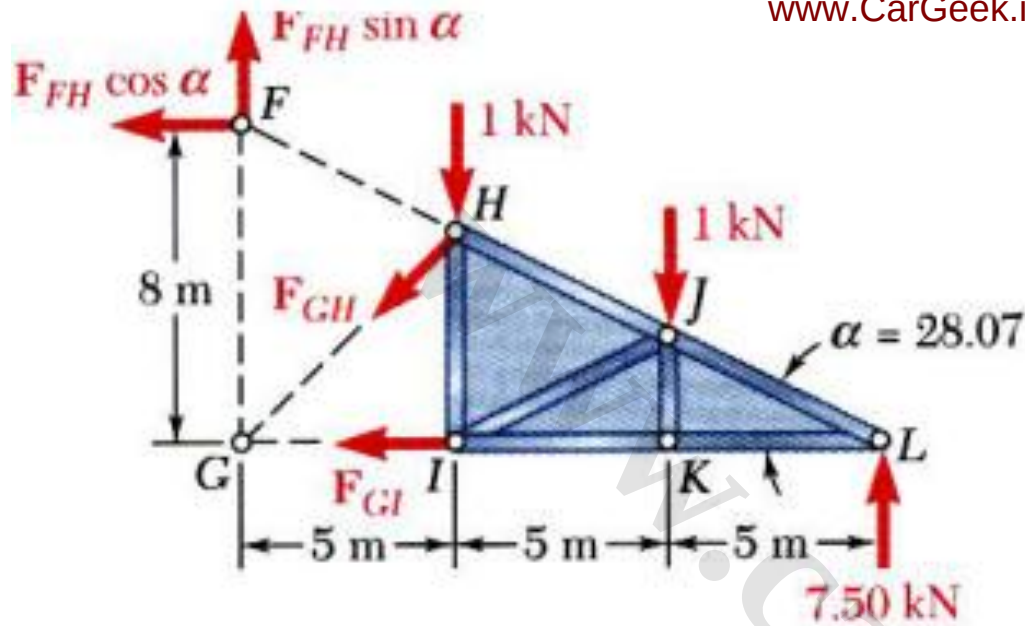


$$\sum M_H = 0$$

$$(7.50 \text{ kN})(10 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) - F_{GI}(5.33 \text{ m}) = 0$$

$$F_{GI} = +13.13 \text{ kN}$$

$$F_{GI} = 13.13 \text{ kN } T$$



$$\tan \alpha = \frac{FG}{GL} = \frac{8 \text{ m}}{15 \text{ m}} = 0.5333 \quad \alpha = 28.07^\circ$$

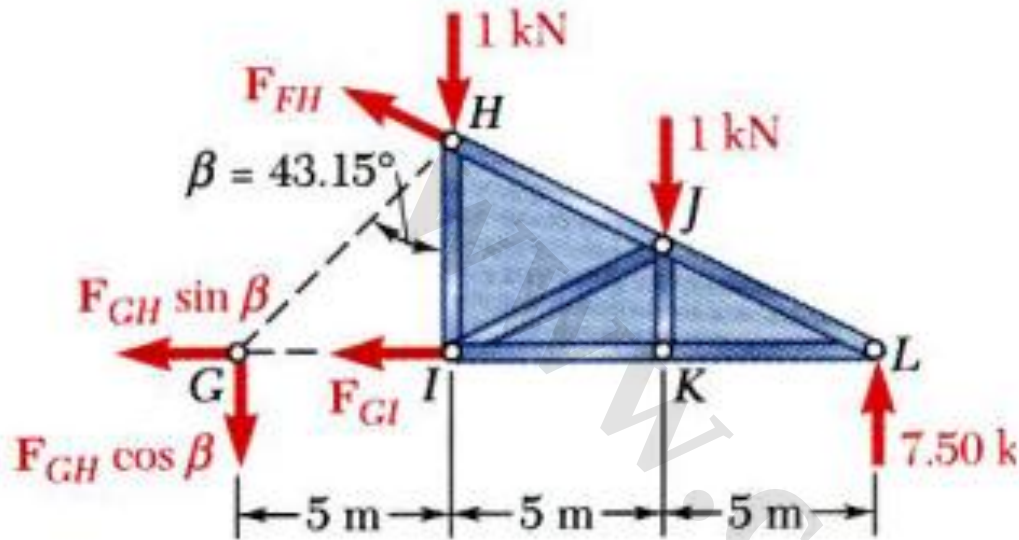
$$\sum M_G = 0$$

$$(7.5 \text{ kN})(15 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(10 \text{ m}) - (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) + (F_{FH} \cos \alpha)(8 \text{ m}) = 0$$

$$F_{FH} = -13.82 \text{ kN}$$

$$F_{FH} = 13.82 \text{ kN } C$$

تمرین ۱.



$$\tan \beta = \frac{GI}{HI} = \frac{5 \text{ m}}{\frac{2}{3}(8 \text{ m})} = 0.9375 \quad \beta = 43.15^\circ$$

$$\sum M_L = 0$$

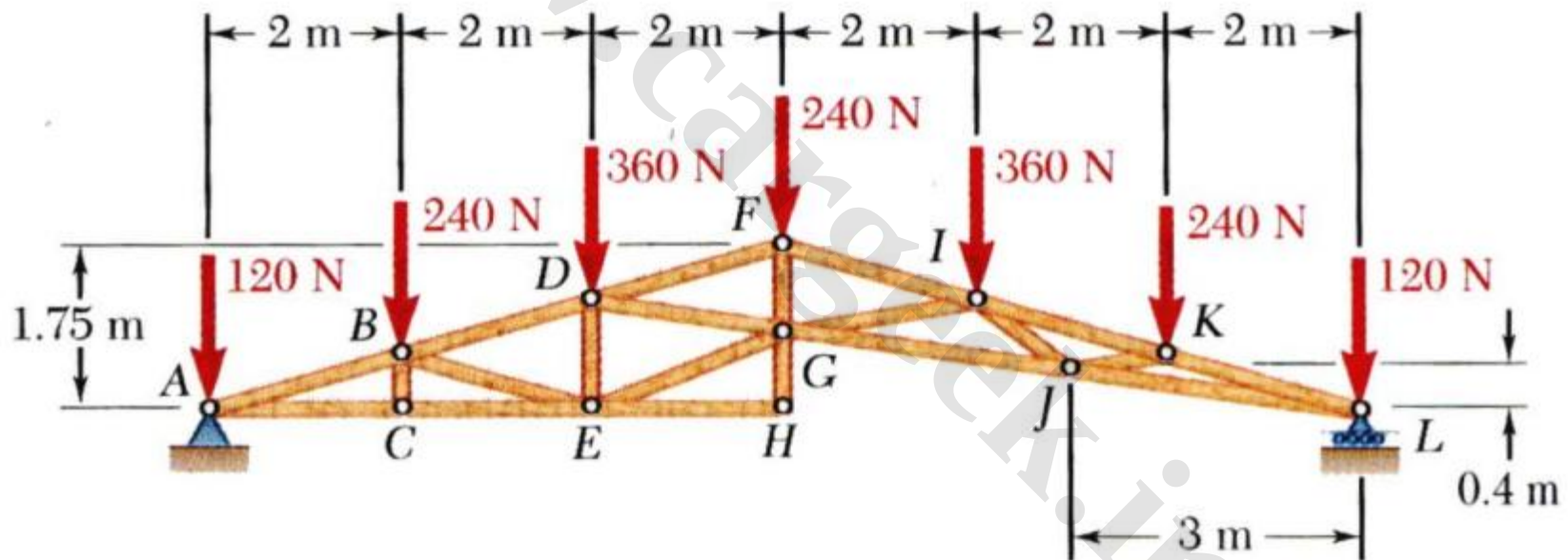
$$(1 \text{ kN})(10 \text{ m}) + (1 \text{ kN})(5 \text{ m}) + (F_{GH} \cos \beta)(10 \text{ m}) = 0$$

$$F_{GH} = -1.371 \text{ kN}$$

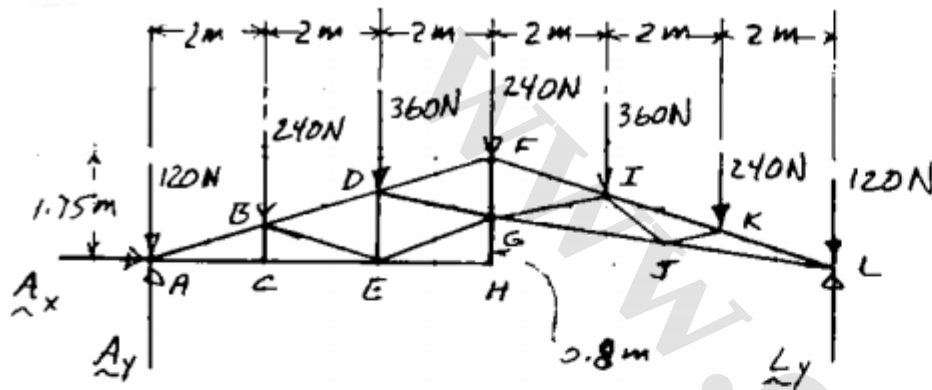
$$F_{GH} = 1.371 \text{ kN } C$$

تمرین ۲.

❖ در خرپای شکل زیر (Vaulted roof truss)، با استفاده از روش مقاطع، نیروها در اعضا **BE**، **BD** و **CE** را مشخص کنید.

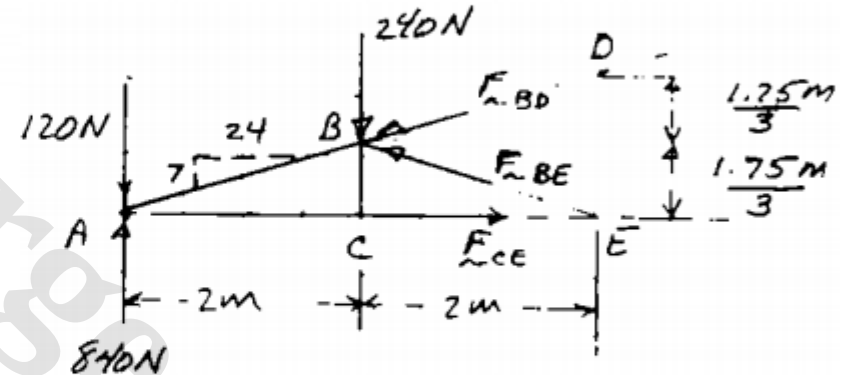


تمرین ۲



$$\sum F_x = 0: A_x = 0$$

$$A_y = L_y = 840 \text{ N}$$



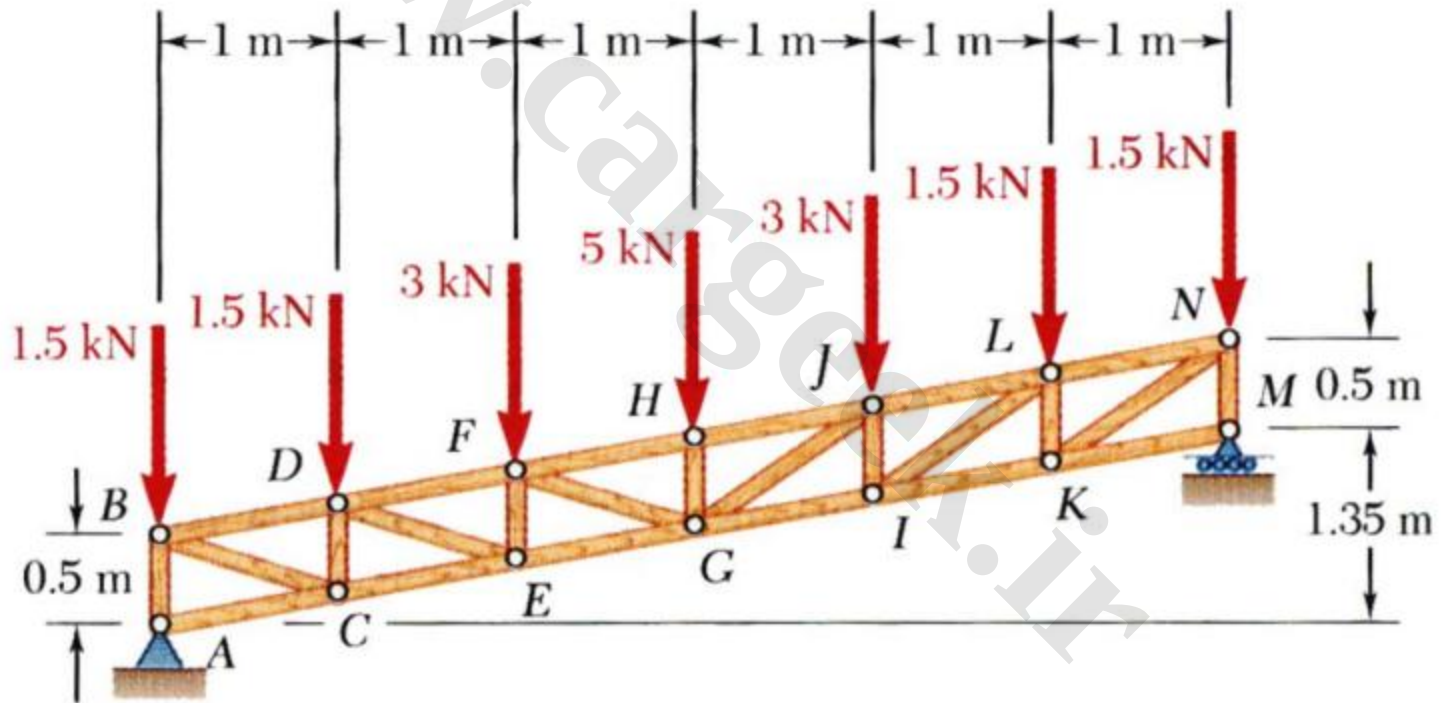
$$\sum M_E = 0: \frac{2}{3} (1.75 \text{ m}) \frac{24}{25} F_{BD} + (2 \text{ m})(240 \text{ N}) - (4 \text{ m})(840 \text{ N} - 120 \text{ N}) = 0 \Rightarrow F_{BD} = 2.14 \text{ kN C} \blacktriangleleft$$

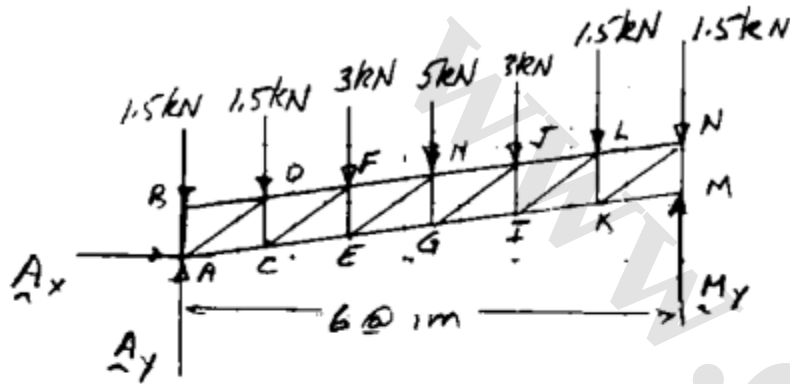
$$\sum M_B = 0: \left(\frac{1.75}{3} \text{ m} \right) F_{CE} - (2 \text{ m})(840 \text{ N} - 120 \text{ N}) = 0 \Rightarrow F_{CE} = 2.47 \text{ kN T} \blacktriangleleft$$

$$\sum M_A = 0: (4 \text{ m}) \left(\frac{7}{25} F_{BE} \right) - (2 \text{ m})(240 \text{ N}) = 0 \Rightarrow F_{BE} = 429 \text{ N C} \blacktriangleleft$$

تمرین ۳.

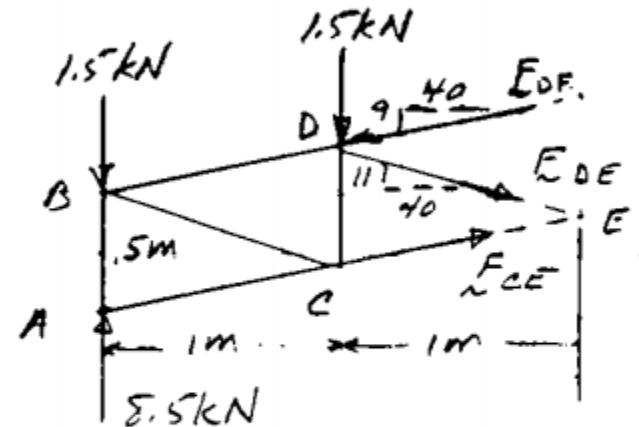
❖ در خرپای شکل زیر (Parallel chord Pratt truss)، با استفاده از روش مقاطع، نیروها در اعضا **DF** و **DE** را مشخص کنید.





$$\sum F_x = 0: \quad A_x = 0$$

$$A_y = M_y = 8.5 \text{ kN}$$

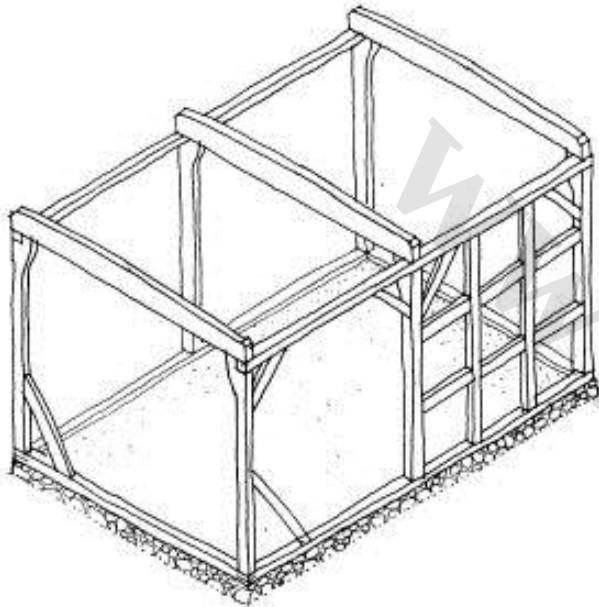


$$\sum M_D = 0: \quad (1 \text{ m})(1.5 \text{ kN} - 8.5 \text{ kN}) + (0.5 \text{ m}) \frac{40}{41} F_{CE} = 0 \Rightarrow F_{CE} = 14.35 \text{ kN } T \blacktriangleleft$$

$$\sum M_E = 0: \quad (1 \text{ m})(1.5 \text{ kN}) + (2 \text{ m})(1.5 \text{ kN} - 8.5 \text{ kN}) + (0.5 \text{ m}) \frac{40}{41} F_{DF} = 0 \Rightarrow F_{DF} = 25.6 \text{ kN } C \blacktriangleleft$$

$$\sum F_x = 0: \quad \frac{40}{41} (14.35 \text{ kN} - 25.625 \text{ kN}) + \frac{40}{\sqrt{1721}} F_{DE} = 0 \Rightarrow F_{DE} = 11.41 \text{ kN } T \blacktriangleleft$$

قاب



Two-bay box-framed structure

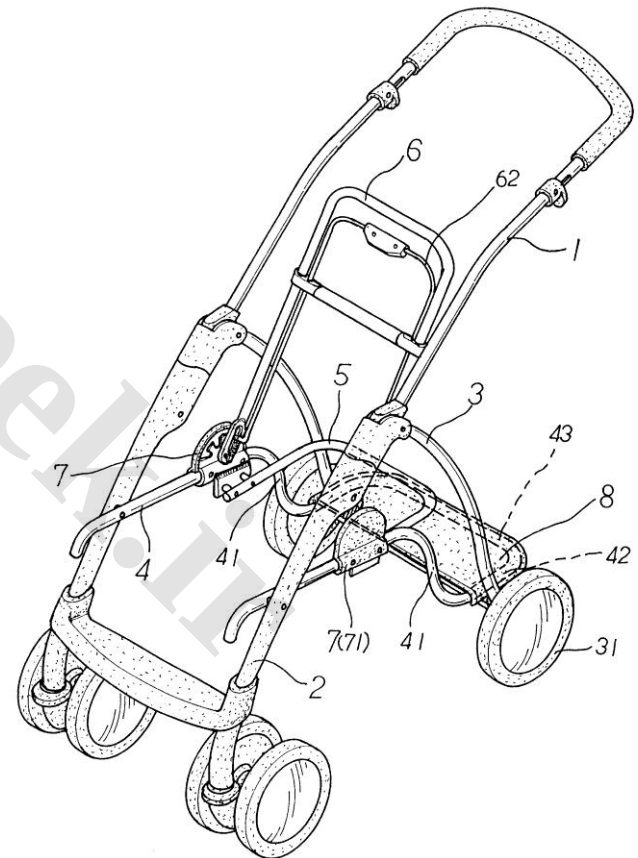


Crown post roof



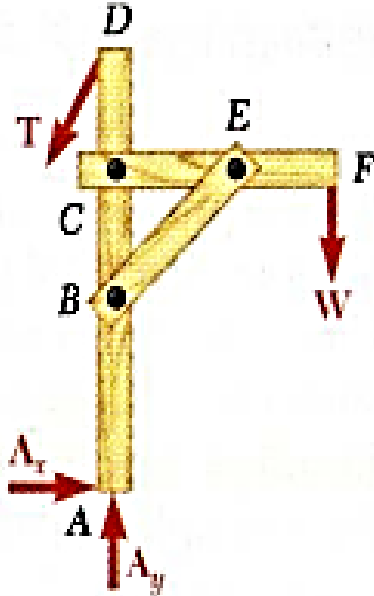
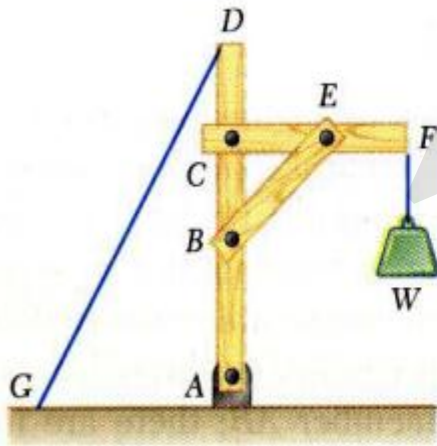
King post roof

Frame

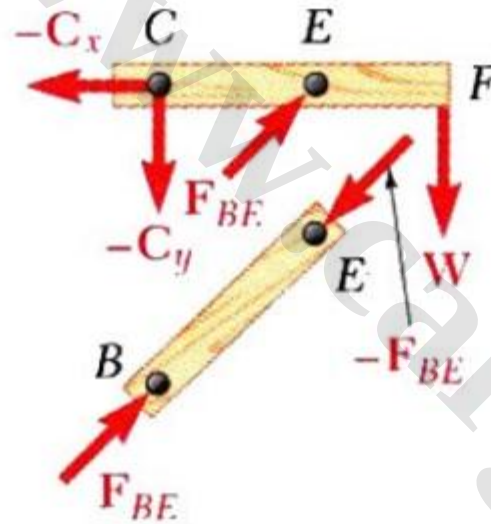
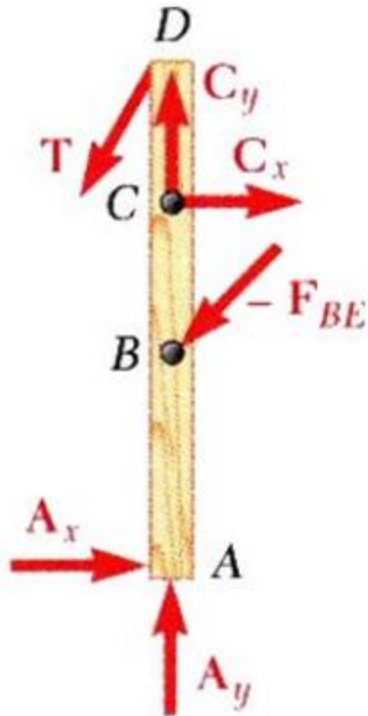


- برای تعادل یک سازه ساخته شده از قطعات متعدد متصل بهم، نیروهای درونی همانند نیروهای خارجی باید در نظر گرفته شوند.

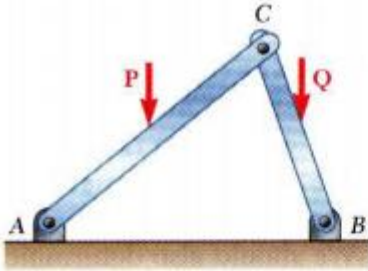
- در تقابل بین قطعات متصل، قانون سوم نیوتن بیان میکند که نیروهای عمل و عکس العمل بین اعضاء مرتبط بهم، دارای مقداری برابر و خط اثری یکسان ولی در جهت مخالف هم هستند.



- دیاگرام جسم آزاد کل قاب برای تعیین نیروهای خارجی اعمالی روی قاب استفاده میشود.

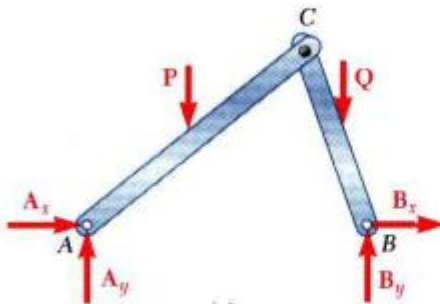


- نیروهای داخلی با جدا کردن اجزاء تشکیل دهنده قاب و رسم جسم آزاد برای هر عضو مشخص میشوند.
- نیروها در اعضاء دو نیرویی دارای خط اثری یکسان، مقداری مساوی و در خلاف جهت هم هستند.
- نیروها در اعضاء چند نیرویی دارای مقدار و خط اثر نامشخص هستند. آنها بایستی با دو مولفه معلوم نمایش داده شوند.
- نیروها بین اجزاء متصل بهم دارای مقدار مساوی، خط اثر یکسان و جهت مخالفند.



- بعضی قابها در صورتی که از تکیه گاهایشان جدا شوند فرو میریزند. چنین قابهایی را نمیتوان جسم صلب در نظر گرفت.

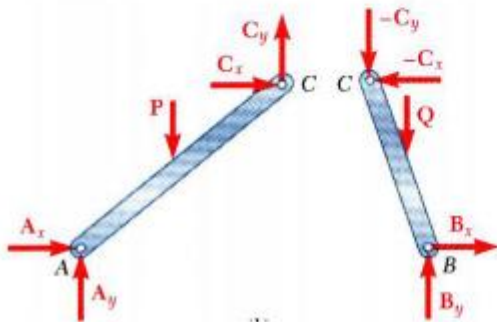
- نمودار جسم آزاد کل قاب، چهار مولفه نیروی نامعلوم را نشان میدهد که با سه معادله تعادل قابل محاسبه نیستند.



- قاب را باید بصورت دو جزء جدا ولی صلب و وابسته بهم در نظر گرفت.

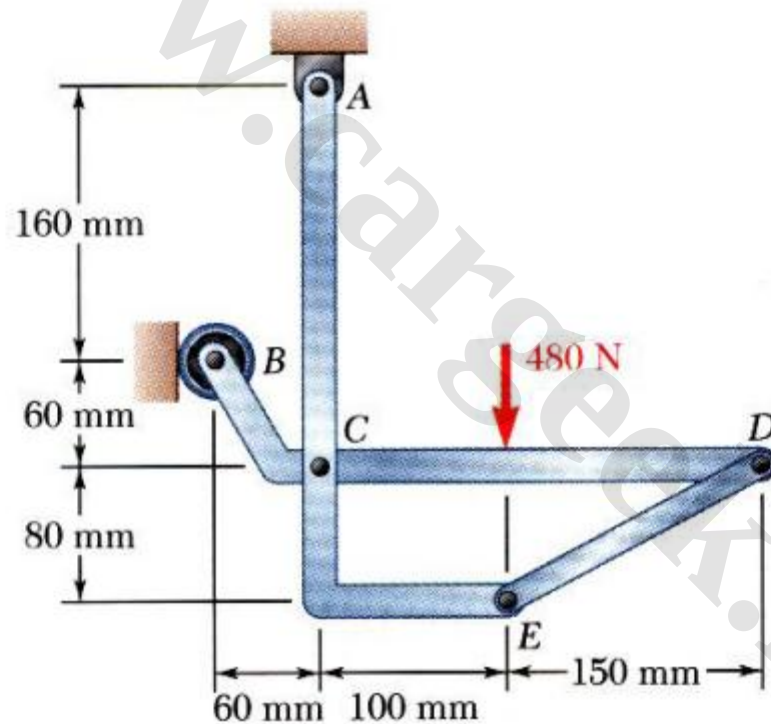
- با عکس العملهای مساوی و مخالف در نقاط اتصال بین اعضاء، دو دیالگرام جسم آزاد، شش مولفه نیروی نامعلوم را نشان میدهند.

- تعادل مورد نیاز برای دو جسم صلب، شش معادله مستقل را نتیجه میدهد.



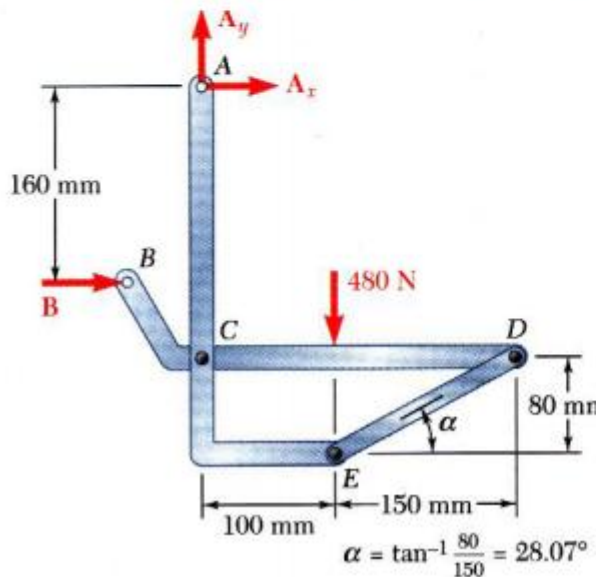
مثال ۱.

❖ اعضاء ACE و BCD توسط پین C و میله DE بهم متصلند. برای بارگذاری نشان داده شده، نیرو در میله DE و مولفه های نیرو اعمالی در C از عضو BCD را مشخص کنید.



مثال ۱.

- نمودار جسم آزاد کل قاب را برای بدست آوردن عکس العملهای تکیه گاهی رسم میکنیم.
- نمودار جسم آزاد عضو BCD را معین میکنیم. نیروی اعمالی توسط میله DE خط اثر معلومی دارد اما دارای مقدار نامشخص است که با گشتاور گیری حول C مشخص میشود.
- با استفاده از نیروی معلوم میله DE، جمع نیروها در راستای X و Y میتواند مولفه های نیرو را در C پیدا کند.
- به کمک نمودار جسم آزاد عضو ACE، درستی حل را با جمع گشتاورها حول A بررسی میکنیم.



$$\sum F_y = 0 = A_y - 480 \text{ N}$$

$$A_y = 480 \text{ N} \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 = -(480 \text{ N})(100 \text{ mm}) + B(160 \text{ mm})$$

$$B = 300 \text{ N} \rightarrow$$

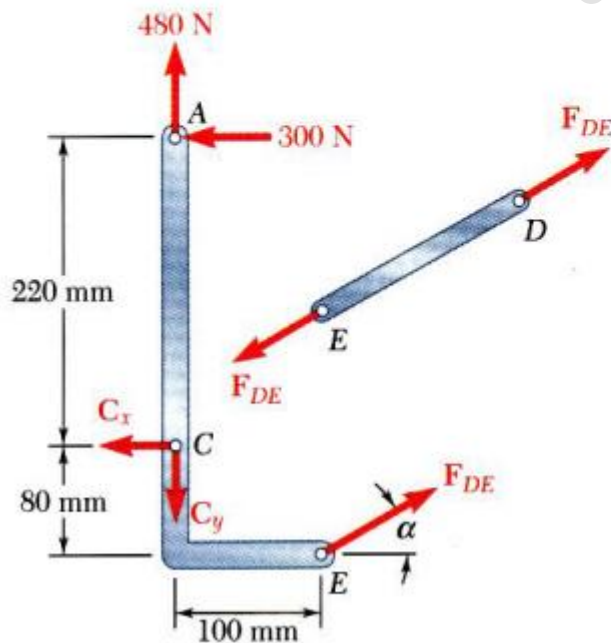
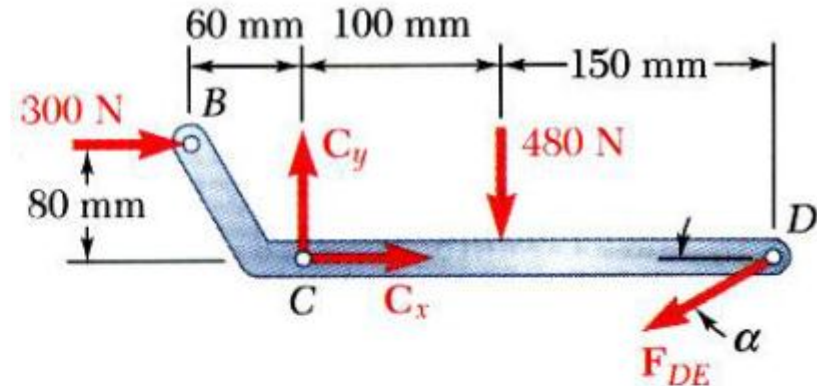
$$\sum F_x = 0 = B + A_x$$

$$A_x = -300 \text{ N} \leftarrow$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{80}{150} = 28.07^\circ$$

مثال ۱.

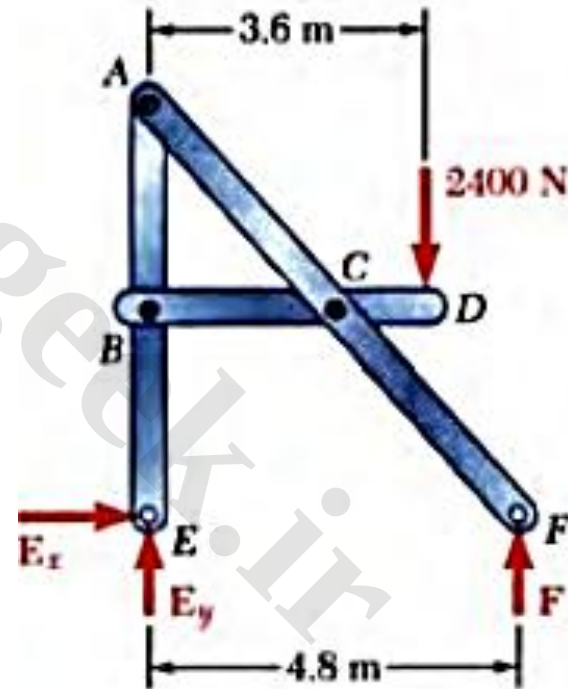
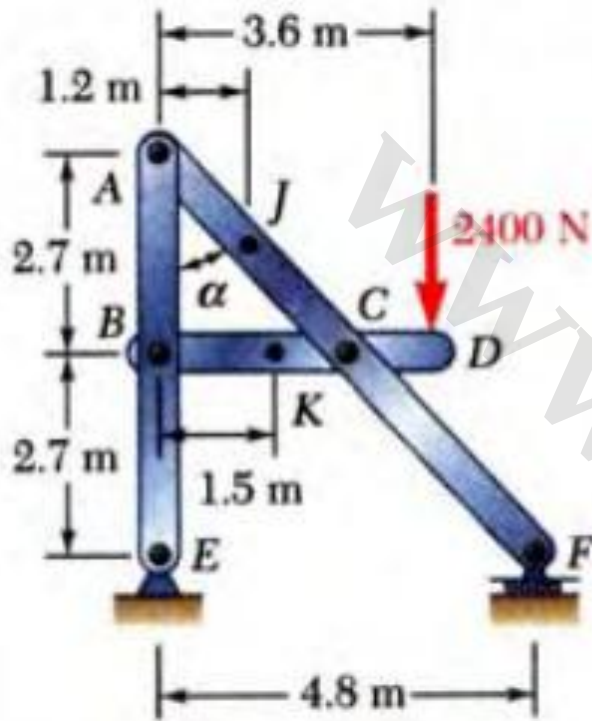
$$\begin{aligned}
 \sum M_C &= 0 \\
 &= -(F_{DE} \sin \alpha)(250 \text{ mm}) \\
 &\quad - (300 \text{ N})(80 \text{ mm}) - (480 \text{ N})(100 \text{ mm}) \\
 F_{DE} &= -561 \text{ N} \Rightarrow F_{DE} = 561 \text{ N} \quad C
 \end{aligned}$$

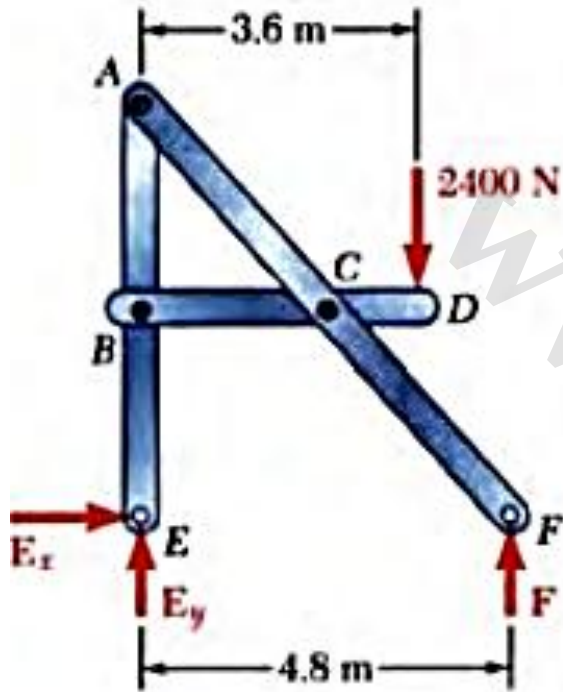


$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= C_x - F_{DE} \cos \alpha + 300 \text{ N} = \\
 C_x - (-561 \text{ N}) \cos \alpha + 300 \text{ N} &= 0 \Rightarrow C_x = -795 \text{ N} \\
 \sum F_y &= C_y - F_{DE} \sin \alpha - 480 \text{ N} = \\
 C_y - (-561 \text{ N}) \sin \alpha - 480 \text{ N} &= 0 \Rightarrow C_y = 216 \text{ N}
 \end{aligned}$$

$$\sum M_A = (F_{DE} \cos \alpha)(300 \text{ mm}) + (F_{DE} \sin \alpha)(100 \text{ mm}) - C_x(220 \text{ mm}) = (-561 \cos \alpha)(300 \text{ mm}) + (-561 \sin \alpha)(100 \text{ mm}) - (-795)(220 \text{ mm}) = 0 \quad (\text{checks})$$

مثال ۲.





$$\sum M_E = 0 :$$

$$-(2400 \text{ N})(3.6 \text{ m}) + F(4.8 \text{ m}) = 0 \quad F = 1800 \text{ N}$$

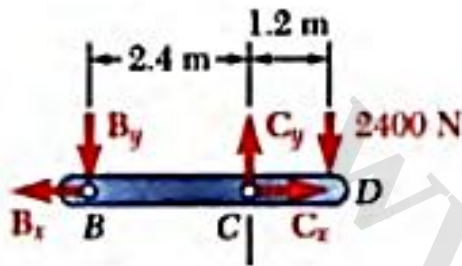
$$\sum F_y = 0 :$$

$$-2400 \text{ N} + 1800 \text{ N} + E_y = 0 \quad E_y = 600 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0 :$$

$$E_x = 0$$

مثال ۲.



Consider member BCD as free-body:

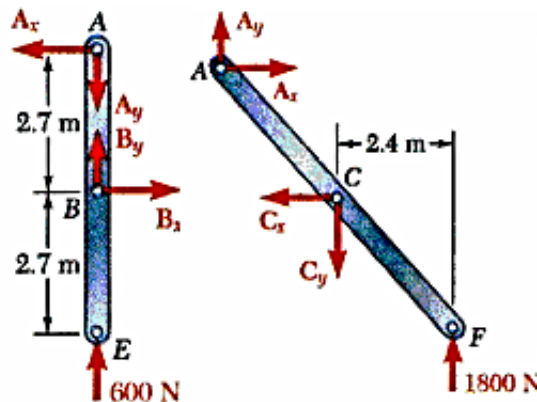
$$\sum M_B = 0:$$

$$-(2400 \text{ N})(3.6 \text{ m}) + C_y(2.4 \text{ m}) = 0 \quad C_y = 3600 \text{ N}$$

$$\sum M_C = 0:$$

$$-(2400 \text{ N})(1.2 \text{ m}) + B_y(2.4 \text{ m}) = 0 \quad B_y = 1200 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0: \quad -B_x + C_x = 0$$



Consider member ABE as free-body:

$$\sum M_A = 0: \quad B_x(2.4 \text{ m}) = 0 \quad B_x = 0$$

$$\sum F_x = 0: \quad B_x - A_x = 0 \quad A_x = 0$$

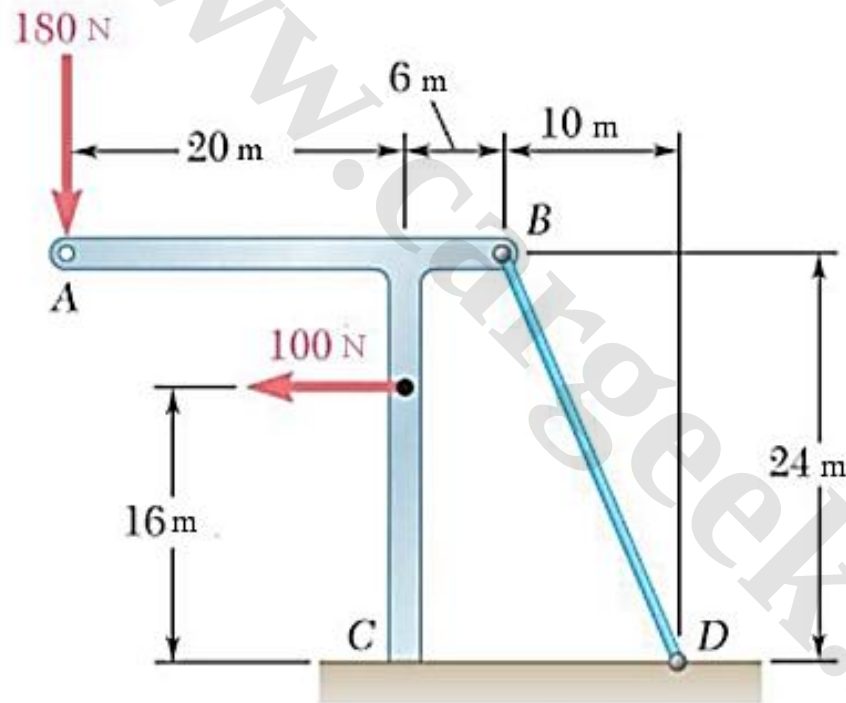
$$\sum F_y = 0: \quad -A_y + B_y + 600 \text{ N} = 0 \quad A_y = 1800 \text{ N}$$

From member BCD ,

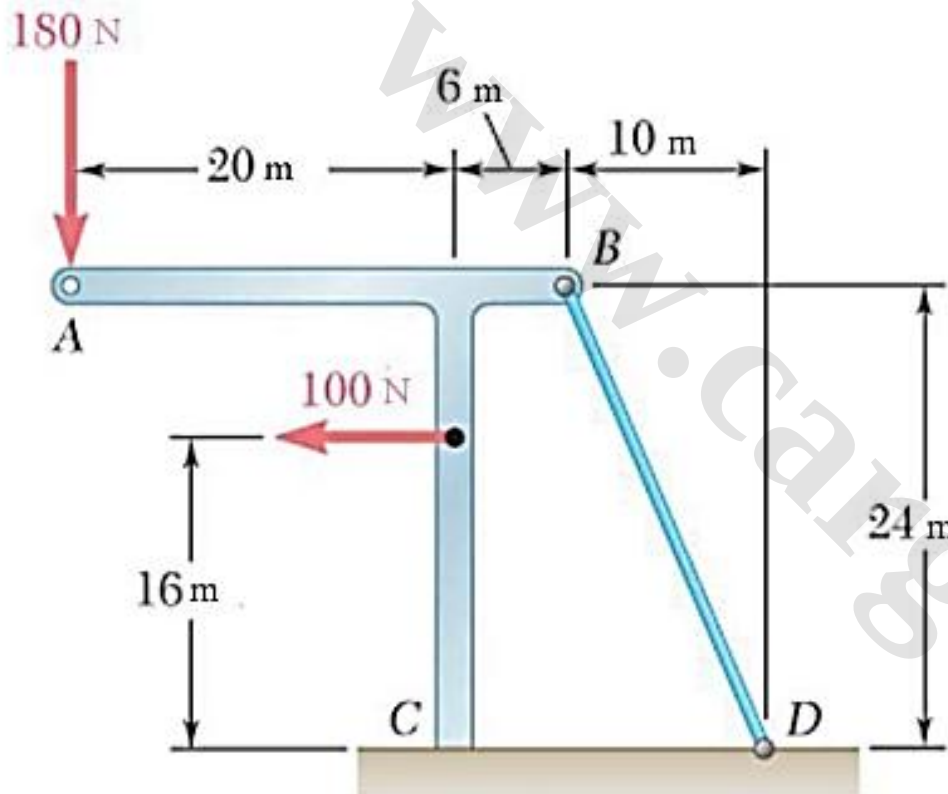
$$\sum F_x = 0: \quad -B_x + C_x = 0 \quad C_x = 0$$

مثال ۳.

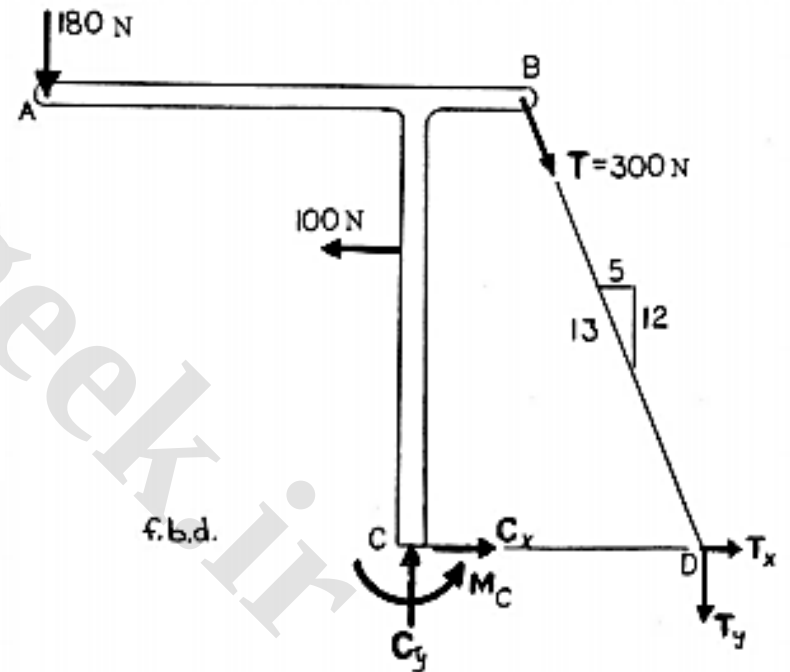
❖ چنانچه کشش در کابل BD برابر 300 N باشد، عکس العمل در تکیه گاه ثابت C از قاب چقدر است؟



مثال ۳.



□ راه حل:



مثال ۳.

□ راه حل:

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0: C_x - 100 \text{ N} + \left(\frac{5}{13}\right) 300 \text{ N} = 0$$

$$\therefore C_x = -15.3846 \text{ N} \text{ or } C_x = 15.3846 \text{ N} \leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: C_y - 180 \text{ N} - \left(\frac{12}{13}\right) 300 \text{ N} = 0$$

$$\therefore C_y = 456.92 \text{ N} \text{ or } C_y = 456.92 \text{ N} \uparrow$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{(15.3846)^2 + (456.92)^2} = 457.18 \text{ N}$$

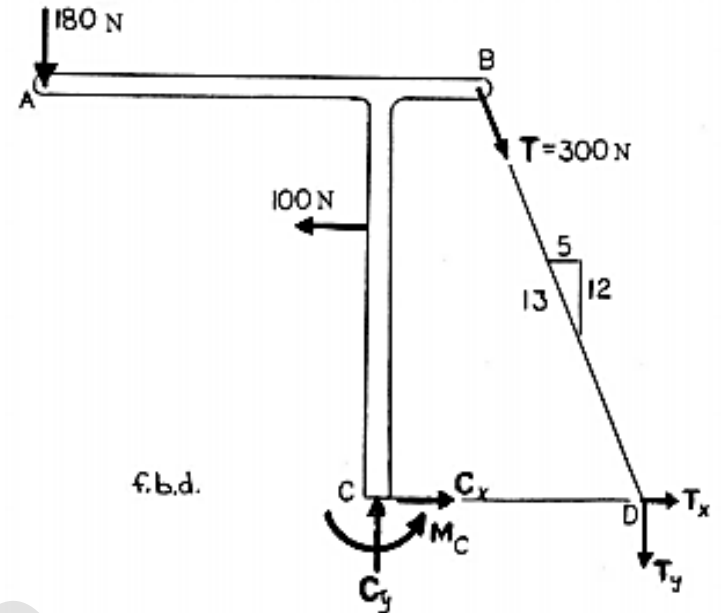
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{C_y}{C_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{456.92}{-15.3846}\right) = -88.072^\circ$$

$$C = 457 \text{ N} \searrow 88.1^\circ$$

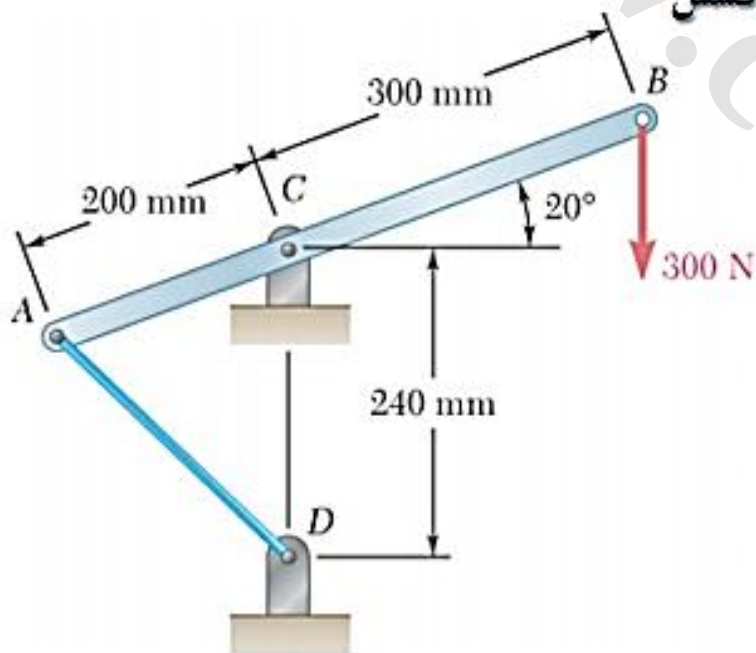
$$+\curvearrowright \Sigma M_C = 0: M_C + (180 \text{ N})(20 \text{ m.}) + (100 \text{ N})(16 \text{ m.}) - \left[\left(\frac{12}{13}\right) 300 \text{ N}\right](16 \text{ m.}) = 0$$

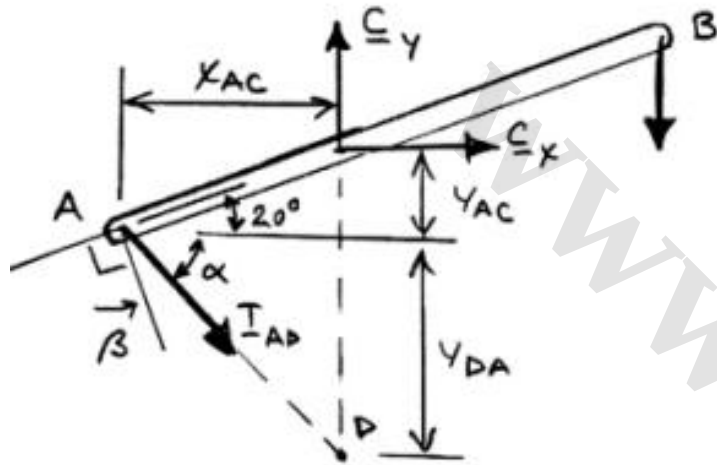
$$\therefore M_C = -769.23 \text{ N} \cdot \text{m.}$$

$$\mathbf{M}_C = 769 \text{ N} \cdot \text{m.}$$



❖ اهرم AB در C لولا شده و در A به کابل کنترل متصل است.
اگر اهرم تحت تاثیر نیروی عمودی 300N در B قرار گیرد، کشش
کابل و عکس العمل C را مشخص کنید.





$$x_{AC} = (0.2m) \cos 20^\circ = 0.187m$$

$$y_{AC} = (0.2m) \sin 20^\circ = 0.068m$$

$$\Rightarrow y_{DA} = 0.24m - 0.068m = 0.172m$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{y_{DA}}{x_{AC}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0.172m}{0.187m} \right) = 42.6^\circ$$

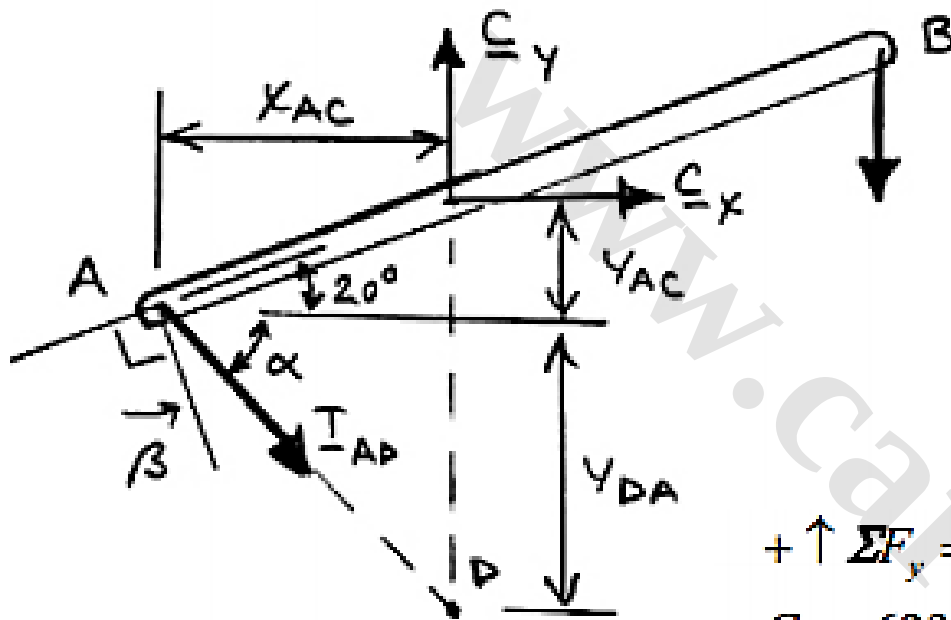
$$\beta = 90^\circ - 20^\circ - 42.6^\circ = 27.4^\circ$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = 0: \quad T_{AD} \cos 27.4^\circ (0.2m) - (300N) [(0.3m) \cos 20^\circ] = 0$$

$$T_{AD} = 477.5N \quad \blacktriangleleft$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0: \quad C_x + (477.5N) \cos 42.6^\circ = 0$$

$$C_x = -351.4N$$



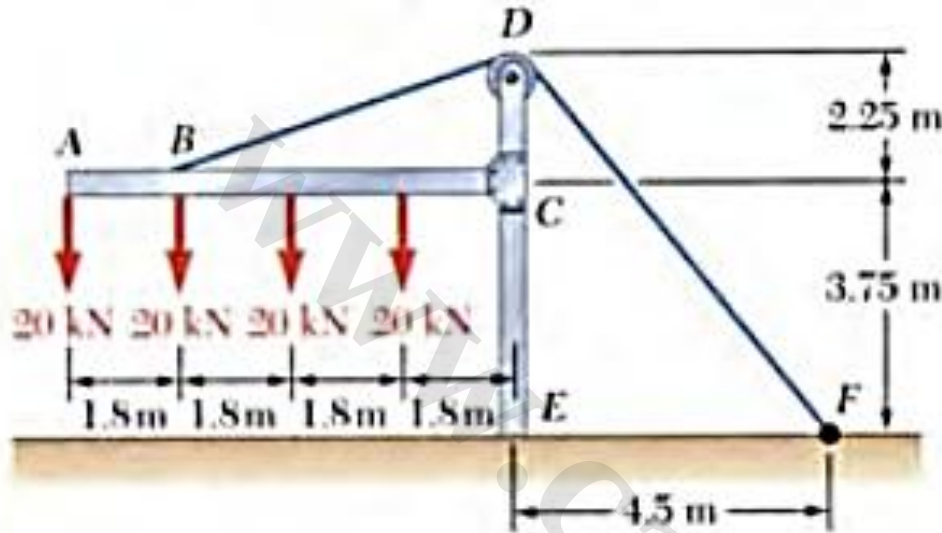
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad C_y - 300\text{ N} - (477.5\text{ N})\sin 42.6^\circ = 0$$

$$C_y = 623.2\text{ N}$$

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{(-351.4)^2 + (623.2)^2} = 715.4\text{ N}$$

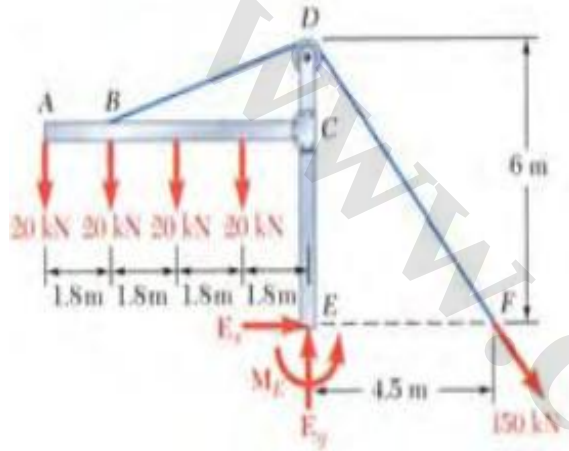
$$\theta = \tan^{-1} \frac{C_y}{C_x} = \tan^{-1} \frac{623.2}{351.4} = 60.5^\circ$$

$$\therefore C = 715.4\text{ N} \searrow 60.5^\circ \blacktriangleleft$$



The frame supports part of the roof of a small building. The tension in the cable is 150 kN.

Determine the reaction at the fixed end E .



- Solve 3 equilibrium equations for the reaction force components and couple.

$$\sum F_x = 0: E_x + \frac{4.5}{7.5}(150 \text{ kN}) = 0$$

$$E_x = -90.0 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0: E_y - 4(20 \text{ kN}) - \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN}) = 0$$

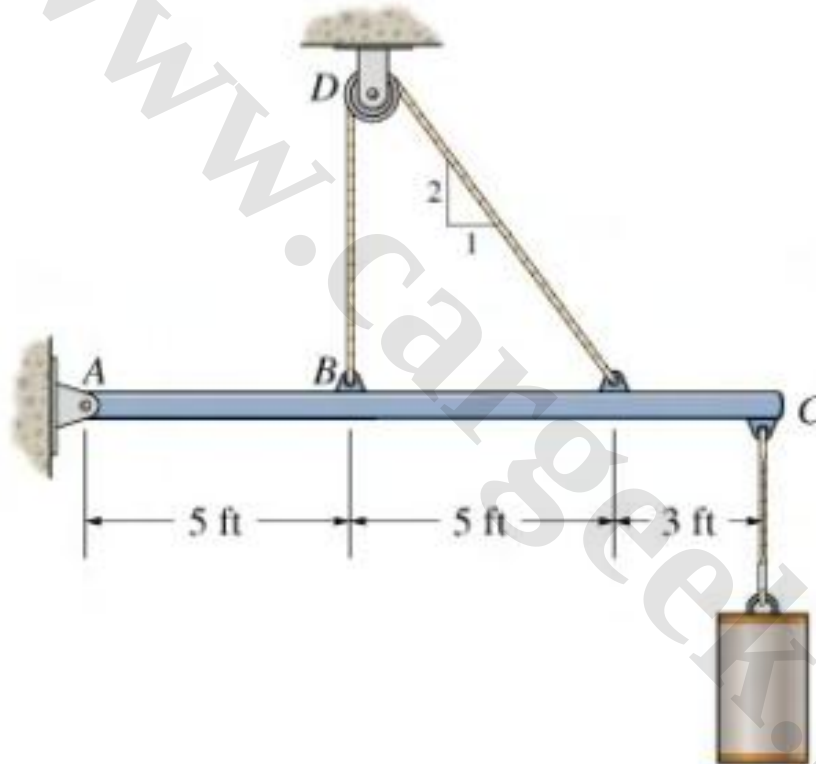
$$E_y = +200 \text{ kN}$$

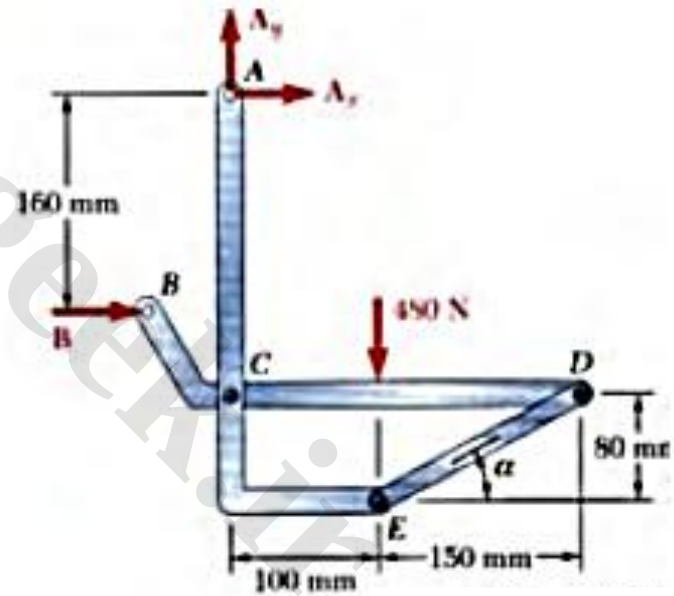
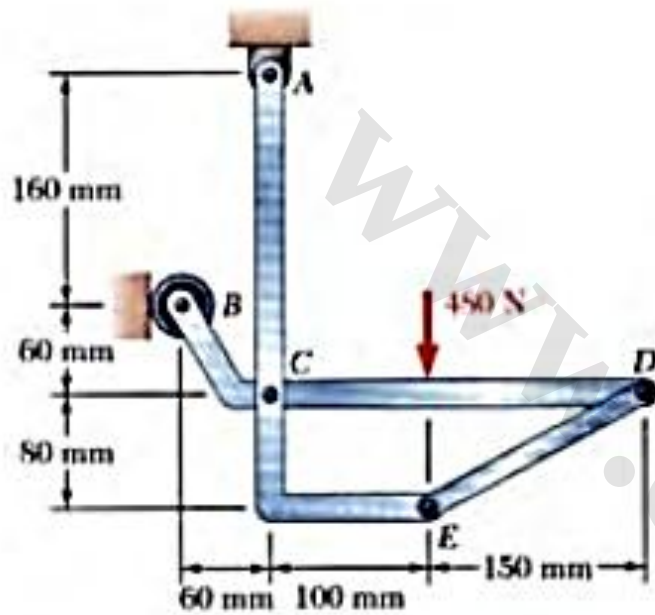
- Create a free-body diagram for the frame and cable.

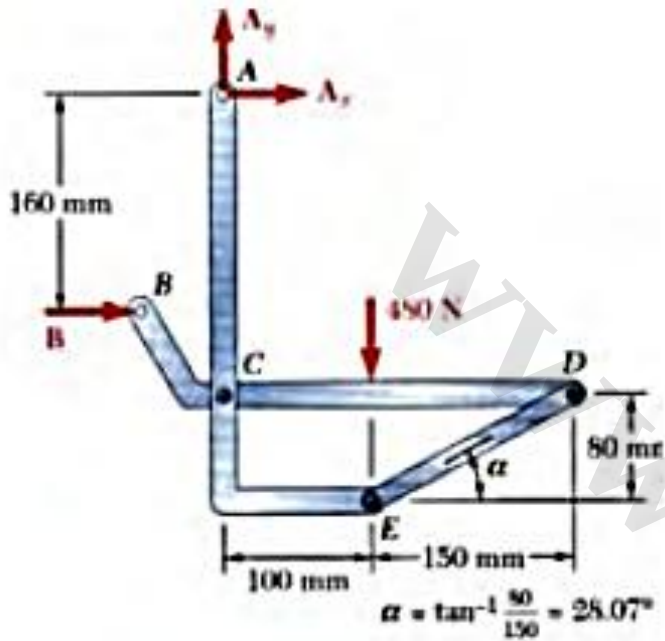
$$\begin{aligned} \sum M_E = 0: & +20 \text{ kN}(7.2 \text{ m}) + 20 \text{ kN}(5.4 \text{ m}) \\ & + 20 \text{ kN}(3.6 \text{ m}) + 20 \text{ kN}(1.8 \text{ m}) \\ & - \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN})4.5 \text{ m} + M_E = 0 \end{aligned}$$

$$M_E = 180.0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Determine the tension in the cable and the horizontal and vertical components of the reaction at pin A. The pulley is frictionless and the cylinder weighs 80 lb.







$$\sum F_y = 0 = A_y - 480 \text{ N}$$

$$A_y = 480 \text{ N } \uparrow$$

$$\sum M_A = 0 = -(480 \text{ N})(100 \text{ mm}) + B(160 \text{ mm})$$

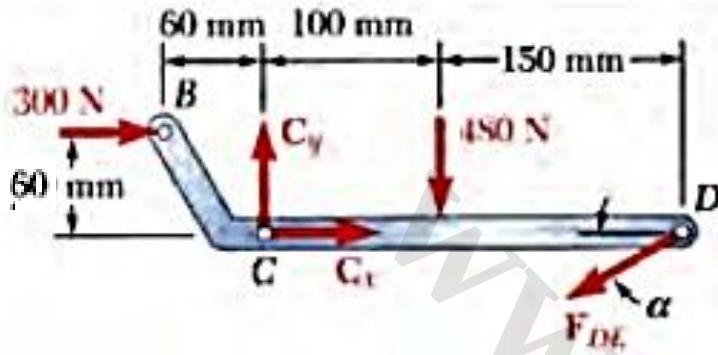
$$B = 300 \text{ N } \rightarrow$$

$$\sum F_x = 0 = B + A_x$$

$$A_x = -300 \text{ N } \leftarrow$$

Note:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{80}{150} = 28.07^\circ$$



$$\sum M_C = 0 = (F_{DE} \sin \alpha)(250 \text{ mm}) + (300 \text{ N})(60 \text{ mm}) + (480 \text{ N})(100 \text{ mm})$$
$$F_{DE} = -561 \text{ N}$$

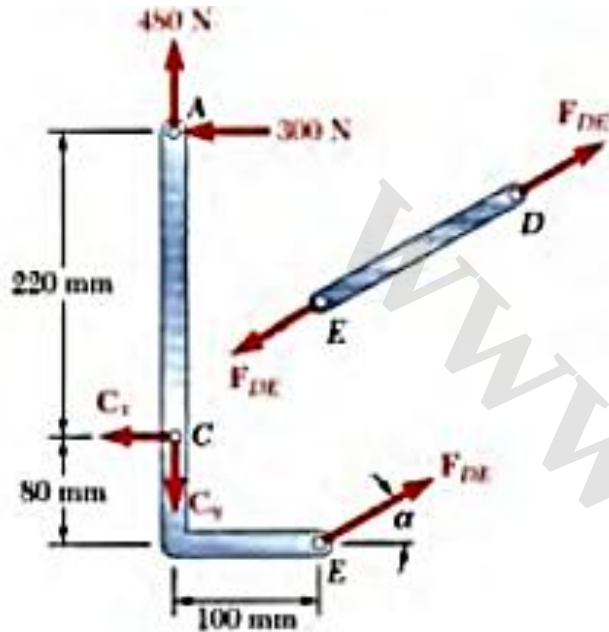
$$F_{DE} = 561 \text{ N } C$$

$$\sum F_x = 0 = C_x - F_{DE} \cos \alpha + 300 \text{ N}$$
$$0 = C_x - (-561 \text{ N}) \cos \alpha + 300 \text{ N}$$

$$C_x = -795 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 = C_y - F_{DE} \sin \alpha - 480 \text{ N}$$
$$0 = C_y - (-561 \text{ N}) \sin \alpha - 480 \text{ N}$$

$$C_y = 216 \text{ N}$$



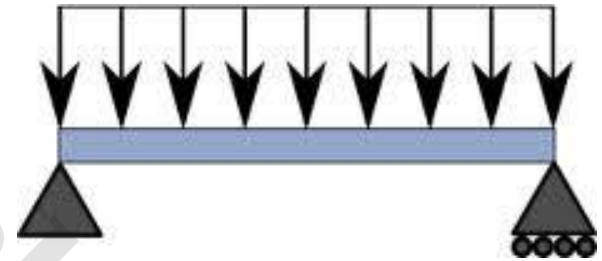
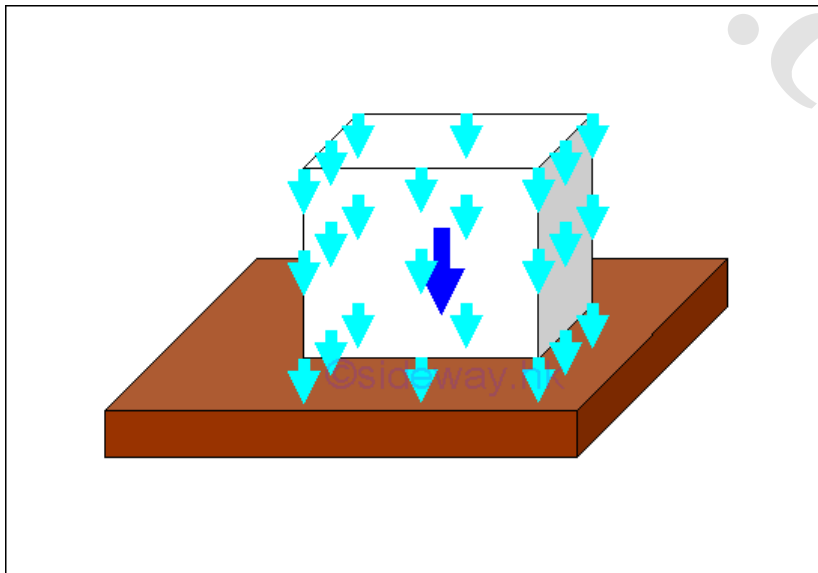
برای اطمینان تعادل در عضو ACE را چک می کنیم.

$$\begin{aligned}\sum M_A &= (F_{DE} \cos \alpha)(300 \text{ mm}) + (F_{DE} \sin \alpha)(100 \text{ mm}) - C_x(220 \text{ mm}) \\ &= (-561 \cos \alpha)(300 \text{ mm}) + (-561 \sin \alpha)(100 \text{ mm}) - (-795)(220 \text{ mm}) = 0\end{aligned}$$

(checks)

بار گسترده

اگر یک بار بجای اینکه بصورت متمرکز به یک نقطه وارد شود بر یک سطح یا خط پخش شود، بار گسترده می باشد.

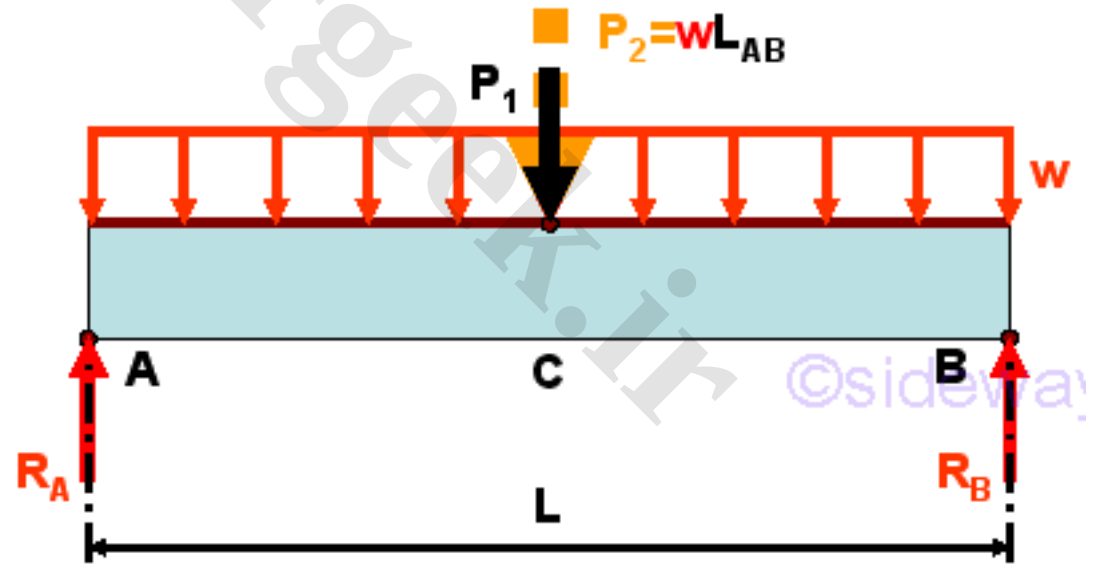
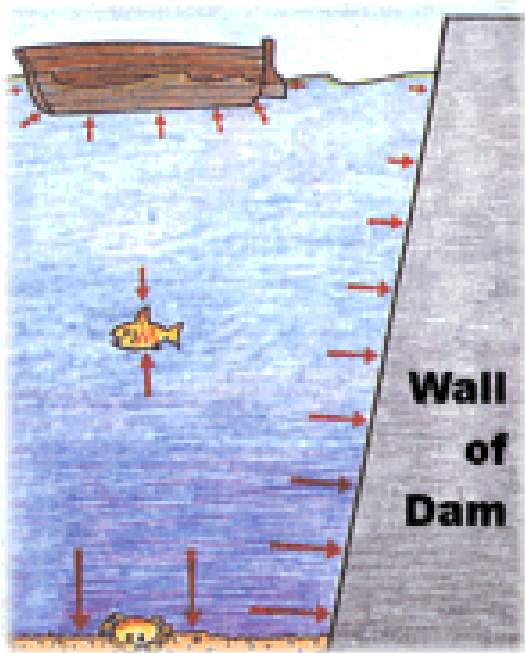
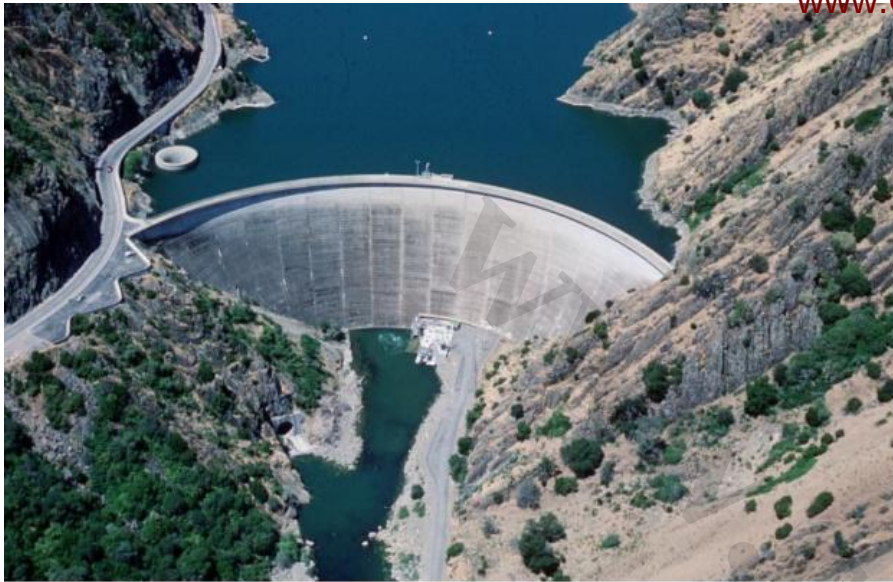


بار گسترده را می توان با یک بار متمرکز جایگزین نمود.

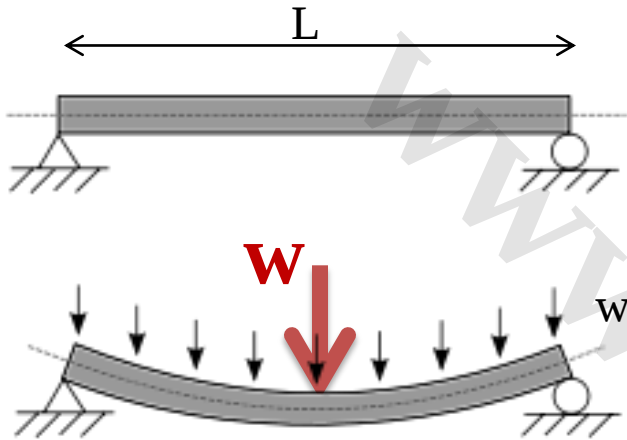
مقدار بزرگی بار متمرکز برابر با مساحت شکلی است که بار گسترده ایجاد نموده

است. محل اثر بار متمرکز معادل مرکز ثقل شکل بار است.

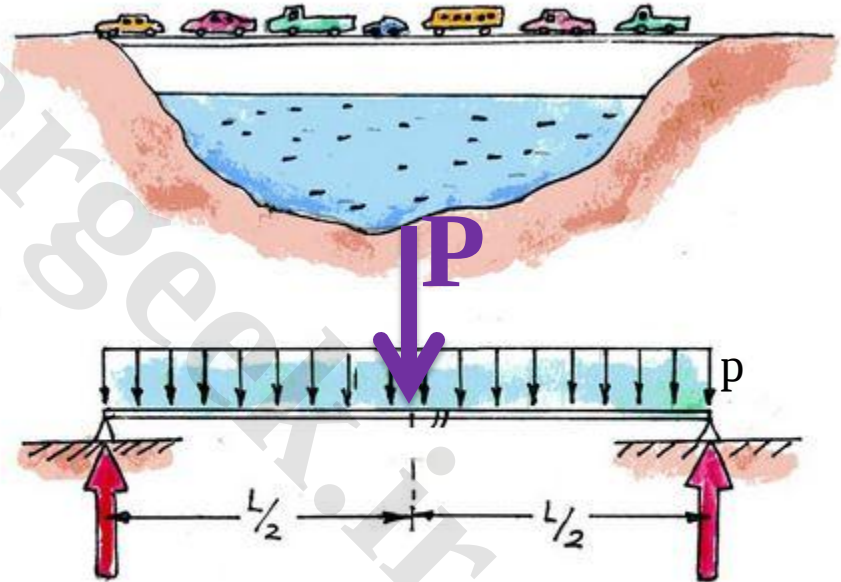
بار گسترده



بار گسترده

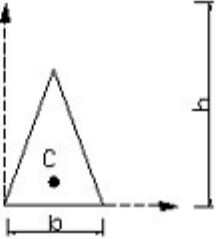
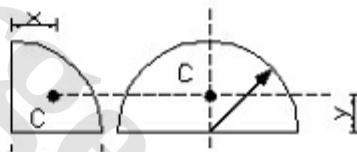
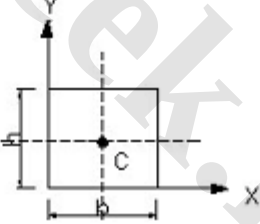


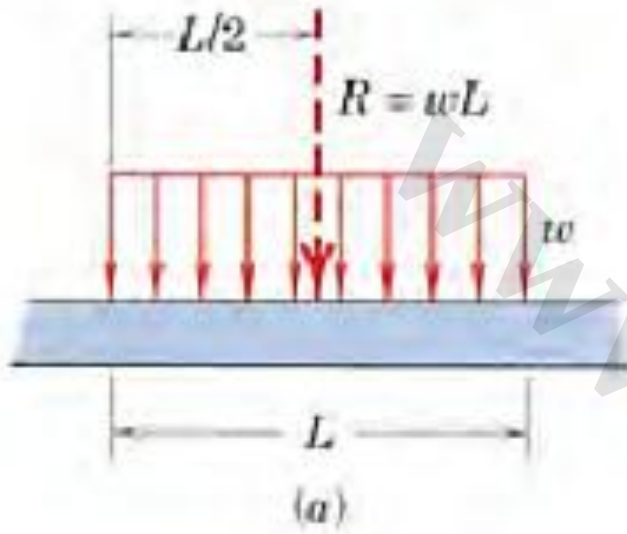
$$W = w \times l$$



$$P = p \times l$$

مرکز سطح

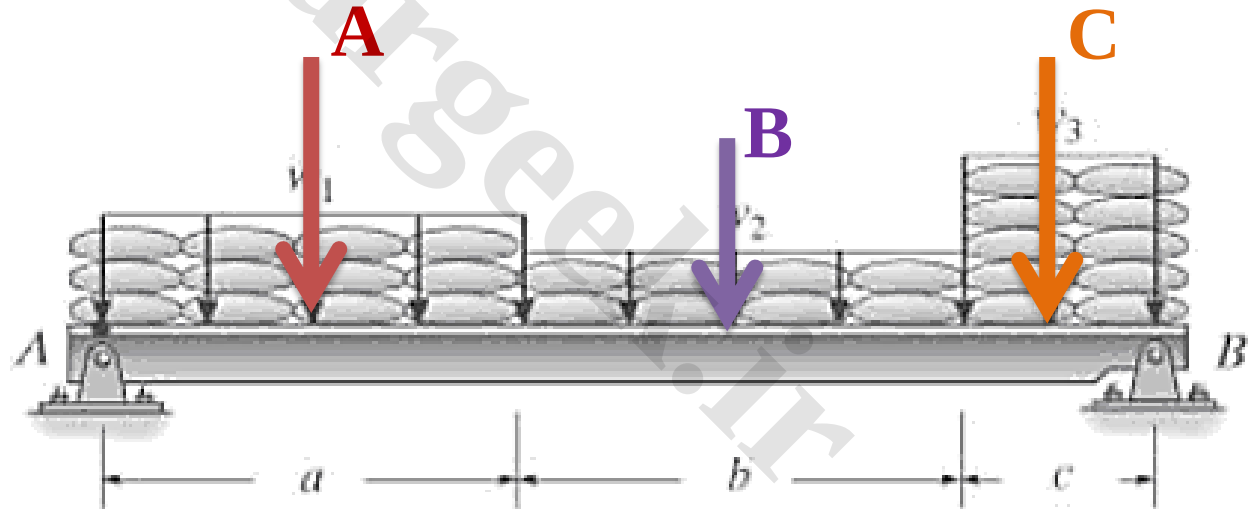
نام شکل	شکل	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	مسامت
مثلث		$\frac{a+b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
ربع دایره		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi^2}{4}$
نیم دایره		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi^2}{2}$
مستطیل		$\frac{b}{2}$	$\frac{h}{2}$	$b \cdot h$
نیم سهمی		$\frac{3a}{8}$	$\frac{2h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$

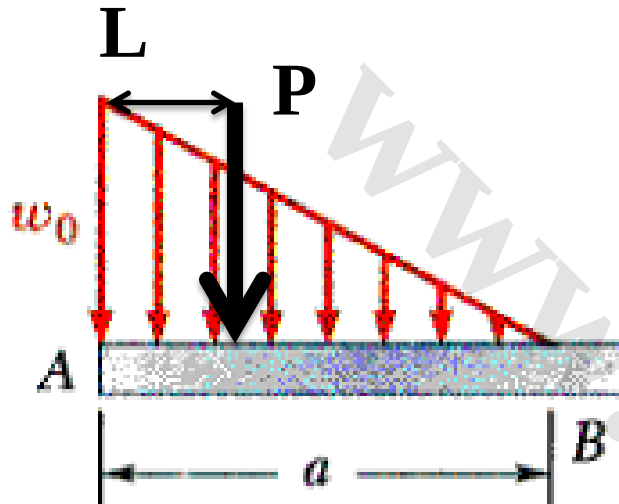


$$A = w_1 \times a$$

$$B = w_2 \times b$$

$$C = w_3 \times c$$



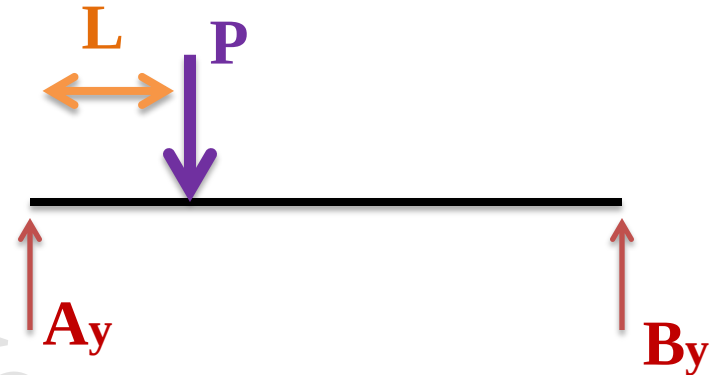
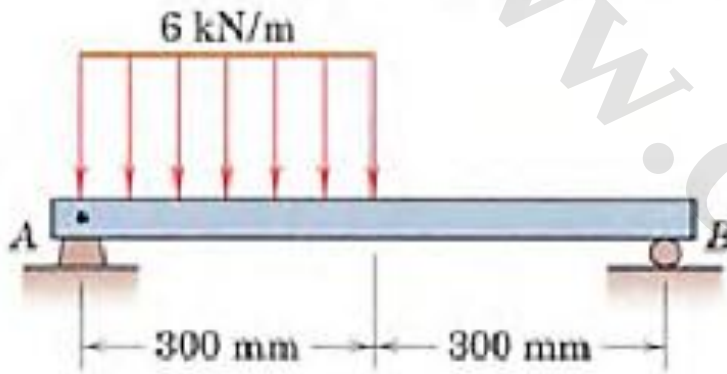


$$P = \frac{1}{2} w_0 \times a$$

$$l = \frac{1}{3} \times a$$

مثال ۱.

مقدار و جهت نیرو در هر یک از تکیه گاه ها را بیابید



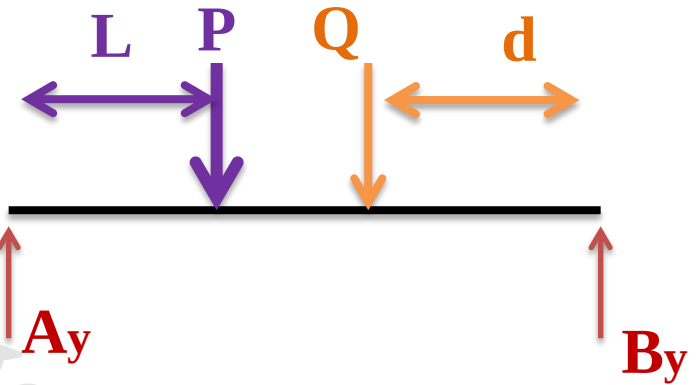
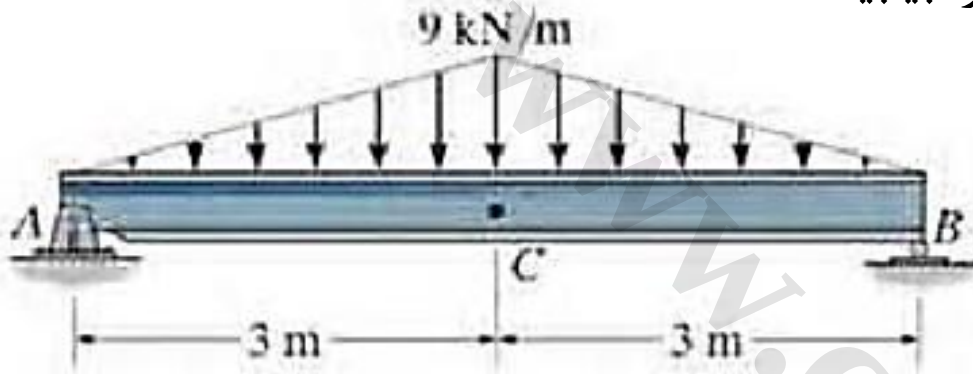
$$P = 6 \times 0.3 = 1.8 \text{ kN/m}$$

$$l = \frac{1}{2} \times 300 = 150 \text{ mm} = 0.15 \text{ m}$$

$$\text{Ans. } R_A = 1.35 \text{ kN, } R_B = 0.45 \text{ kN}$$

مثال ۲.

مقدار و جهت نیرو در هر یک از تکیه گاه ها را بیابید



$$P = \frac{1}{2} \times 9 \times 3 = 13.5 \text{ KN}$$

$$Q = \frac{1}{2} \times 9 \times 3 = 13.5 \text{ KN}$$

$$l = \frac{2}{3} \times 3 = 2\text{m} = d$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + B_y = 27 \text{ KN/m}$$

$$\sum M_A = 0$$

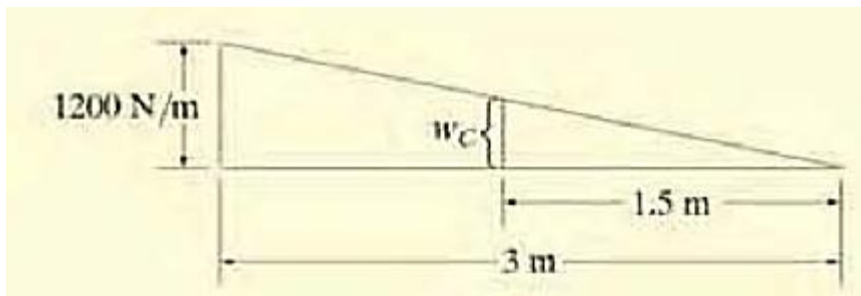
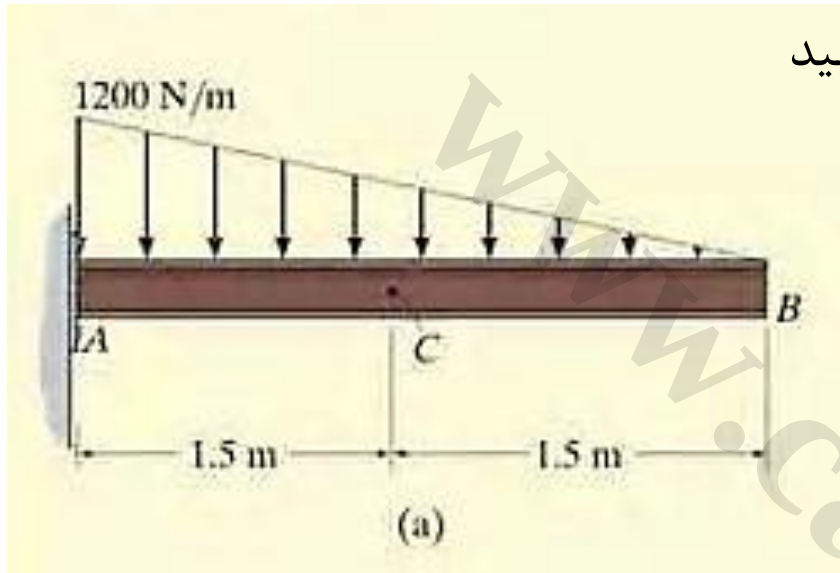
$$-p \times 2 - Q \times 4 + 6 \times B_y = 0$$

$$B_y = 13.5 \text{ KN}$$

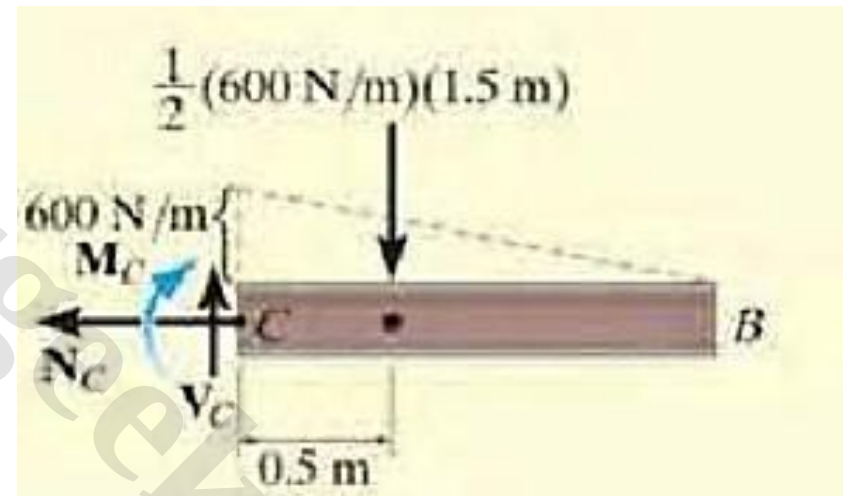
$$A_y = 13.5 \text{ KN}$$

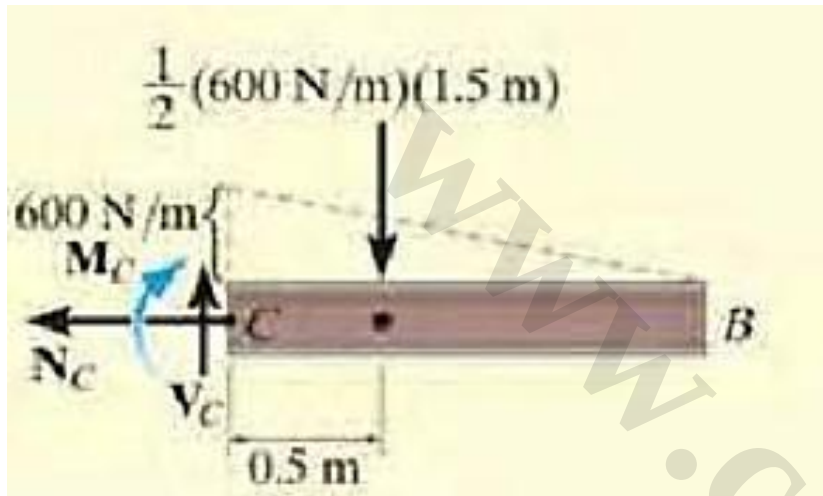
مثال ۳.

مقدار و جهت نیرو در هر یک از تکیه گاه ها را بیابید



$$w_C = (1200 \text{ N/m}) \left(\frac{1.5 \text{ m}}{3 \text{ m}} \right) = 600 \text{ N/m}$$





$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad N_C = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V_C - \frac{1}{2}(600 \text{ N/m})(1.5 \text{ m}) = 0$$

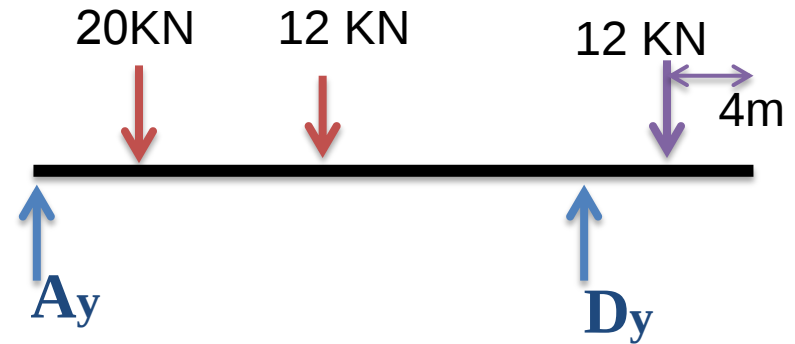
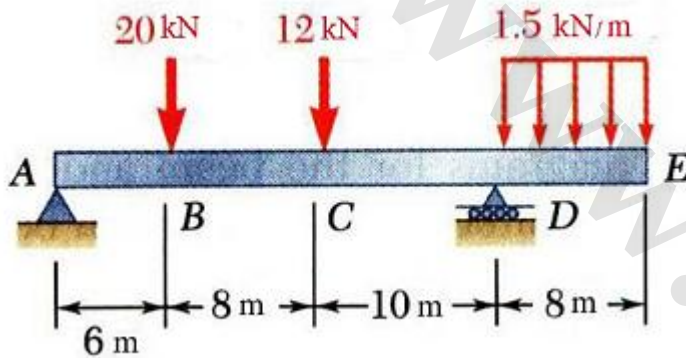
$$V_C = 450 \text{ N}$$

$$\zeta + \Sigma M_C = 0; \quad -M_C - \frac{1}{2}(600 \text{ N/m})(1.5 \text{ m})(0.5 \text{ m}) = 0$$

$$M_C = -225 \text{ N}$$

مثال ۳.

مقدار و جهت نیرو در هر یک از تکیه گاه ها را بیابید.



$$P = 1.5 \times 8 = 12 \text{ kN}$$

$$\sum F_y = 0 \quad A_y + B_y - 20 - 12 - 12 = 0$$

$$l = \frac{1}{2} \times 8 = 4 \text{ m}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$-20 \times 6 - 12 \times 14 + D_y \times 24 - 12 \times 28 = 0$$

$$D_y = 24 \text{ kN}$$

www.cargeek.ir

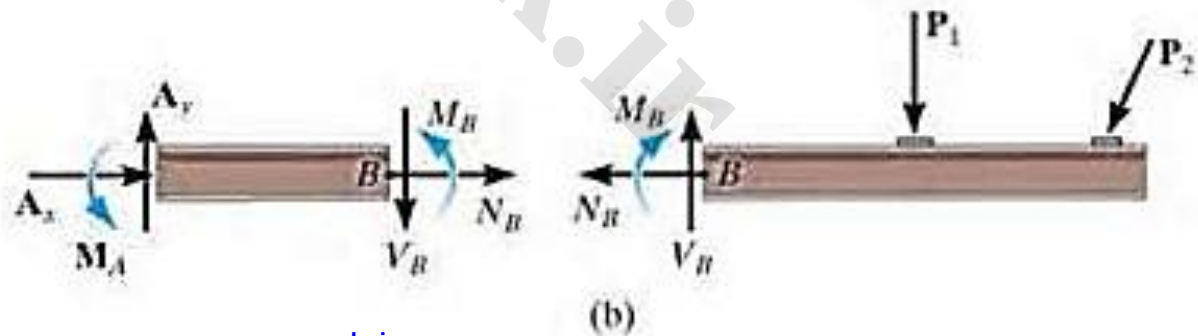
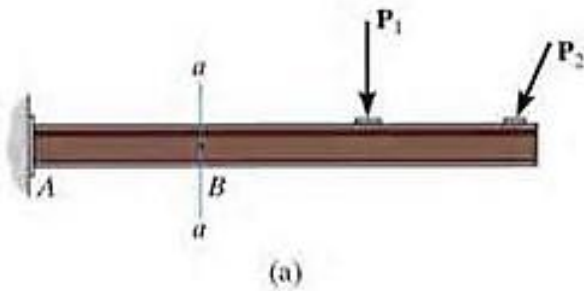
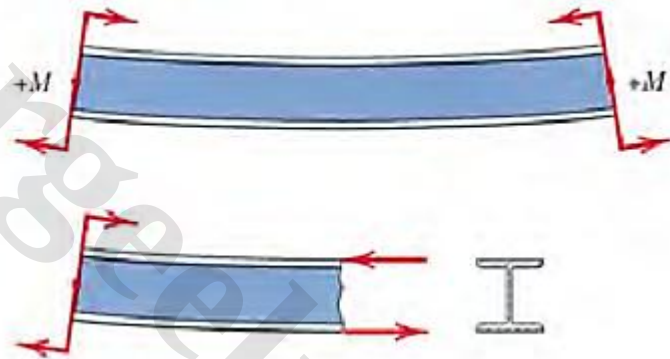
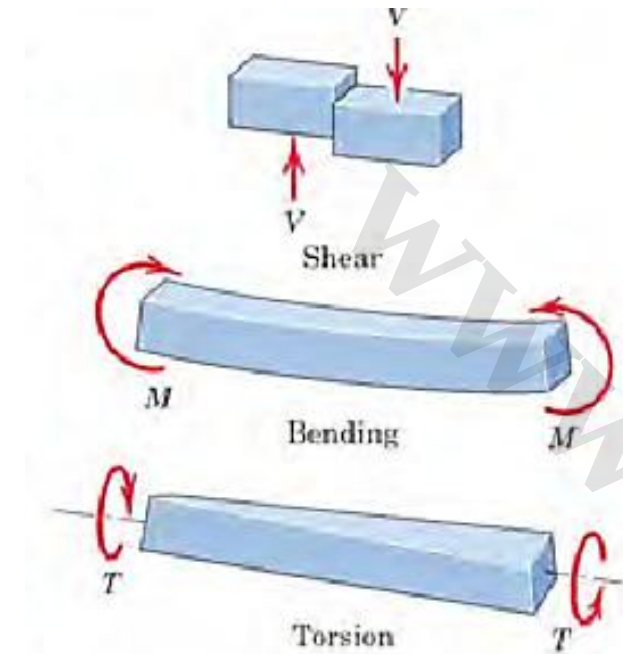
$$A_y = 20 \text{ kN}$$

نیروهای داخلی تیر

❖ نیروهای برشی

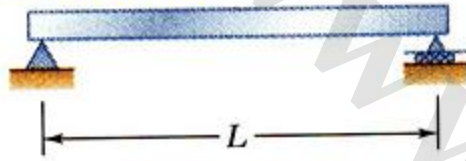
❖ نیروهای خمشی

❖ نیروهای پیچشی

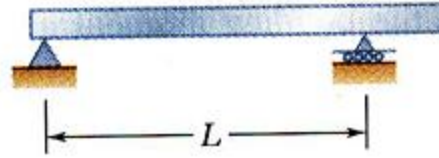


Forces in Beams and Cables

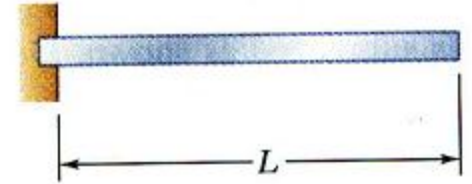
Statically
Determinate
Beams



(a) Simply supported beam

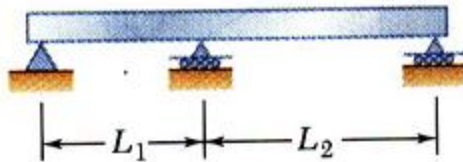


(b) Overhanging beam

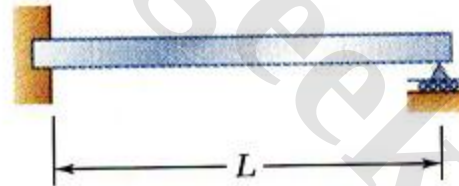


(c) Cantilever beam

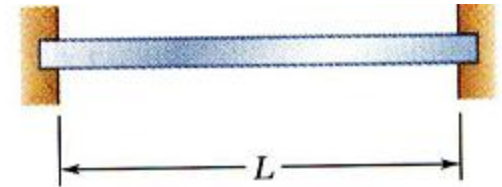
Statically
Indeterminate
Beams



(d) Continuous beam

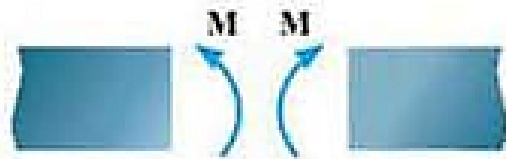
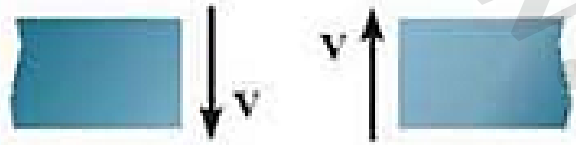
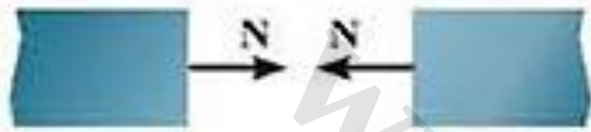


(e) Beam fixed at one end
and simply supported
at the other end

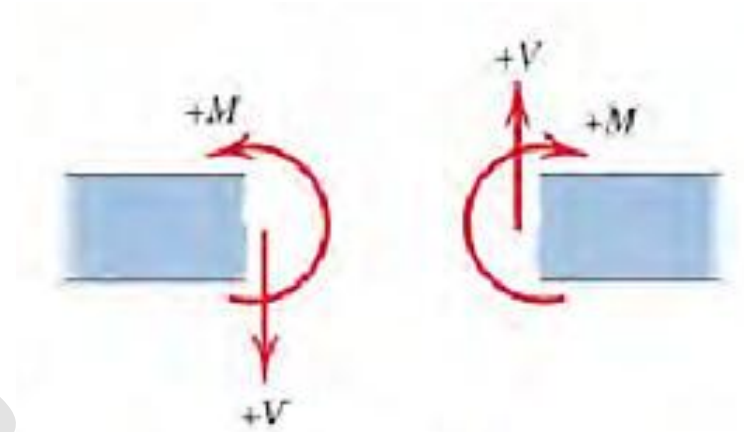


(f) Fixed beam

قانون برش در تیرها

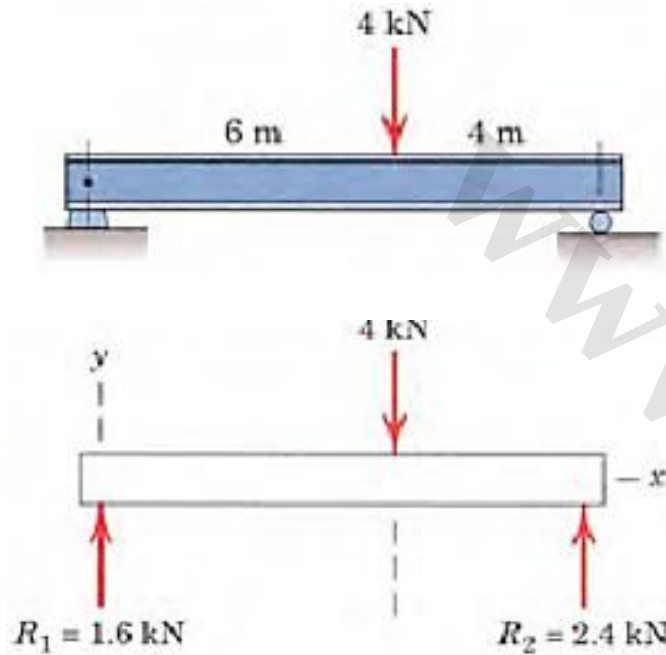


Positive moment

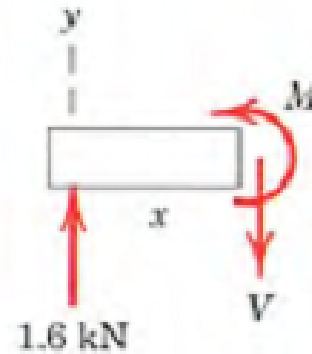


مثال ۴.

برای تیر نشان داده شده در شکل زیر توزیع نیروی برشی و گشتاور خمشی را بیابید.



$$R_1 = 1.6 \text{ kN} \quad R_2 = 2.4 \text{ kN}$$

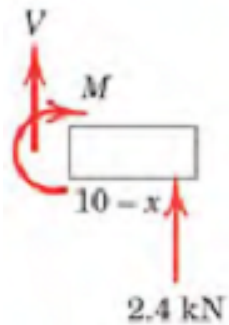
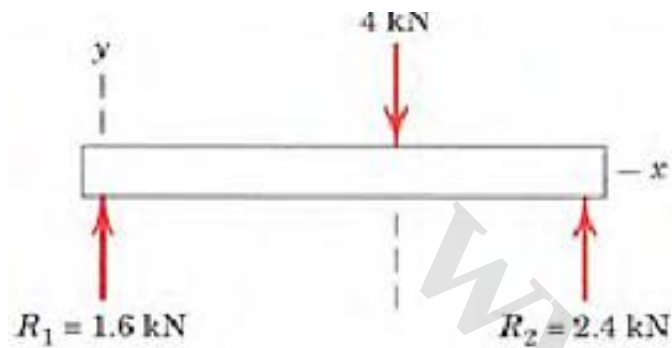


$$[\Sigma F_y = 0]$$

$$1.6 - V = 0 \quad V = 1.6 \text{ kN}$$

$$[\Sigma M_{R_1} = 0]$$

$$M - 1.6x = 0 \quad M = 1.6x$$

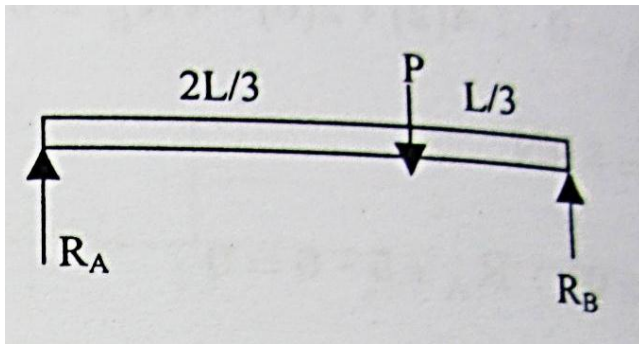
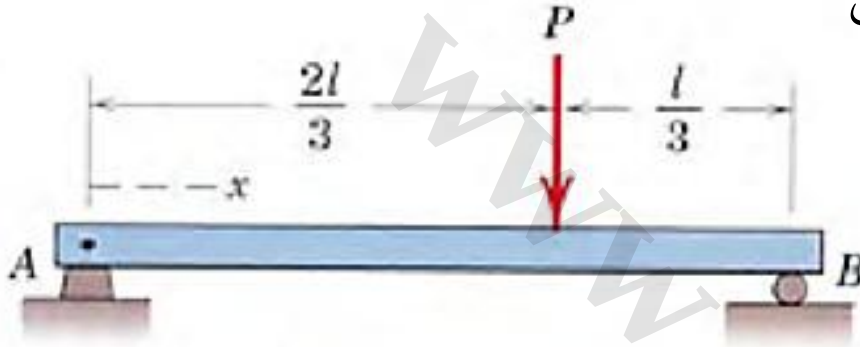


$$[\Sigma F_y = 0] \quad V + 2.4 = 0 \quad V = -2.4 \text{ kN}$$

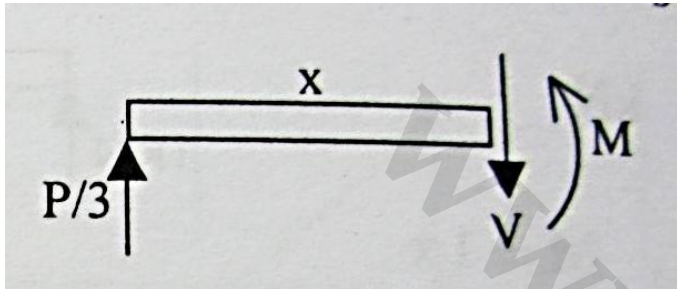
$$[\Sigma M_{R_2} = 0] \quad -(2.4)(10 - x) + M = 0 \quad M = 2.4(10 - x)$$

مثال ۵.

برای تیر نشان داده شده در شکل زیر توزیع نیروی
برشی و گشتاور خمشی را بیابید.

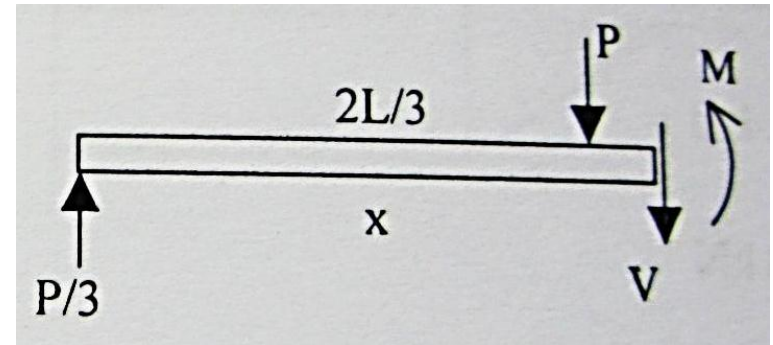


$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 : R_B l - P \frac{2l}{3} &= 0 \Rightarrow R_B = \frac{2}{3} P \\ + \uparrow \sum F = 0 : R_A &= \frac{1}{3} P \end{aligned}$$



$$0 < x < \frac{2l}{3} : + \uparrow \sum F = 0 \Rightarrow V = \frac{P}{3}$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M = \frac{P}{3} x$$



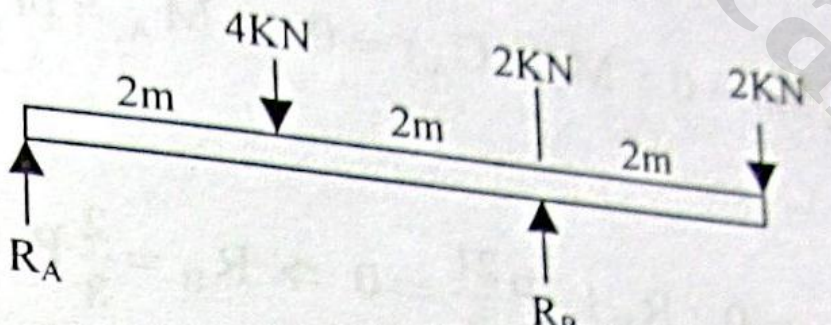
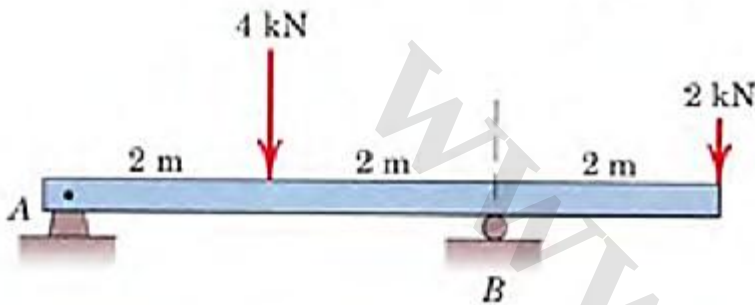
$$+ \uparrow \sum F = 0 : \frac{P}{3} - P - V = 0, V = -\frac{2P}{3}$$

$$\curvearrowright \sum M = 0 : M + P \left(x - \frac{2l}{3} \right) - \frac{P}{3} x = 0$$

$$M = \frac{2P}{3} (1 - x)$$

مثال ۶.

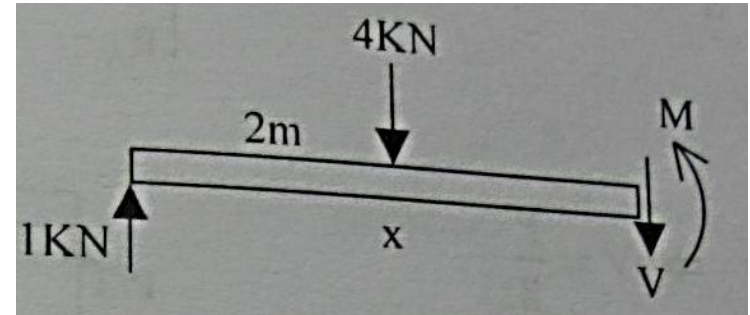
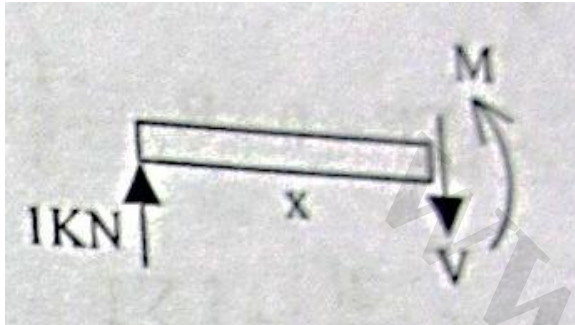
برای تیر نشان داده شده در شکل زیر توزیع نیروی
برشی و گشتاور خمشی را بیابید.



$$\sum M_A = 0 : 4(2) + 2(6) - 4R_B = 0$$

$$\Rightarrow R_B = 5 \text{ kN}$$

$$\sum F = 0 : R_A + 5 - 6 = 0$$



$$V = 1 \text{ kN} , \quad M = 1x$$

$$2 < x < 4 \text{ m} :$$

$$V = -3 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : -8 + 3x + M = 0 , \quad M = 8 - 3x$$

$$4 < x < 6 \text{ m} :$$

$$V = 2 \text{ kN}$$

$$\sum M = 0 : -M - 2(6 - x) = 0 \Rightarrow M = -2(6 - x)$$