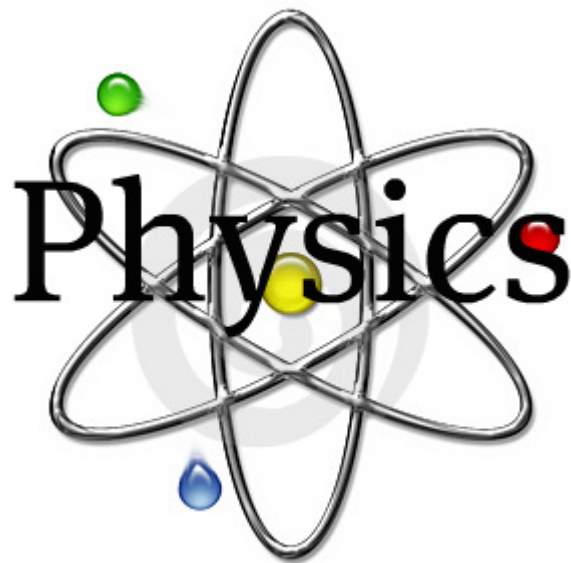


وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

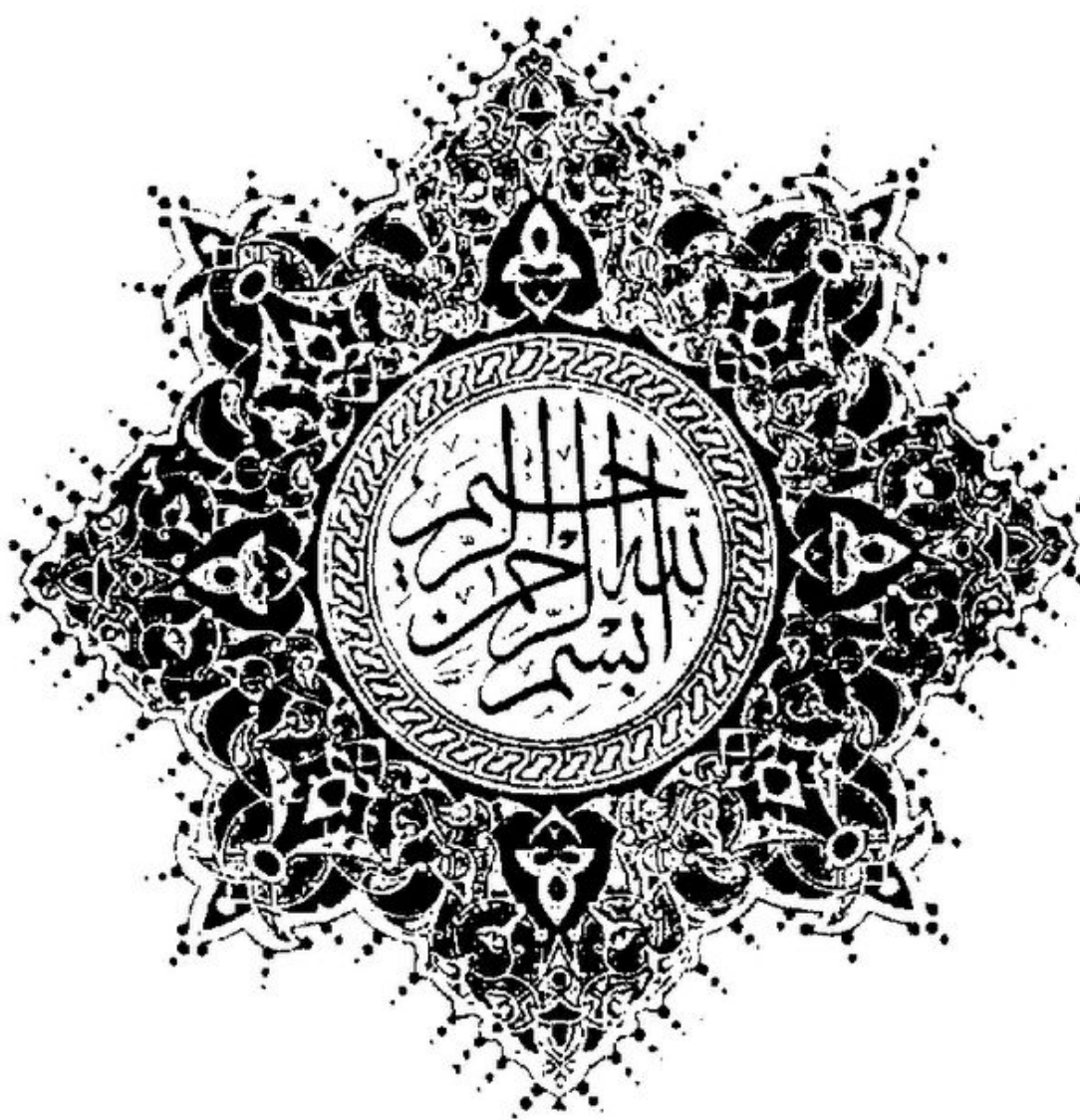
دانشگاه فنی و حرفه‌ای

دانشکده فنی کشاورزی مراغه

فیزیک مکانیک



مدرس: بهمن رحمتی نژاد



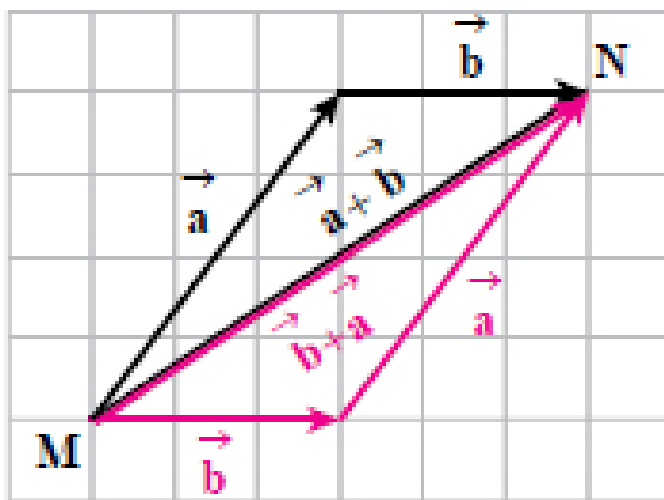


فهرست

.....	فصل اول: کمیت های برداری
.....	فصل دوم: سینماتیک
.....	فصل سوم: حرکت دو بعدی یا حرکت صفحه ای
.....	فصل چهارم: سقوط آزاد
.....	فصل پنجم: حرکت پرتابی
.....	فصل ششم: حرکت دایره ای
.....	فصل ششم: حرکت نوسانی
.....	فصل ششم: قوانین حرکت
.....	فهرست منابع



کمیت های برداری





تعریف مکانیک

شاخه ای از علم فیزیک که حالت سکون یا حرکت اجسام را تحت اثر نیروهای وارد بر آن مورد بررسی قرار می دهد. و در حالت کلی به دو گروه تقسیم بندی می شود.

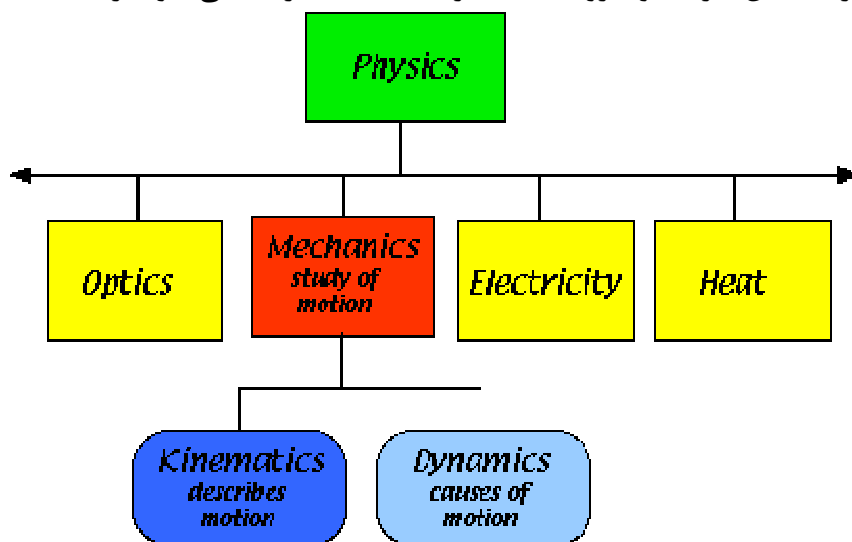
الف: استاتیک (حالت سکون)

تحلیل نیروهای متعادل در حالت کششی یا واکنشی

ب: دینامیک (حالت حرکت)

قسمت دینامیک به دو زیر شاخه سینماتیک و سنیتیک تقسیم بندی می شود که در ذیل تعریفی از هر کدام بیان می شود

- سینماتیک: حرکت اجسام را بدون اشاره به نیروهای عامل حرکت توصیف می کند.
- سنیتیک: رابطه بین حرکت و نیروهای متناظری که باعث حرکت می شوند را مطالعه می کند.



تعریف مفاهیم اصلی

فضا: میدان هندسی است که توسط اجسام اشغال می گردد و موقعیت این اجسام را نسبت به یک دستگاه مختصات بیان می کند.

زمان: معیار سنجش توالی وقوع وقایع بوده و بیشتر در دینامیک مطرح می شود.

جرم:

۱. معیار مقاومت جسم در مقابل تغییر سرعت می باشد.
۲. مقدار ماده موجود در ماده را گویند.
۳. در استاتیک آن خاصیت از جسم که باعث ایجاد جاذبه متقابل با سایر اجسام می شود. جرم نامیده می شود.



نیرو:

کنش یک جسم بر جسمی دیگر را گویند که این کنش به سه عامل بستگی دارد

۱. مقدار آن
۲. راستای عمل آن
۳. نقطه اثر آن

ذره

جسمی را گویند که ابعاد آن ناچیز باشد. از نظر ریاضی، ذره جسمی است که ابعاد آن به سوی صفر میل می کند.

جسم صلب

جسمی صلب تلقی می شود که حرکت نسبی بین اجزاء آن، برای هدف مورد نظر، قابل چشم پوشی باشد.

قوانین پایه مکانیک

الف) قوانین نیوتن:

قانون اول: اگر برآیند نیروهای وارد بر یک ذره صفر شود ذره ساکن می ماند و یا با سرعت یکنواخت به

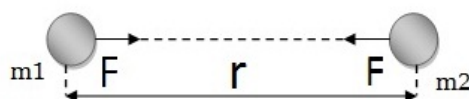
حرکت خود ادامه می دهد. (قانون اول تعادل نیروهاست و نتیجه ای از قانون دوم است). $\sum F = 0$

قانون دوم: شتاب حرکت یک ذره متناسب با برآیند نیروهای وارد بر آن و هم جهت با آن است. $F = m.a$

قانون سوم: نیروهای عمل و عکس العمل به وجود آمده، بین دو جسم مساوی و در خلاف جهت هم و در یک راستا وارد می شوند.

نکته: دو نیروی متقابل بین دو جسم در حال تماس، هم مقدار، هم امتداد و مختلف الجهت می باشند.

ب) قانون جاذبه گرانشی (قانون جاذبه عمومی نیوتن)



دو ذره در راستای خط واصل خود با نیرویی به سمت یکدیگر جذب می شوند که با حاصل ضرب جرمشان نسبت مستقیم و با مربع فاصله شان نسبت عکس دارد.

$$f \propto \frac{1}{r^2} \quad f \propto m_1 \times m_2$$

$$f = G \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

که در این فرمول G ثابت جاذبه بوده و مقدار آن برابر



$$G = 6.673 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2} \quad OR \quad \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

مثال: اثبات کنید واحد G (ثابت جاذبه) برابر $\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ است.

حل :

با توجه به اینکه $f = G \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$ است داریم.

$$f = G \frac{m_1 \times m_2}{r^2} \rightarrow G = \frac{f \cdot r^2}{m_1 \cdot m_2}$$

حال واحد هر کدام را جایگذاری می کنیم.

$$G = \frac{N \cdot m^2}{kg \cdot kg} = \frac{(kg \cdot \frac{m}{s^2}) \cdot m^2}{kg^2} = \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

مثال: دو جسم به جرمهای 2 kg و 5 Kg در فاصله 5 m هم قرار دارند چه نیروی گرانشی نیوتنی بین آنها وجود دارد

$$f = G \frac{m_1 \times m_2}{r^2} \rightarrow F = 6/67 \times 10^{-11} \frac{2 \times 5}{5^2} = 2/66 \times 10^{-11} N$$

توجه: همانطور که ملاحظه می شود نیروی گرانشی جهانی نیوتن مقدار بسیار کوچکی دارد مگر آنکه جرم اجسام خیلی بزرگ باشد مانند جرم زمین و خورشید و ...

مثال: جرم زمین و خورشید به ترتیب برابر $6 \times 10^{24} kg$ و $2 \times 10^{30} kg$ است. اگر فاصله متوسط زمین تا خورشید $1/5 \times 10^{11} m$ باشد نیروی گرانشی که خورشید بر زمین وارد می کند چقدر است.

$$f = G \frac{m_1 \times m_2}{r^2} \rightarrow F = 6/67 \times 10^{-11} \frac{6 \times 10^{24} \times 2 \times 10^{30}}{(1/5 \times 10^{11})^2} = 3/55 \times 10^{22} N$$

نیروی وزن: اجسام همواره به سوی زمین جذب می شوند که این نیروی جاذبه، همان نیروی گرانش نیوتن است که بین زمین و هر جسمی که روی آن قرار دارد وجود دارد. فرض کنید جسمی به جرم m روی زمین قرار دارد. جرم زمین را M_e و شعاع زمین را R_e در نظر می گیریم. وقتی جسمی روی زمین واقع باشد فاصله مرکز آن تا مرکز زمین همان شعاع زمین R_e است. بنابراین نیروی گرانشی جهانی که بین جسم و زمین واقع است بصورت مقابل خواهد بود.

$$F = G \frac{M_e \times m}{R_e^2} = mg$$



مثال: اگر شتاب جاذبه زمین در یک نقطه برابر $g = 9/8 \frac{N}{kg}$ باشد و جرم زمین $6 \times 10^{24} Kg$ باشد اندازه شعاع زمین را محاسبه کنید.

$$F = G \frac{M_e \times m}{R_e^2} = mg$$

با حذف m از طرفین معادله بالا داریم

$$R_e = \sqrt{\frac{G \times M_e}{g}} = \sqrt{\frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6 \times 10^{24}}{9/8}} \approx 6.4 \times 10^6 m$$

مقدار استاندارد g :

$$SI \rightarrow g = 9.806 \frac{m}{s^2}$$

$$US \rightarrow g = 32.174 \frac{ft}{s^2}$$

تغییرات مقدار g تحت تاثیر ارتفاع:

$$\frac{g}{g'} = \left[\frac{R_e + h}{R_e} \right]^2$$

g : استاندارد

g' : تحت ارتفاع

R_e : شعاع زمین

h : ارتفاع مورد نظر

مثال: مردی به جرم $80kg$ در داخل هواپیمایی که در مدار دایره ای با فاصله $250km$ از زمین حرکت می کند، نشسته است. وزن شخص در صورتی که شعاع زمین $R_e = 6400km$ در نظر گرفته شود چقدر است؟
حل: ابتدا باید مقدار g در ارتفاع مورد نظر بدست آید.

$$\frac{g}{g'} = \left[\frac{R_e + h}{R_e} \right]^2$$

$$h = 250km$$

$$R_e = 6400$$

$$\frac{9/8}{g'} = \left(\frac{6400 + 250}{6400} \right)^2 \rightarrow g' = 9.086$$

$$w = m \cdot g' = 80 \times 9.086 = 726.9N$$

تعریف کمیت: به تمامی پدیده های قابل اندازه گیری موجود در طبیعت کمیت گفته می شود.

تعریف یکا: معیار و مقیاس و مبنایی است که اندازه گیری هر کمیت براساس آن صورت می گیرد.



دانشگاه فنی و حرفه ای (دانشکده فنی کشاورزی مراغه) گروه مکانیک

شرایط انتخاب یکا را بنویسید :

الف: دسترسی پذیر باشد

ب: دقت کافی داشته باشد

ج: تغییر ناپذیر و ثابت باشد

اندازه گیری چیست؟ مقایسه هر کمیت با یکای آن تا مشخص شود که آن کمیت چند برابر یکاست را اندازه گیری می گوئیم.

ابعاد و واحدها

ابعاد در حالت کلی به دو دسته تقسیم بندی می شوند

الف: اصلی: ابعادی که مستقل از بقیه ابعاد هستند مانند طول، جرم، زمان و نیرو

ب: فرعی: ابعادی که از ابعاد اصلی گرفته می شوند مانند چگالی، حجم، فشار و ...

آحاد در علم مکانیک به چند روش (سیستم) بیان می شود سیستم های SI ، CGS ، آمریکایی و انگلیسی از آن جمله اند.

	SI (MKS)	CGS	انگلیسی	آمریکایی
نیرو	N	dyn	$Pondal$	lbf
طول	M	cm	ft	ft
زمان	sec	sec	sec	sec
جرم	Kg	g	lbm	$lbm-Slug$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \frac{ft}{s^2} \\ 1 \frac{M}{s^2} \\ 1 \frac{ft}{s^2} \end{array} \right\} \text{ شتاب } \left\{ \begin{array}{l} 1Lbf \\ 1N \\ 1Pondal \end{array} \right\} \text{ جرمی است که تحت نیروی } \left\{ \begin{array}{l} 1slug \\ 1Kg \\ 1Lbm \end{array} \right\} \text{ جرم پیدا می کند .}$$

$$1 slug = 32.2 Lbf$$

$$1 Lbf = 32.2 pondal$$

واحدهای دستگاه SI و ابعاد آنها

علامت اختصاری	واحد	کمیت
M	$Meters$ (متر)	$Length$ (طول)
S	$Second$ (ثانیه)	$Time$ (زمان)



دانشگاه فنی و حرفه ای (دانشکده فنی کشاورزی مراغه) گروه مکانیک

Kg	$Kilogram$ (کیلوگرم)	$Mass$ (جرم)
N	$Newton$ (نیوتن)	$Force$ (نیرو)
N	$Newton$ (نیوتن)	$Weight$ (وزن)
Kg/m^3	$Kilogram/meter^3$ (کیلو گرم بر متر مکعب)	$Density$ (جرم مخصوص)
t	$1000 Kilogram$ (۱۰۰۰ کیلو گرم)	$Metric ton$ (تن متریک)
$N.m=j$	$Newton.meter=joule$ (ژول = نیوتن متر)	$Work$ (کار)
$N.m=j$	$Newton.meter=joule$ (ژول = نیوتن متر)	$Energy$ (انرژی)

ضرایب تبدیل از دستگاه انگلیسی به دستگاه SI :

ضرب کنید در	به	برای تبدیل از
۰/۳۰۴۸	متر m	فوت ft
۰/۳۵۶	ژول	پوند - فوت
۱۰۶۰۹	متر	مایل
۴/۴۴۸	نیوتن	پوند
۱۴/۵۹	کیلوگرم	اسلاگ
۴۴۴۸	نیوتن	کیلو پوند

توجه: سیستم SI را سیستم مطلق و US و Fps را سیستم گرانشی گویند.

SI : Standard International

FPS : Foot-Pound-Second

MKS : Meter-Kilogram-Second

CGS : Centimeter-Gram-Second

تعریف های طول:

الف: به فاصله $\frac{1}{10000000}$ استوا تا قطب شمال در نصف النهار که از شهرپاریس می گذرد را یک متر می گویند.

ب: مضربی از طول موج نارنجی قرمز اتم خاصی از ایزوتوپ کریپتون را به عنوان یک متر تعریف کرده اند.



در یک ثانیه مسافتی که نور می پیماید برابر با 299792458 یا 34108 است لذا به عنوان جدیدترین تعریف یکای متری می توان گفت :

جدیدترین و آخرین تعریف : به مسافتی که نور در زمان $\frac{1}{3 \times 10^8} s$ می پیماید را یک متر می گویند.

نکته : یک متر را بصورت نمونه در میله ای به جنس پلاتین ایریدیوم که بر روی آن توسط طلا دو علامت مشخص شده انتخاب کرده اند و فاصله این دو علامت در دمای صفر درجه سلیسیوس برابر یک متر است.

تعریف های زمان:

تعریف اولین یکای زمان : به فاصله زمانی یک $\frac{1}{86400}$ شبانه روز یک ثانیه گفته می شود.

آخرین تعریف جدیدترین تعریف: به مدت زمان مشخص از تعداد نوسانات
عدد _____ از اتم سزیم را یک ثانیه می گویند.

9192631770

تعریف جرم :

تعریف یکای جرم: مقدار جرمی که یک لیتر $1000 cm^3$ آب خالص در دمای 4 درجه سلیسیوس دارد یک کیلوگرم گویند.

پیشوندهای یکاها: برخی از اعداد یکاها چون دهها برابر کوچکتر یا بزرگتر از یک هستند لذا باید توسط پیشوندهایی که در پشت یکا نوشته می شود مشخص می گردند تا هم خواندن و هم نوشتن آنها ساده شود.

	علامت		
10^1	دکا da	دسی d	10^{-1}
10^2	هکتو h	سانتی c	10^{-2}
10^3	کیلو K	میلی m	10^{-3}
10^6	مگا M	میکرو μ	10^{-6}
10^9	گیگا G	نانو n	10^{-9}
10^{12}	ترا T	پیکو p	10^{-12}
10^{15}	پنتا p	فمتو f	10^{-15}
10^{18}	اگزا E	آتو a	10^{-18}



کمیت‌های نرده ای (اسکالر): (Scalar Quantities): کمیت هایی که تنها با داشتن مقدار و بزرگی آنها می توان آنها را مشخص کرد را کمیات نرده ای یا اسکالر گویند مثل جرم، زمان، دما، چگالی، انرژی، فشار

تعریف کمیت های برداری: (Vectors Quantite): کمیت‌هایی که علاوه بر مقدار و بزرگی دارای جهت می باشند و از قاعده جمع برداری پیروی می کنند را کمیات برداری می گویند. مثل : جابجایی، سرعت، شتاب، نیرو

جابجایی : پاره خط مستقیم و جهت داری است که ابتدای مسیر حرکت را به انتهای مسیر حرکت وصل می کند.

نکته : هر بردار را با یک علامت و حرف انگلیسی نشان می دهند که در بالای آن پیکان داردواگر بزرگی آن مورد نظر باشد علامت را بدون پیکان بکار برده و یا آن را بین دو خط شبیه قدر مطلق قرار می دهیم. $|a|$ یا a

ویژگی یک بردار:

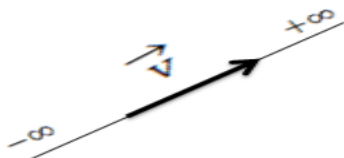
- (۱) دارای اندازه
- (۲) دارای راستا (امتداد)
- (۳) دارای جهت (سو)

امتداد یا راستای بردار به ۳ طریق مشخص می گردد:

- (۱) با یکی از زوایا نسبت به افق یا قائم
- (۲) نسبت به شیب امتداد داده شده
- (۳) مختصات نقاط ابتدا و انتهای بردار داده شده

خط حامل یک بردار:

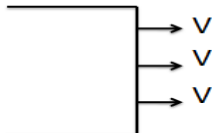
خط حامل یک بردار، خط فرضی مستقیمی است که از دو انتها نامحدود است و بردار بر روی این خط قرار می گیرد.





برابری دو بردار:

دو بردار را مساوی گویند که هم راستا، هم جهت و هم اندازه باشند. به عنوان مثال اجزاء ثابت اتومبیلی که با سرعت $\vec{V}$ در حرکت است.



حالت های مختلف یک بردار:

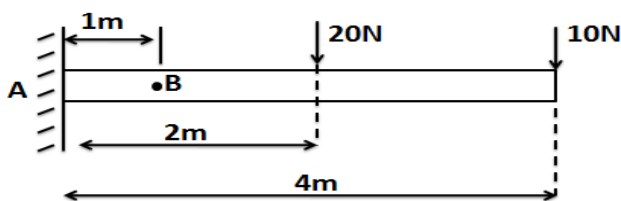
الف) آزاد (Free Vector): برداری است که به نقطه اثرش بستگی ندارد و می تواند به موازات خودش جابجا شود مانند بردار کوپل یا زوج.

ب) لغزان (Transmissible Vector): برداری است که فقط می تواند در امتداد خط حامل خودش جابجا شود.

ج) ثابت (مقید) (Bound Vector): برداری که دارای نقطه اثر و راستای مشخص است.

هم ارزی دو بردار

دو بردار را هم ارز گویند که در شرایط معین دارای اثرات یکسان باشند.



گشتاور دو نیروی $10N$ و $20N$ حول نقطه A $40N-m$ می باشد، بنابراین دو نیرو هم ارز هستند ولی همین دو نیرو نسبت به گشتاور حول نقطه B هم ارز نیستند. زیرا دارای گشتاوری نابرابر حول نقطه B هستند. بنابراین برابری دو بردار به خود بردارها مربوط است ولی هم ارزی دو بردار به اثرات آنها.

طبقه بندی نیروها:

۱) **نیروهای تماسی:** از طریق تماس مستقیم فیزیکی بین دو جسم به وجود می آید.

۲) **نیروهای حجمی:** از طریق قرار گرفتن یک جسم درون یک میدان (جاذبه زمین)، نیروی وزن، نیروی مغناطیسی و غیره به وجود می آید.

نیروهای همرس:

دو یا چند نیرو را هنگامی همرس در یک نقطه می گوئیم که خطوط اثر آنها در آن نقطه همدیگر را قطع کنند.



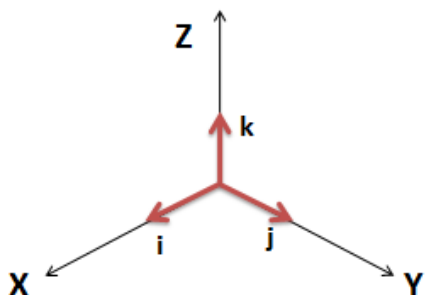
مقدمات جبر برداری:

مقدار بردار و ضرب بردار در اسکالر

مقدار یک کمیت برداری، نشان دهنده بزرگی بردار می باشد، بدون در نظر گرفتن راستا و جهت بردار. بنابراین همیشه یک عدد مثبت خواهد بود. مثلاً وقتی گفته می شود اندازه یک بردار ۵۰ است، یعنی این بردار در راستای x, y, z و یا هر محور دیگر در جهت دلخواه (مثبت یا منفی) آن محور دارای اندازه ۵۰ است.

روش نشان دادن بردار A و بزرگی (مقدار) بردار A

فرض کنید بردار A دارای مولفه هایی در جهت x, y, z باشد در این صورت بردار A به صورت:



$$\vec{A} = \vec{X}i + \vec{Y}j + \vec{Z}k$$

مقدار A $|\vec{A}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

سوال: چهار برداری $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ به صورت روبرو می باشد در این صورت بزرگی و حاصل برداری عبارت های خواسته شده را بدست آورید؟

$$\vec{d} = 6\vec{i} + 7\vec{j} \quad \vec{c} = 4\vec{i} + 5\vec{j} \quad \vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \quad \vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

الف) $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ (ب) $\vec{f} = (\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} + \vec{d})$ (ج) $\vec{g} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}$

الف) $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{i} + 7\vec{j}$

$$\vec{e} = 2\vec{i} + 7\vec{j}$$

$$|e| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$$

(ب)

$$\vec{f} = (\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{c} + \vec{d}) = (2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{i} + 2\vec{j}) - (4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{i} + 7\vec{j})$$

$$(4\vec{i} + 5\vec{j}) - (-2\vec{i} + 2\vec{j}) \Rightarrow \vec{f} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$$

برداري

$$|f| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$$

(ج)



$$\vec{g} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d} \Rightarrow \vec{g} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{i} - 7\vec{j}$$

$$\vec{g} = 2\vec{i} - \vec{j}$$

$$|\vec{g}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

ضرب بردار $\vec{A}$ در اسکالر m (یک عدد است).

الف) بردار $\vec{A}$ بدون تغییر جهت، m برابر می شود اگر $m > 0$ باشد.

ب) بردار $\vec{A}$ تبدیل به بردار $\vec{0}$ خواهد شد، اگر $m = 0$ باشد.

ج) بردار $\vec{A}$ همراه با تغییر جهت، m برابر خواهد شد اگر $m < 0$ باشد.

تعریف بردار برآیند: برداری است که برابر با حاصل جمع برداری دو یا چند بردار باشد را بردار برآیند گویند.

جمع دو بردار

حالت خاص اول

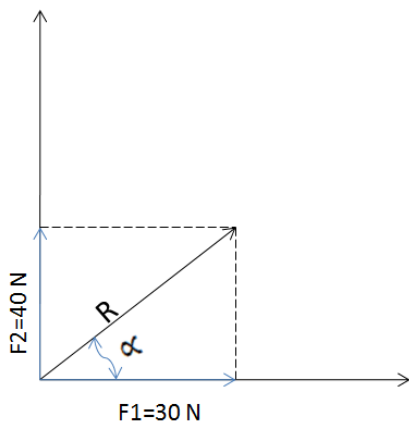
اگر دو بردار با هم موازی باشند برآیند یا جمع آنها همان جمع عددی آنها است.



$$A + B = B + A = 30 + 50 = 80 \text{ N}$$

حالت خاص ۲

دو نیرو بر هم عمود باشند. برآیند این دو نیرو توسط رابطه فیثاغرس بدست می آید.



$$R = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ N}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$$

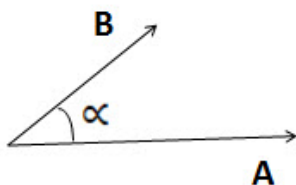
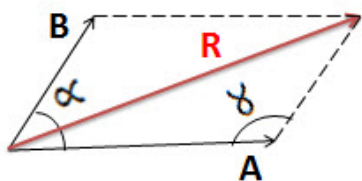
جمع بردارها (حالت عمومی):

(۱) روش متوازی الاضلاع

(۲) روش مثلث

(۳) روش چند ضلعی

۱) **متوازی الاضلاع:** بردار ها را می توان با استفاده از قانون متوازی الاضلاع جمع کرد. حاصل دو بردار را اصطلاحاً برآیند می گویند. طبق قانون متوازی الاضلاع، برآیند دو بردار، قطر متوازی الاضلاع است که آن دو بردار با یکدیگر می سازند برای یافتن برآیند دو بردار از رابطه کسینوس ها می توان استفاده نمود.

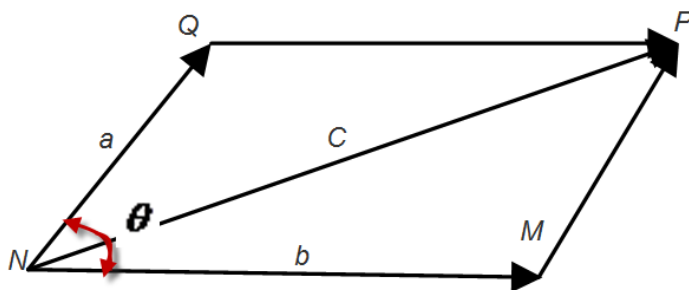


$$R^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma$$

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \alpha$$

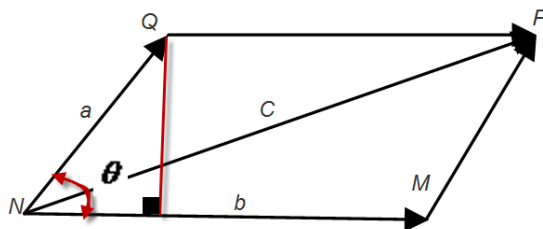
سؤال: نشان دهید و اثبات کنید که اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با یکدیگر زاویه θ بسازند در این صورت

بردار برآیند آنها یعنی c از رابطه $C = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$ بدست می آید؟



با توجه به مثلث های MNP و QNP داریم $y = a \sin \theta$ و $x = a \cos \theta$

مثلث قائم الزاویه ای را تشکیل می دهیم و در این صورت داریم $C^2 = y^2 + (b + x)^2$



$$c^2 = y^2 + (b + x)^2 \Rightarrow c^2 = (a \sin \theta)^2 + (b + a \cos \theta)^2$$

$$c^2 = a^2 \sin^2 \theta + (b^2 + a^2 \cos^2 \theta + 2ab \cos \theta) \Rightarrow$$

$$c^2 = a^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + b^2 + 2ab \cos \theta \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta \Rightarrow$$

$$C = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

خواص متوازی الاضلاع:

اضلاع روبه رو با هم برابرند.

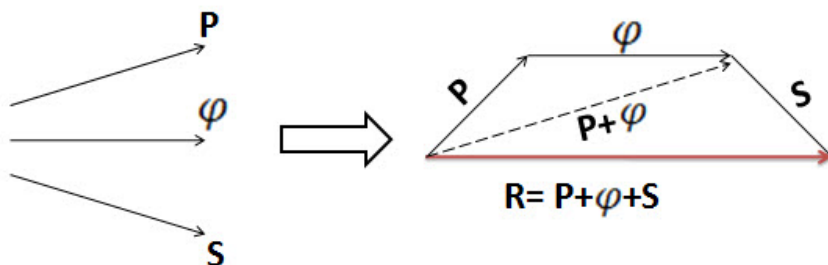
زوایای روبه رو با هم برابرند.

زوایای مجاور مکمل هم هستند.

نکته: اگر ۲ نیرو $F_1 = F_2$ باشد بردار R زاویه بین ۲ نیرو را نصف می کند.

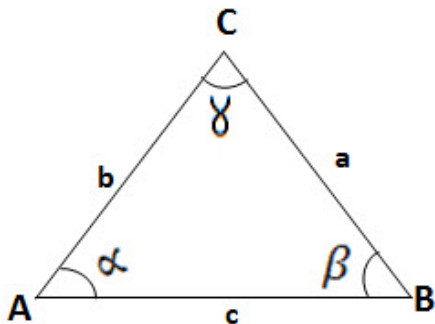
(۲) روش مثلث: روش ترسیمی دیگری برای جمع بردارهاست طبق این قانون، برآیند دو بردار، ضلع سوم مثلثی است که دو بردار با یکدیگر می سازد.

(۳) روش چند ضلعی: برآیند چند بردار را می توان طبق روش چند ضلعی تعیین نمود. در این روش از نوک بردار اول مساوی بردار دوم و از نوک بردار دوم مساوی بردار سوم و الی آخر رسم می شود. برداری که ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل کند بردار برآیند می باشد.



نکته: اگر چند ضلعی بردارها، یک چند ضلعی بسته باشد، برآیند آن بردارها مساوی صفر است.

قانون سینوس ها و کسینوس ها در یک مثلث:



قانون سینوس ها:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

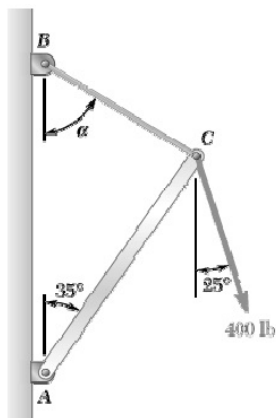
قانون کسینوس ها:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

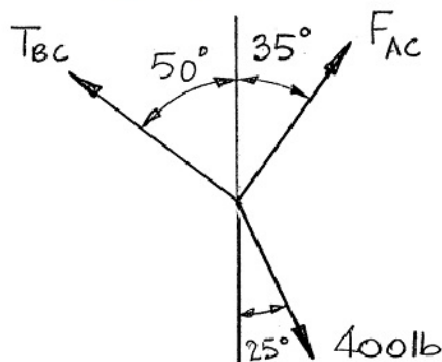
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab \cos \gamma$$

مثال: در شکل زیر اگر $\alpha = 50^\circ$ درجه فرض شود نیروهای داخلی AC و BC را بدست آورید.



نمودار جسم آزاد نیروهای وارد بر میله ها را ترسیم می کنیم.

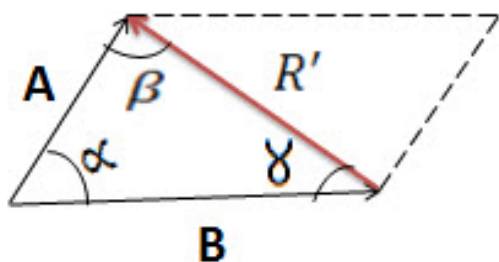


با توجه به رابطه سینوس ها داریم:

$$\frac{F_{AC}}{\sin 155} = \frac{T_{BC}}{\sin 120} = \frac{400 \text{ lb}}{\sin 85}$$

$$F_{AC} = 169.7 \text{ lb} \quad , \quad T_{BC} = 348 \text{ lb}$$

تفریق بردارها: حاصل تفریق بردار A منهای بردار B مساوی حاصل جمع بردار A با بردار $-B$ می باشد.

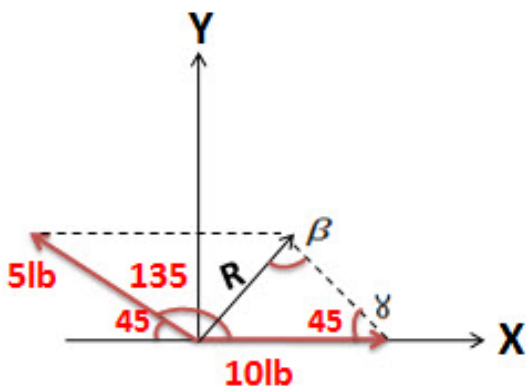


$$R'^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \alpha$$

مثال: نیروهای موثر بر ذره واقع در مبدأ دستگاه مختصات دو بعدی را جمع کنید. یکی از نیروها مقدار 10 Lb دارد و در جهت مثبت x ها اثر می کند، حال آنکه نیروی دیگر مقدار 5 Lb دارد و با محور x ها زاویه 135° می سازد و در جهت دور شدن از مبدأ مختصات است.



حل:



$$R^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma$$

$$R^2 = 5^2 + 10^2 - [2 \times 5 \times 10 \cos 45] = 100 + 25 - 50\sqrt{2} \Rightarrow R = 7.37 \text{ lb}$$

روش دوم:

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos \theta$$

θ : زاویه بین دو نیرو

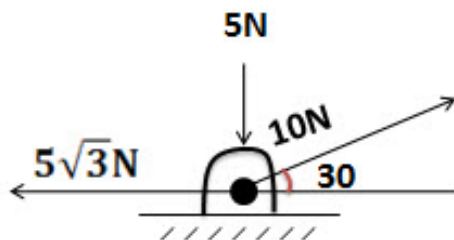
$$R^2 = 5^2 + 10^2 + [2 \times 5 \times 10 \cos 135] = 7/37lb$$

مثال: در مثال بالا زاویه بردار برآیند را نسبت به محور x ها حساب کنید.

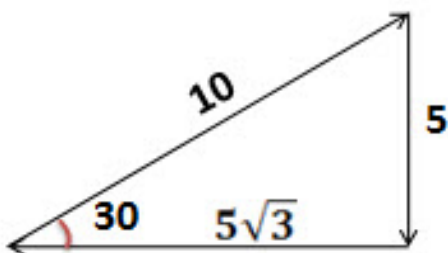
حل: با توجه به شکل بالا و استفاده از رابطه سینوس ها داریم:

$$\frac{R}{\sin 45} = \frac{10}{\sin \beta} = \frac{5}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{7/37}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{10}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{5\sqrt{2}}{14/74} \Rightarrow \alpha = 28/6^\circ$$

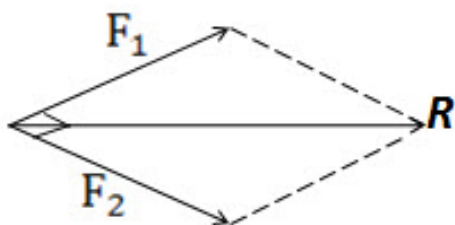
مثال: برآیند نیروی وارد بر تکیه گاه زیر را به روش ترسیمی حساب کنید.



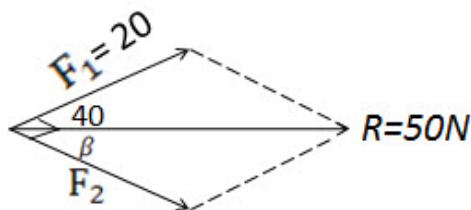
حل: چون چند ضلعی نیروها یک چند ضلعی بسته است پس می توان نتیجه گرفت برآیند نیروها صفر است.



نکته: اگر برآیند نیروی F_1 و F_2 بردار R باشد F_1 و R مقادیر ثابت باشند F_2 زمانی min است که زاویه بین F_2 بردار 90° درجه باشد.



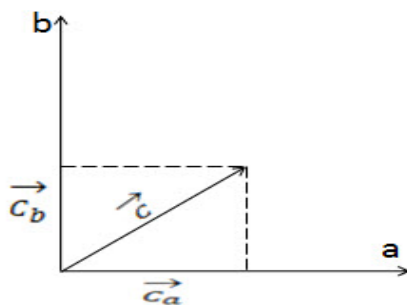
مثال: برآیند ۲ نیروی $F_1 = 20N$ و F_2 برابر $R = 50N$ است برای اینکه F_2 min شود β را پیدا کنید؟



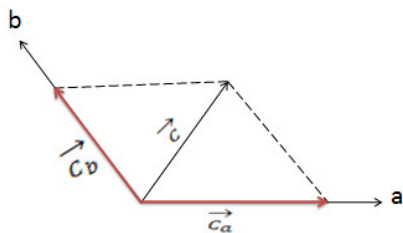
$$\beta = 90 - 40 = 50$$

تجزیه یک بردار به مؤلفه ها:

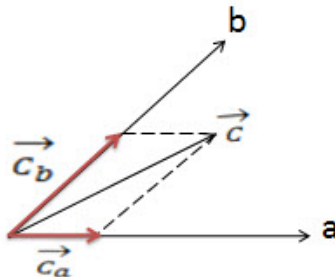
همان طور که جمع دو بردار، یک بردار سوم را نتیجه می دهد به طور بالعکس می توان طبق قانون متوازی الاضلاع یا مثلث، یک بردار را به دو مؤلفه و یا مؤلفه های بیشتر تجزیه کرد. برای تجزیه یک بردار بر روی دو امتداد یا دو راستا، کافی است از انتهای بردار، خطوطی به موازات هر کدام از راستاها رسم کرد. تا هر راستا را در یک نقطه قطع کرده و بدین وسیله مؤلفه های بردار اولیه بر روی هر راستا، بدست آید.



$$\vec{C} = \vec{C}_a + \vec{C}_b$$

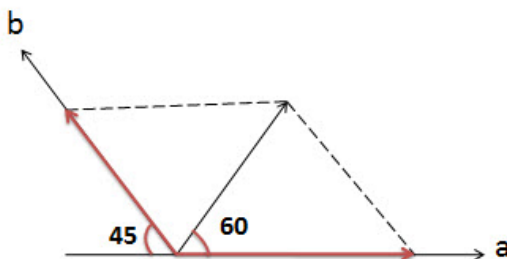


$$\vec{C} = \vec{C}_a + \vec{C}_b$$



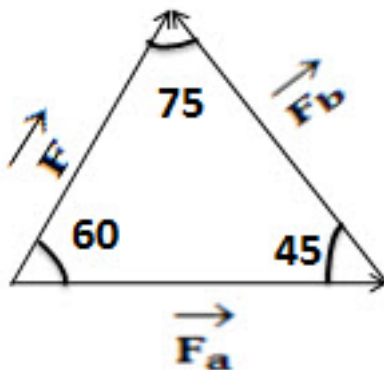
$$\vec{C} = \vec{C}_a + \vec{C}_b$$

مثال: برای نیروی $f=5KN$ مولفه های نیرو $\vec{F}$ در امتداد محور های a و b را حساب کنید.



حل: ابتدا مثلث نیروها را تشکیل می دهیم.

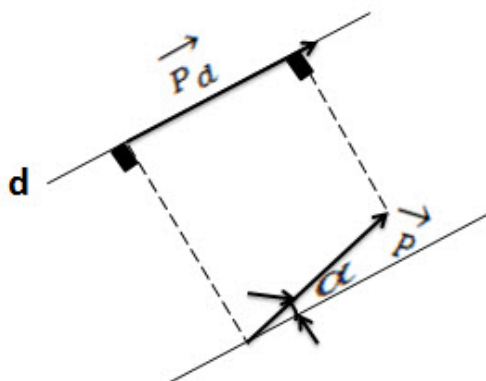
$$\theta = 180 - (45 + 60) = 75$$



حال با توجه به رابطه سینوس ها داریم:

$$\frac{|\vec{F}|}{\sin 45} = \frac{|\vec{F}_a|}{\sin 75} = \frac{|\vec{F}_b|}{\sin 60} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{F}_a| = 6/8KN \\ |\vec{F}_b| = 6/12KN \end{cases}$$

تصویر یک بردار در یک راستا (مولفه مستطیلی یک بردار در یک راستا):



دانشگاه فنی و حرفه ای (دانشکده فنی کشاورزی مراغه) گروه مکانیک

راستای d و بردار $\vec{P}$ را در نظر بگیرید. اگر از دو انتهای بردار $\vec{P}$ خطوطی عمود بر راستای d رسم شود تصویر بردار $\vec{P}$ یا مولفه مستطیلی بردار $\vec{P}$ روی راستای d بدست خواهد آمد. بردار $\vec{P}_d$ مولفه مستطیلی بردار $\vec{P}$ در امتداد d است. اگر زاویه بین بردار $\vec{P}$ و راستای d برابر α باشد در این صورت مقدار بردار $\vec{P}_d$ برابر خواهد بود با:

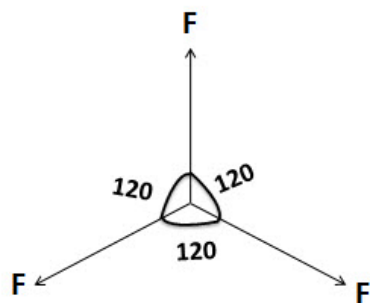
$$|\vec{P}_d| = |\vec{P}| \times \cos \alpha$$

نکته ۱: اگر زاویه بین ۲ نیرو حاده باشد (کمتر از ۹۰ درجه) برآیند ۲ نیرو از تک تک نیروها بزرگتر ولی از مجموع آنها کوچکتر است.

نکته ۲: اگر زاویه بین ۲ نیرو بیشتر از ۹۰ درجه باشد برآیند ۲ نیرو از تفاضل ۲ نیرو بزرگتر است.

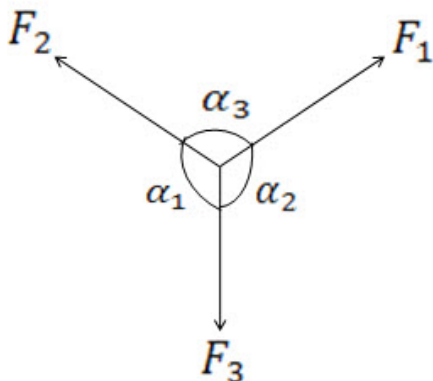
نکته ۳: برآیند ۲ نیروی مساوی با زاویه ۱۲۰ درجه برابر با یکی از نیروها می باشد.

نکته ۴: برآیند ۳ نیروی مساوی با زاویه ۱۲۰ درجه نسبت به هم برابر صفر است.



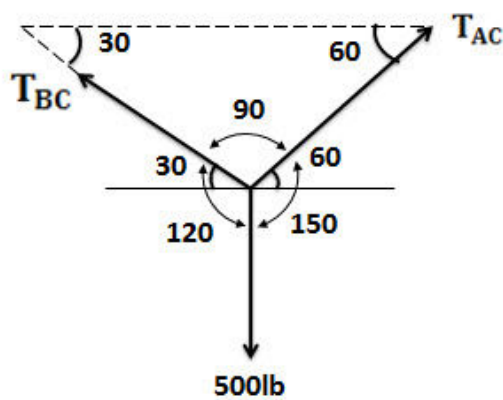
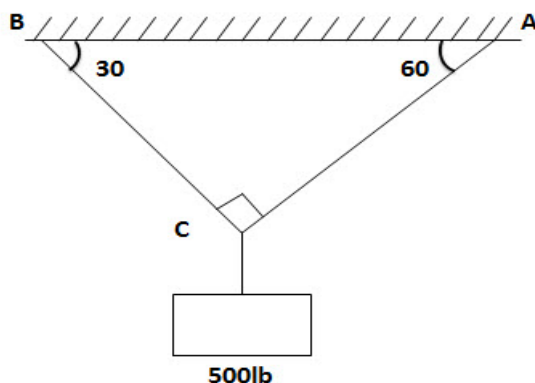
$$R=0$$

نکته ۵: رابطه سینوسها برای ۳ نیروی روبه رو برقرار است.



$$\frac{F_1}{\sin \alpha_1} = \frac{F_2}{\sin \alpha_2} = \frac{F_3}{\sin \alpha_3}$$

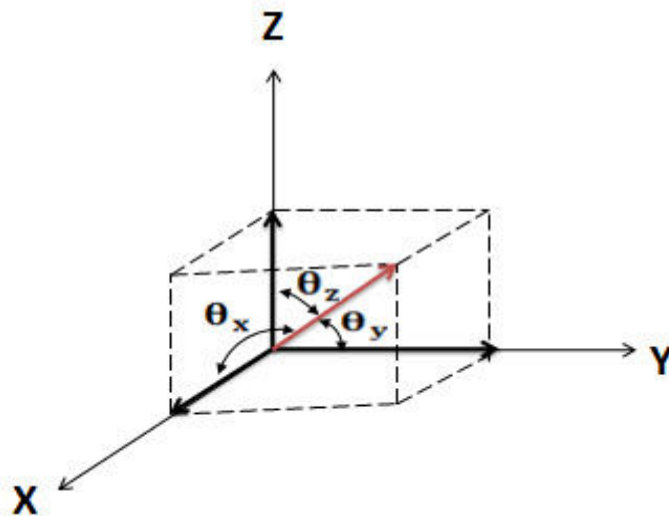
مثال: نیروی کششی در طناب های AC و BC را به دست آورید.



$$\frac{500}{\sin 90} = \frac{T_{AC}}{\sin 120} = \frac{T_{BC}}{\sin 150} \Rightarrow \begin{cases} T_{AC} = 433 \text{ lb} \\ T_{BC} = 250 \text{ lb} \end{cases}$$

کسینوس های هادی:

زوایای هادی بین صفر تا ۱۸۰ درجه می باشند که بردار مورد نظر با جهت مثبت محور های x و y و z یک دستگاه مختصات می سازد. بردار A را در صفحه xyz در نظر بگیرید به طوری که i و j و k بردارهای یکه در امتداد محورهای مختصات بوده و A_x, A_y, A_z مولفه های بردار می باشند.



$$\vec{A} = A_x i + A_y j + A_z k$$

$$\begin{cases} \cos \theta_x = \frac{A_x}{A} \\ \cos \theta_y = \frac{A_y}{A} \\ \cos \theta_z = \frac{A_z}{A} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = A \cos \theta_x i + A \cos \theta_y j + A \cos \theta_z k$$

از طرف دیگر می توان هر بردار را به صورت حاصلضرب مقدار آن در یک بردار یکه امتداد بردار نشان داد.
رابطه ۱:

$$\vec{A} = A \vec{\lambda}_A$$

$\vec{\lambda}_A$: بردار یکه

$$\vec{\lambda}_A = \cos \theta_x i + \cos \theta_y j + \cos \theta_z k$$

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

که در آن $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ به ترتیب زوایای هادی بین بردار A و محوره های x, y, z می باشد.

بردار یکه: پس با توجه به مطالب گفته شده می توان نتیجه گرفت که بردار یکه را می توان از تقسیم یک بردار بر اندازه اش بدست آورد.

$$\hat{f} = \frac{\vec{f}}{|\vec{f}|}$$

با توجه به رابطه ۱ داریم:

$$|\vec{A}| = \sqrt{(\cos \theta_x \cdot |A|)^2 + (|A| \cdot \cos \theta_y)^2 + (|A| \cdot \cos \theta_z)^2}$$

$$\Rightarrow |\vec{A}| = \sqrt{|A|^2 (\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z)}$$

$$\Rightarrow |\vec{A}| = |A| \cdot \sqrt{\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1$$

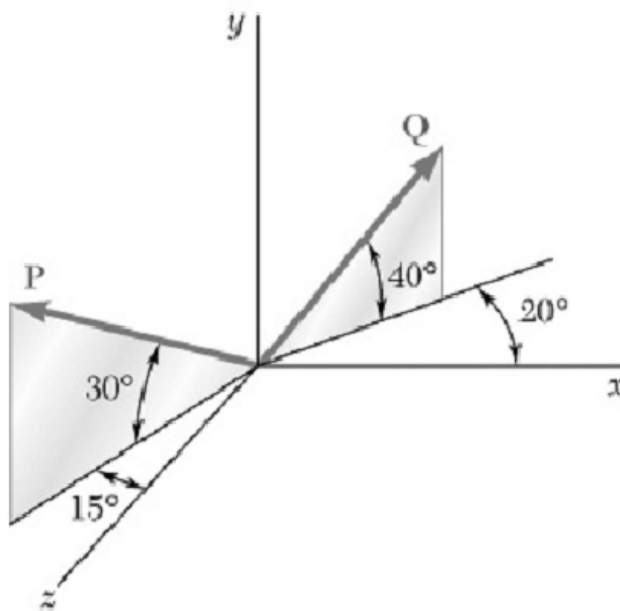
$$\text{if } \begin{cases} \cos \theta_x = L \\ \cos \theta_y = m \\ \cos \theta_z = n \end{cases} \Rightarrow L^2 + m^2 + n^2 = 1$$

یعنی مجموع مربعات کسینوس های هادی یک بردار برابر یک است.

مثال: اگر $P=500 \text{ N}$ و $Q=600 \text{ N}$ باشد مطلوب است.

الف) تعیین برآیند این دو نیرو

ب) تعیین زاویه برآیند نسبت به محورهای X ، Y و Z



$$P = (500 \text{ Lb})[-\cos 30^\circ \sin 15^\circ \mathbf{i} + \sin 30^\circ \mathbf{j} + \cos 30^\circ \cos 15^\circ \mathbf{k}]$$

$$= (500 \text{ Lb})[-0.2241 \mathbf{i} + 0.5 \mathbf{j} + 0.8365 \mathbf{k}]$$

$$= -(112.05 \text{ Lb}) \mathbf{i} + (250 \text{ Lb}) \mathbf{j} + (418.25 \text{ Lb}) \mathbf{k}$$

$$Q = (600 \text{ Lb})[\cos 40^\circ \cos 20^\circ \mathbf{i} + \sin 40^\circ \mathbf{j} - \cos 40^\circ \sin 20^\circ \mathbf{k}]$$

$$= (600 \text{ Lb})[0.71985 \mathbf{i} + 0.6427 \mathbf{j} - 0.262 \mathbf{k}]$$

$$= (431.91 \text{ Lb}) \mathbf{i} + (385.67 \text{ Lb}) \mathbf{j} - (157.206 \text{ Lb}) \mathbf{k}$$

$$R = P + Q = (319.86 \text{ Lb}) \mathbf{i} + (635.67 \text{ Lb}) \mathbf{j} + (261.04 \text{ Lb}) \mathbf{k}$$

$$R = \sqrt{(319.86)^2 + (635.67)^2 + (261.04)^2} = 757.98 \text{ Lb}$$



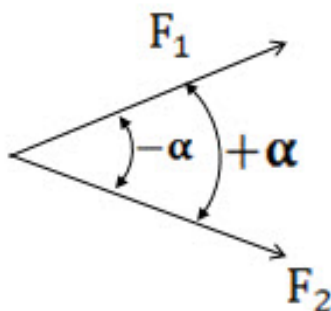
$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{319.86 \text{ Lb}}{757.98 \text{ Lb}} = 0.42199 \Rightarrow \theta_x = 65^\circ$$

$$\cos \theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{635.67 \text{ Lb}}{757.98 \text{ Lb}} = 0.83864 \Rightarrow \theta_y = 33^\circ$$

$$\cos \theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{261.04 \text{ Lb}}{757.98 \text{ Lb}} = 0.34439 \Rightarrow \theta_z = 69.9^\circ$$

ضرب داخلی بردارها (ضرب اسکالر یا نقطه ای):

کمیت های اسکالری وجود دارند که از حاصلضرب دو کمیت برداری به دست می آیند. مثلاً کار، که از حاصل ضرب داخلی بردار نیرو در تغییر مکان به دست می آید. اگر ۲ بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ مطابق شکل موجود باشند حاصل ضرب نقطه ای ۲ بردار برابر است با اندازه F_1 ضربدر اندازه F_2 در $\cos \alpha$.



$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = |F_1| \cdot |F_2| \cdot \cos \alpha$$

$|F_1|$: طول یا اندازه بردار F_1

$|F_2|$: طول یا اندازه بردار F_2

$\pm \alpha$: کوچکترین زاویه بین نیروی F_1 و F_2

توجه: چون $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ می باشد پس داریم:

خاصیت جابجایی: $F_1 \cdot F_2 = F_2 \cdot F_1$

خواص ضرب نقطه ای:

ضرب نقطه ای ۲ بردار نتیجه اش یک عدد است نه بردار

حاصلضرب نقطه ای ۲ بردار خاصیت جابجایی دارد یعنی:

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{F}_1$$

حاصلضرب نقطه ای ۲ بردار یا ۲ نیروی عمود بر هم صفر است چون $\cos 90 = 0$ است پس شرط اینکه ۲ تا بردار بر هم عمود باشند آن است که ضرب نقطه ای آنها صفر گردد.

$$\cos \theta = \frac{\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2}{|F_1| \cdot |F_2|}$$

زاویه بین دو بردار:



دانشگاه فنی و حرفه ای (دانشکده فنی کشاورزی مراغه) گروه مکانیک

حاصلضرب داخلی بردارهای یکه به صورت زیر تعریف می شود.

$$i.i=1 \quad i.j=0 \quad i.k=0$$

$$j.j=1 \quad j.i=0 \quad j.k=0$$

$$k.k=1 \quad k.j=0 \quad k.i=0$$

اگر $\alpha < 90$ باشد حاصلضرب $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2$ مثبت است و اگر $\alpha = 90$ باشد جواب صفر و اگر $\alpha > 90$ باشد جواب آن منفی خواهد شد.

ضرب نقطه دارای خاصیت پخش پذیری می باشد.

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

ضرب نقطه ای دو بردار $m\vec{A}$ و $n\vec{B}$ به صورت زیر می باشد. (n, m عدد صحیح)

$$m\vec{A} \cdot n\vec{B} = m \cdot n(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

ضرب داخلی یک بردار در خودش

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos(0) = |\vec{A}|^2$$

سوال: با استفاده از ضرب نرده ای بردارها نشان دهید :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (\text{الف})$$

(ب) زاویه بین دو بردار از رابطه روبرو به دست می آید :

$$\cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \text{ و } b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \text{ که}$$

جواب الف) :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x (\vec{i} \cdot \vec{i}) + a_x b_y (\vec{i} \cdot \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \cdot \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \cdot \vec{i}) + a_y b_y (\vec{j} \cdot \vec{j}) + a_y b_z (\vec{j} \cdot \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \cdot \vec{i}) + a_z b_y (\vec{k} \cdot \vec{j}) + a_z b_z (\vec{k} \cdot \vec{k})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

جواب ب):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta \quad 1)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad 2)$$

$$\Rightarrow ab \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \Rightarrow \cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab} \quad (1,2)$$

مثال) زاویه بین دو بردار $\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ را بدست آورید؟

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \Rightarrow \cos \theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{(3 \times 2) + (3 \times 1) + (-3 \times 3)}{\sqrt{27} \times \sqrt{14}} = \frac{0}{\sqrt{27} \times \sqrt{14}}$$

$$a = \sqrt{27}$$

$$b = \sqrt{14}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{27}$$

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = 0 \\ \cos 90^\circ = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = 90^\circ \quad \text{چون دو بردار بر هم عمودند.}$$

مثال) زاویه بین دو بردار $\vec{a} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$ و $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ را بدست آورید؟



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \Rightarrow \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab} \left| \begin{array}{l} a = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{27} \\ b = \sqrt{2^2 + (1)^2 + (3)^2} = \sqrt{14} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{(3 \times 2) + (3 \times 1) + (-3 \times 3)}{\sqrt{27} \times \sqrt{14}} = \frac{0}{\sqrt{27} \times \sqrt{14}} = 0$$

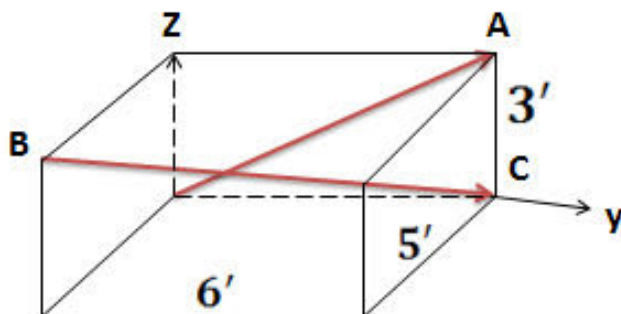
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{27}$$

$$\begin{array}{l} a = \sqrt{27} \\ b = \sqrt{14} \end{array}$$

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \theta = 0 \\ \cos 90^\circ = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = 90^\circ \quad \text{دو بردار بر هم عمودند. چون}$$

مثال: زاویه بین قطر BC و OA را به دست آورید.



$$\begin{aligned} \vec{BC} &= -5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k} \\ \vec{OA} &= 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \\ \cos(\vec{BC}, \vec{OA}) &= \frac{\vec{BC} \cdot \vec{OA}}{|\vec{BC}| \cdot |\vec{OA}|} = \frac{(-5 \times 0) + (6 \times 6) + (-3 \times 3)}{\sqrt{(-5)^2 + 6^2 + (-3)^2} \times \sqrt{6^2 + 3^2}} \\ &= 0/481 \Rightarrow (\widehat{BCOA}) = 90^\circ \end{aligned}$$

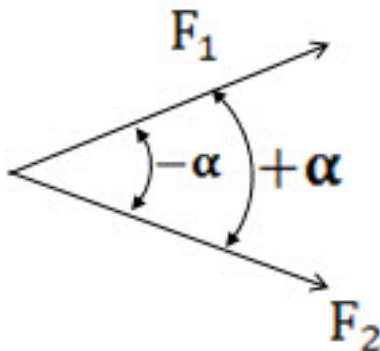
ضرب خارجی دو بردار:



دانشگاه فنی و حرفه ای (دانشکده فنی کشاورزی مراغه) گروه مکانیک

کمیت های برداری وجود دارند که از اثر آنها بر یکدیگر یک کمیت برداری دیگری به وجود می آید. مانند بردار گشتاور که از ضرب خارجی بردار مکان یا تغییر مکان در بردار نیرو به دست می آید.

اگر F_1 و F_2 مطابق شکل موجود باشند حاصلضرب خارجی آن دو نیرو با علامت $F_1 \times F_2$ نمایش داده می شود و برابر است با:



$$F_1 \times F_2 = |F_1| \cdot |F_2| \cdot \sin(-\alpha)$$

$$F_2 \times F_1 = |F_1| \cdot |F_2| \cdot \sin(\alpha)$$

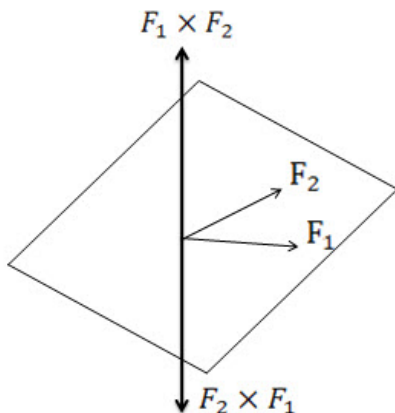
از طرفی چون $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ است پس:

$$F_1 \times F_2 \neq F_2 \cdot F_1$$

توجه: اولاً α زاویه کوچکتر بین دو بردار است و ثانیاً جهت باز شدن زاویه α از طرف اولین بردار به طرف بردار دوم می باشد.

خواص ضرب خارجی:

ضرب خارجی ۲ بردار نتیجه اش یک بردار است نه یک عدد. که این بردار عمود بر صفحه دو بردار می باشد و جهت آن با قانون دست راست مشخص می شود.



ضرب خارجی خاصیت جابه جایی ندارد.



$$F_1 \times F_2 \neq F_2 \times F_1 \quad \text{و یا} \quad F_1 \times F_2 = -(F_2 \times F_1)$$

حاصلضرب خارجی ۲ بردار موازی صفر است چون

$$\sin(180) = 0$$

$$\sin(0) = 0$$

پس از قسمت سوم می توان نتیجه گرفت حاصلضرب خارجی یک بردار در خودش صفر است

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$

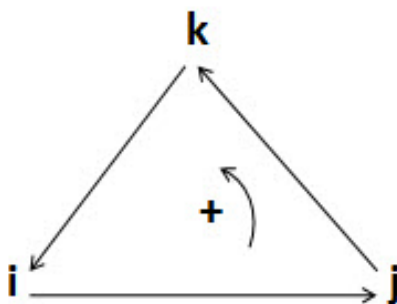
چون

$$\sin(0) = 0$$

ضرب خارجی دارای خاصیت پخش یا توزیعی است.

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

حاصلضرب خارجی بردارهای یکپه به صورت زیر تعریف می شود.



$$i \times i = 0$$

$$j \times j = 0$$

$$k \times k = 0$$

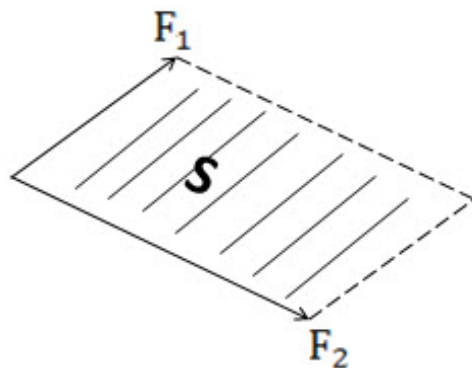
$$\begin{cases} i \times j = -j \times i = k \\ j \times k = -k \times j = i \\ k \times i = -i \times k = j \end{cases}$$

حاصلضرب خارجی دو بردار $m\vec{A}$ و $n\vec{B}$ به صورت زیر است.

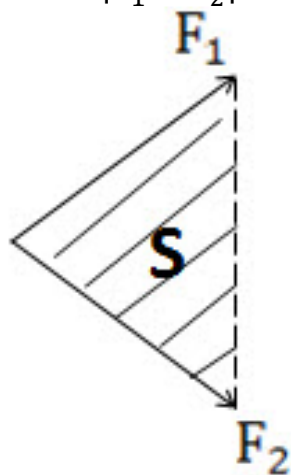
$$m \vec{A} \times n \vec{B} = mn(\vec{A} \times \vec{B})$$

کاربرد ضرب خارجی

مقدار حاصلضرب بیرونی ۲ بردار، برابر مساحت متوازی الاضلاعی است که ۲ بردار تشکیل می دهند.



$$S = |F_1 \times F_2|$$



$$S = \frac{1}{2} |F_1 \times F_2|$$

مسئله: دو بردار $\vec{A} = 2\vec{i} + a\vec{k}$ و $\vec{B} = 3\vec{i} - \vec{j}$ را در نظر بگیرید اگر مساحت مثلث حاصل از این دو بردار S باشد،

مقدار a برابر خواهد بود با چه مقدار؟

$$s = \frac{|A \times B|}{2} \quad A \times B = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & a \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = i[0 - (a \times (-1))] - j[(2 \times 0) - (3 \times a)] + k[2 \times (-1) - 3 \times 0]$$



$$A \times B = a\vec{i} - 3a\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow |A \times B| = \sqrt{a^2 + (3a)^2 + (-2)^2} = \sqrt{10a^2 + 4}$$

$$\Rightarrow s = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{2} = \frac{\sqrt{10a^2 + 4}}{2} \Rightarrow s = \frac{\sqrt{10a^2 + 4}}{2} \Rightarrow s^2 = \frac{10a^2 + 4}{4}$$

$$\Rightarrow s^2 = \frac{5a^2 + 2}{2} \Rightarrow 2s^2 = 5a^2 + 2$$

$$\Rightarrow 5a^2 = 2s^2 - 2 \Rightarrow a^2 = \frac{2(s^2 - 1)}{5} \Rightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2(s^2 - 1)}}{5}$$

حاصلضرب مختلط: اگر ۳ بردار F_1, F_2, F_3 موجود باشند حاصلضرب مختلط بین آنها بدین شکل نوشته می شود .

$$F_1 \cdot (F_2 \times F_3)$$

توجه داشته باشید حاصلضرب مختلط یک عدد است نه بردار و همچنین در رابطه حاصلضرب مختلط جابجایی به شکل زیر مجاز است.

$$F_1 \cdot (F_2 \times F_3) = F_3 \cdot (F_1 \times F_2)$$

توجه: اگر ۳ بردار به صورت

$$F_1 = ai + bj + ck$$

$$F_2 = a'i + b'j + c'k$$

$$F_3 = a''i + b''j + c''k$$

وجود داشته باشد حاصلضرب مختلط این ۳ بردار به صورت زیر است:

$$F_1 \cdot (F_2 \times F_3) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

نکته: ضرب مختلط ۳ بردار همیشه یک عدد است و قدر مطلق آن عدد برابر حجم متوازی السطوحی است که آن ۳ بردار تشکیل می دهند.

نکته ۲: شرط اینکه ۳ بردار در یک صفحه واقع شوند آن است که حاصلضرب مختلط آنها برابر صفر شود.

مثال: اگر سه بردار $A = -2\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$ و $B = 4\vec{i} - 5\vec{j} + 7\vec{k}$ و $C = 9\vec{i} + \vec{j} - 8\vec{k}$ باشد حجم متوازی

السطوحی که از این سه بردار ساخته می شود را بدست آورید.



$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 4 & -5 & 7 \\ 9 & 1 & -8 \end{vmatrix} = -2[(-5 \times -8) - (7 \times 1)] - 6[(4 \times (-8)) - (-7 \times 9)] \\ + 3[(4 \times 1) - (-5 \times 9)] = -2[40 - 7] - 6[-32 - 63] + 3[4 + 45] \\ = -2 \times 33 - (6 \times 95) + 3 \times 49 = -66 + 570 + 147 = 651 \Rightarrow V = 651$$

مثال: اگر ۳ بردار

$$F_1 = 2i - 3j + k$$

$$F_2 = mi + 2j - k$$

$$F_3 = i + j + k$$

موجود باشند m را طوری تعیین کنید تا سه بردار در یک صفحه باشند؟

$$F_1 \cdot (F_2 \times F_3) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2 + 1) + 3(m + 1) + 1(m - 2) = 4m + 7 = 0 \Rightarrow m = \frac{-7}{4}$$

حاصلضرب خارجی دو بردار بر حسب مولفه های x, y, z آنها :

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_x i + A_y j + A_z k) \times (B_x i + B_y j + B_z k) \\ = (A_x i \times B_x i) + (A_x i \times B_y j) + (A_x i \times B_z k) + (A_y j \times B_x i) + (A_y j \times B_y j) + \\ (A_y j \times B_z k) + (A_z k \times B_x i) + (A_z k \times B_y j) + (A_z k \times B_z k) \\ \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = (A_x \cdot B_x) \underbrace{i \times i}_0 + (A_x B_y) i \times j + (A_x B_z) i \times k + (A_y B_x) j \times i + \\ (A_y B_y) \underbrace{j \times j}_0 + (A_y B_z) j \times k + (A_z B_x) k \times i + (A_z B_y) k \times j + (A_z B_z) \underbrace{k \times k}_0 \Rightarrow \\ \vec{A} \times \vec{B} = (A_x B_y) k - (A_x B_z) j - (A_y B_x) k + (A_y B_z) i + (A_z B_x) j - (A_z B_y) i \\ \vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) i + (A_z B_x - A_x B_z) j + (A_x B_y - A_y B_x) k$$

روش دیگر برای محاسبه مولفه های x, y, z بردار $\vec{A} \times \vec{B}$ استفاده از دترمینان است.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) i - (A_x B_z - A_z B_x) j + (A_x B_y - A_y B_x) k$$

توجه: دترمینان را می توان به صورت زیر نیز که راحت تر است حساب کرد. خطوط پر رنگ با علامت مثبت در هم ضرب و خط چین ها با علامت منفی در هم ضرب شده و با هم جمع می شوند.



$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$= A_x B_y k + B_x A_z j + A_y B_z i - A_z B_y i - A_x B_z j - A_y B_x k$$

$$\Rightarrow (A_y B_z - A_z B_y) i + (A_z B_x - A_x B_z) j + (A_x B_y - A_y B_x) k$$

مثال: حاصل ضرب خارجی و داخلی بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را بدست آورید.

$$\vec{A} = 6i + 3j + 4k$$

$$\vec{B} = 8i - 3j + 2k$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (6 \times 8) + (-3 \times 3) + (4 \times 2) = 47$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (6i + 3j + 4k) \times (8i - 3j + 2k) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & 3 & 4 \\ 8 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 18i + 20j - 42k$$

تعادل یک نقطه مادی:

از قانون اول نیوتن می توان نتیجه گرفت که اگر برآیند نیروهای موثر بر نقطه مادی مساوی صفر باشد، آن نقطه مادی در حال سکون باقی می ماند. این حالت سکون که همراه با نیروهای برآیند صفر است وضعیت تعادل نامیده می شود.

نکته: اگر نیروی برآیند مساوی صفر شود، لازم است کلیه مولفه های آن نیز مساوی صفر شود.

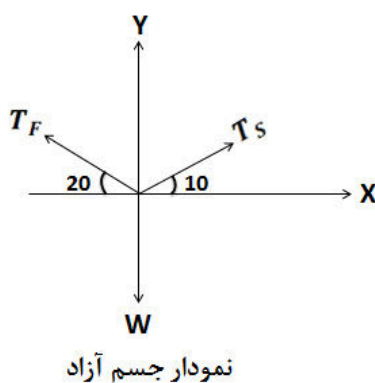
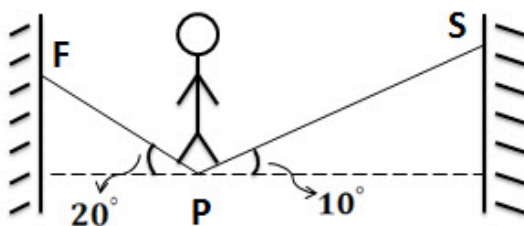
$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \left(\sum F_x \right) i + \left(\sum F_y \right) j + \left(\sum F_z \right) k = 0$$

نمودار جسم آزاد: یک شمای هندسی از جسم مورد نظر می باشد که از کلیه اجسام محیط خود جدا شده و عمل سایر اجسام به روی آن توسط نیرو نشان داده شده است.



دانشگاه فنی و حرفه ای (دانشکده فنی کشاورزی مراغه) گروه مکانیک

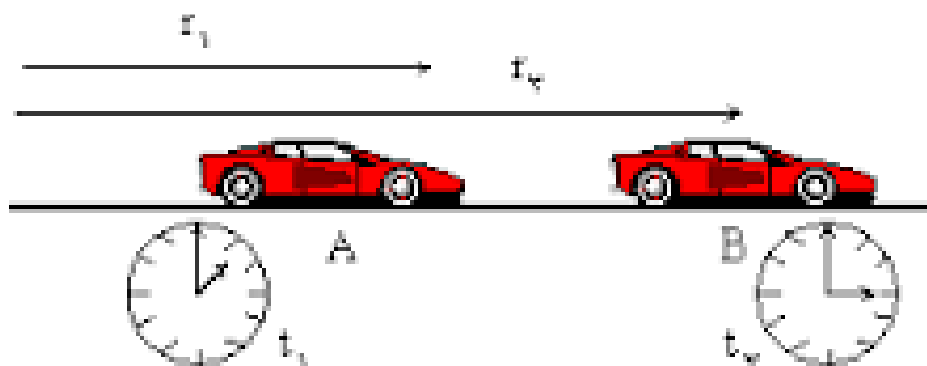
مثال: با توجه به شکل زیر و اینکه وزن بند باز $220N$ می باشد نیروی کششی در طناب PS و PF کدام است؟



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow T_S \cos 10 - T_F \cos 20 = 0 \\ \sum F_y = 0 &\Rightarrow T_S \sin 10 + T_F \sin 20 - 220 = 0 \\ \Rightarrow T_F &= 434N & T_S &= 414N \end{aligned}$$



سینماتیک





تعریف مسیر حرکت یا مسافت طی شده :

تمام نقاطی را که متحرک طی زمان حرکت از آنها عبور می کند را مسیر حرکت یا مسافت طی شده گویند.

تعریف جابجایی :

پاره خط مستقیم و جهت داری است که ابتدای مسیر حرکت را به انتهای مسیر حرکت وصل می کند.

نکته: همیشه مقدار جابجایی کوچکتر از مسافت طی شده است و در حالت خاصی که متحرک بر روی خط مستقیم حرکت می کند مقدار جابجایی برابر با مسافت طی شده است.

نکته: اگر متحرکی از نقطه ای شروع به حرکت کند و دوباره پس از طی مسافتی به نقطه اول بازگردد گر چه که مسافت طی شده غیر صفر است، اما مقدار جابجایی برابر صفر است زیرا نقطه ابتدا و انتهای حرکت یکی است و فاصله هر نقطه با خوش صفر است.

سرعت متوسط : نسبت تغییرات مکان به زمان سپری شده را سرعت متوسط گویند.

تعریف سرعت متوسط :

۱- به نسبت جابجایی بر زمان سپری شده سرعت متوسط می گویند.

۲- به نسبت تغییرات مکان بر تغییرات زمان جابجایی می گویند. $\vec{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

۳- به آهنگ جابجایی سرعت متوسط می گویند.

$$\vec{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

رابطه سرعت متوسط

$\vec{V}$: سرعت متوسط بوده و یکای آن $(\frac{m}{s})$ است.

Δx : تغییر مکان یا جابجایی بوده و یکای آن (m) است.

Δt : علامت تغییرات زمان یا گذر زمان بوده و یکای آن s (ثانیه) است.

x_1, x_2 : بترتیب مکان اول و مکان دوم بوده و یکای آنها (m) است.

t_1, t_2 : بترتیب زمان اول و زمان دوم بوده و یکای آن (s) است.

در برخی موارد مکان اولیه را با X_0 نشان می دهند و اگر لحظه شروع حرکت صفر باشد لذا رابطه سرعت متوسط را می توان بصورت زیر نوشت :

$$\vec{V} = \frac{x - x_0}{t - t_0} \Rightarrow \vec{V} = \frac{x - x_0}{t}$$

قطاری به طول ۱۰۰ متر می خواهد از طول یکا پل به طول ۴۰۰ متر عبور کند هنگامی که ابتدای قطار از اول پل شروع به حرکت می کند و سرانجام انتهای قطار از پل می گذرد زمانی معادل ۱۰ ثانیه طول می کشد. در این صورت سرعت متوسط قطار را بدست آورید.

$$\left| \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x = 400 + 100 = 500m \\ t = 10(s) \end{array} \right| \vec{V} = \frac{x - x_0}{t} = \frac{500}{10} \\ \vec{V} = 50 m/s$$

$$\vec{V} = \frac{\Delta X}{\Delta t} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1}$$

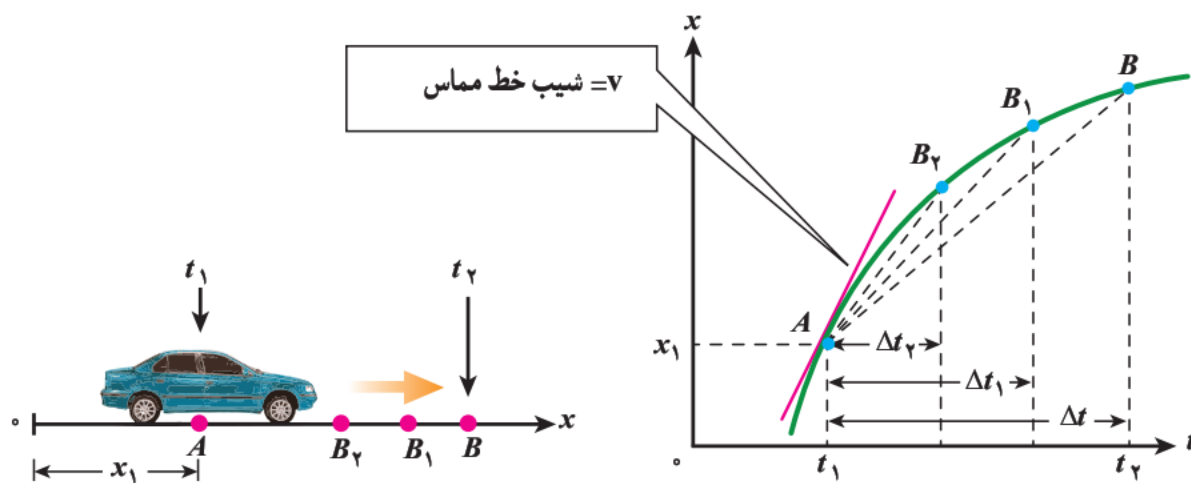
رابطه سرعت متوسط :

یکای سرعت متوسط m/s و علامت آن $\bar{v}$

تعریف حرکت مستقیم الخط یکنواخت : حرکتی که در آن متحرک با سرعت ثابت بر مسیر مستقیم و بر روی خط راست حرکت می کند را حرکت مستقیم الخط یکنواخت گویند.

نکته: در حرکت با سرعت ثابت متوسط با سرعت لحظه ای یکسان و برابرند. $v = \bar{v}$

تعریف سرعت لحظه ای: به حد سرعت متوسط در بازه های زمانی بسیار کوچک سرعت لحظه ای گویند.



شکل سمت چپ، اتومبیلی را نشان می دهد که در راستای محور x حرکت می کند. شکل سمت

راست، نمودار مکان-زمان حرکت اتومبیل را نشان می دهد. با کوچک شدن Δt ، B به A نزدیک شده و خط

واصل در حالت $\Delta t \rightarrow 0$ تبدیل به خط مماس بر منحنی می شود و شیب آن، سرعت لحظه ای را نشان می دهد.

به عبارت دیگر، هنگامی که t_1 به t_2 نزدیک می شود، یعنی وقتی Δt به سمت صفر میل می کند، $\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ سرعت لحظه ای جسم را در لحظه t_1 به دست می دهد. پس، سرعت لحظه ای حد سرعت متوسط است هنگامی که Δt به سمت صفر میل می کند. سرعت لحظه ای را با v_x نمایش می دهیم؛ در نتیجه داریم:

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

در درس ریاضی دیده اید که این حد، برابر مشتق تابع x نسبت به زمان است که به صورت زیر نوشته می شود:

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

اگر $x = f(t)$ معلوم باشد، از رابطه بالا می توان v_x را به صورت تابعی از زمان به دست آورد، این تابع، معادله سرعت نامیده می شود.

مثال: معادله حرکت متحرک به صورت $x = 2t^2 + 1$ است.

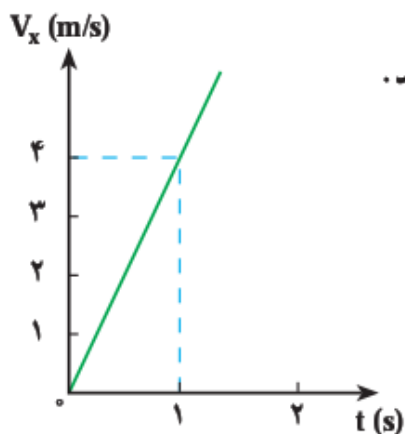
الف) معادله سرعت آن را به دست آورید.

ب) نمودار سرعت - زمان را برای آن رسم کنید.

پ) سرعت متحرک را در لحظه $t = 1$ s به دست آورید.

پاسخ

الف)



$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4t$$

ب) نمودار سرعت - زمان به صورت خط راستی

است که از مبدأ دستگاه $v-t$ می گذرد.

$$v_x = 4t$$

پ)

$$t = 1 \text{ s} \Rightarrow v_x = 4 \text{ m/s}$$

$$\bar{v} = \frac{X_2 - X_1}{t_2 - t_1} \text{ و } \bar{v} = \bar{v}$$

روابط حرکت با سرعت ثابت: $x = vt + x_0$

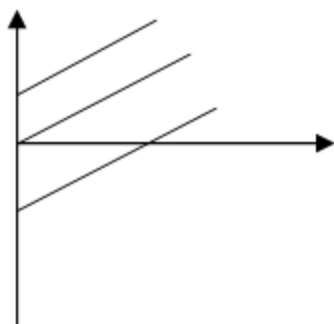


دانشگاه فنی و حرفه ای (دانشکده فنی کشاورزی مراغه) گروه مکانیک

علامت جابجایی و یکای آن (m) متر است و V علامت سرعت بوده و یکای آن (m/s) است و t علامت زمان بوده و یکای آن (s) ثانیه است. x_0 علامت مکان اولیه متحرک بوده و یکای آن (m) متر است.

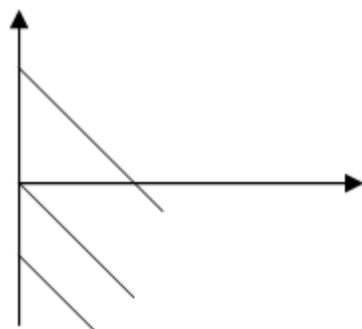
نمودار حرکت با سرعت ثابت $x = v\tau + x_0$

$$\left| \begin{array}{l} 1: x = 2\tau + 3 \\ 2: x = 3\tau \quad \text{الف (نمودار مکان - زمان)} \\ 3: x = \tau - 2 \end{array} \right.$$

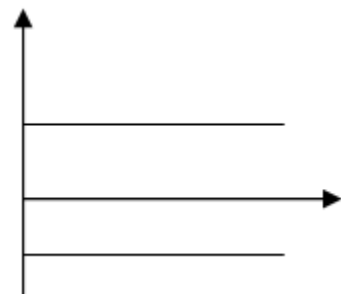


اگر شیب خط صعودی باشد سرعت مثبت $v > 0$ و اگر شیب نزولی باشد سرعت منفی $v < 0$

$$\left| \begin{array}{l} 1: x = -\tau + 2 \\ 2: x = -2\tau \\ 3: x = -3\tau - 4 \end{array} \right.$$



ب) نمودار سرعت - زمان





نکته (۱) همانطور که از قسمت الف مشاهده شد نمودار مکان - زمان با سرعت ثابت خط شیب داری است که اگر سرعت مثبت باشد شیب آن صعودی است.

نکته (۲) همانطور که از قسمت ب مشاهده می شود نمودار سرعت - زمان ثابت خط موازی با محور زمانها است که اگر سرعت مثبت باشد این خط بالای محور t ها و اگر سرعت منفی باشد پائین محور t ها است.

مثال (سرعت یک متحرک $10m/s$ و سرعت متحرک دیگر $15m/s$ است و سرعت هر دو ثابت می باشد اگر اتومبیل اول مسافت $300m$ را طی کند در این صورت محاسبه کنید که اتومبیل دوم چه مسافتی را در همان زمان طی خواهد کرد ؟

ابتدا مشخص می کنیم $300m$ را اتومبیل اول در چه زمانی پیموده است. آنگاه مسافتی را که اتومبیل دوم در همین مدت زمان پیموده است محاسبه می کنیم : $x_0 = 0$

$$x_1 = v_1 t + x_0 \Rightarrow 300 = 10t + 0 \Rightarrow t = \frac{300}{10} = 30s \quad \left[\begin{array}{l} v_1 = 10m/s \\ t = ? \end{array} \right.$$

$$x_2 = v_2 t + x_0 \Rightarrow x_2 = 15 \times 30 + 0 = 450 \Rightarrow x_2 = 450(m) \quad \left[\begin{array}{l} v_2 = 15m/s \\ x_2 = ? \end{array} \right.$$

نکته: اگر در مسئله ای فقط صحبت از سرعت ثابت و شتاب به میان نیامد در این صورت حرکت یکنواخت و مستقیم الخط و باید از روابط سرعت ثابت استفاده کرد.

مثال) در یک مسابقه اتومبیل رانی دو اتومبیل A و B که بترتیب با سرعتهای یکنواخت و ثابت $30m/s$ و $40m/s$ حرکت می کنند از یک مکان می گذرند، محاسبه کنید هنگامی که اتومبیل A مسافت 100 متر را می پیماید اتومبیل B همزمان با او چه مسافتی را می پیماید؟

* (ابتدا مدت زمانی که مسافت 100 متر توسط اتومبیل A پیموده را محاسبه می کنیم تا مسافت طی شده توسط اتومبیل B بدست آید).

$$\vec{V} = \frac{x - x_0}{t} \Rightarrow x - x_0 = vt \quad A \rightarrow 30m/s \rightarrow 100m$$

$$x = \vec{v}t + x_0 \quad B \rightarrow 40m/s$$



$$\begin{aligned}x_0 &= 0 \\ \vec{V}_A &= 30 \text{ m/s} \\ \vec{V}_B &= 40 \text{ m/s} \\ x_A &= 100 \text{ m} \\ x_B &= ?\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_A &= V_A \times t + x_0 \Rightarrow 100 = 30t + 0 \Rightarrow t = \frac{100}{30} = \frac{10}{3} \\ x_B &= V_B \times t + x_0 \Rightarrow 100x_B = 40 \times \frac{10}{3} + 0 \Rightarrow x_B = \frac{400}{3} = 133\frac{1}{3}\end{aligned}$$

مثال: یک شناگر استخری به مسافت $50m$ را در مدت $40s$ طی کرده و به نقطه اول باز می گردد. محاسبه کنید که سرعت متوسط این شناگر چقدر است؟
چون دوباره شناگر به مکان اولیه خود برگشته است جابجایی آن برابر صفر است. و چون سرعت متوسط نسبت جابجایی به زمان است لذا سرعت متوسطه هم صفر است.

حرکت شتاب دار

شتاب متوسط: به نسبت تغییرات سرعت به زمان سپری شده را شتاب متوسط گویند.

$$\vec{a} = \frac{\Delta V}{\Delta t} \text{ و } \vec{a} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} \text{ رابطه شتاب متوسط:}$$

در این رابطه $\vec{a}$ علامت شتاب متوسط است و یکای آن m/s^2 است. V_2 و V_1 به ترتیب سرعت های اولیه و ثانویه بوده و یکای آن m/s است و Δt زمان سپری شده می باشد و یکای آن (s) ثانیه است.

تعریف شتاب لحظه ای: به حد شتاب متوسط در بازه های زمانی بسیار کوچک شتاب لحظه ای گویند.

روابط حرکت شتاب دار:

کاربرد مستقل رابطه

$$\left| \begin{aligned}x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ v^2 - v_0^2 &= 2a\Delta x \\ v &= at + v_0\end{aligned} \right|$$

x و a را حساب می کند مستقل از سرعت ثانویه
 V و a را حساب می کند مستقل از زمان
مستقل از مکان



دانشگاه فنی و حرفه ای (دانشکده فنی کشاورزی مراغه) گروه مکانیک

مثال) اگر متحرکی با شتاب ثابت به حرکت درآید و پس از مدتی مکانی را طی کرد و سرعتش به 9 m/s برسد و پس از آن 50 m دیگر را طی کند تا سرعتش به 15 m/s برسد در این صورت محاسبه کنید:

الف) شتاب این متحرک را؟

ب) مسافت و زمانی که متحرک از لحظه صفر تا سرعت 9 m/s طی کرده؟

ج) مسافت دوم حرکت را در چه زمانی طی کرده.

چون شتاب متحرک ثابت است بنابراین در تمام مسیر مقدار شتاب یکسان است ضمناً باید در هر مسئله دقت شود، که دو نقطه را برای حل مسئله انتخاب کنید. پس دو نقطه اول سرعت اولیه دوم سرعت ثانویه.

دقت شود که همیشه روابط را بین دو نقطه به کار می بریم

الف) شتاب حرکت مربوط به کل حرکت است و هر مقداری بدست آمد مربوط به کل حرکت است.

الف)

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 15^2 - 9^2 = 2a \times 50 \Rightarrow 225 - 81 = 100a = 144 = 100a \Rightarrow a = \frac{144}{100} \Rightarrow a = 1.44\text{ m/s}^2$$

$$v_1^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 9^2 - 0^2 = 2 \times 1.44\Delta x \Rightarrow 81 = 2.88\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{81}{2.88}$$

ب)

$$v_1 = at + v_0 \Rightarrow 9 = 1.44t_0 \Rightarrow 1.44t = 9 \Rightarrow t = \frac{9}{1.44} = 6.25\text{ (s)}$$

ج)

$$v_2 - v_1 = at \Rightarrow 15 - 9 = 1.44t \Rightarrow 6 = 1.44t \Rightarrow t = \frac{6}{1.44}\text{ s}$$

$$(v_2 = at + v_1)$$

مثال) معادله حرکت یک متحرک به صورت $x = 3t^2 - 2t - 4$ است.

الف: سرعت متوسط آن را بین لحظات $t_1 = 1\text{ s}$ و $t_2 = 3\text{ s}$ بدست آورید؟
 الف) $\begin{cases} \vec{V} = ? \\ t_1 = 1\text{ s} \\ t_2 = 3\text{ s} \end{cases}$

ب: سرعت لحظه ای آن را در زمان $t = 4\text{ s}$ بدست آورید؟
 ب) $\begin{cases} V = ? \\ t = 4\text{ s} \end{cases}$

ج: شتاب متوسط آن را در لحظات $t_1 = 2\text{ s}$ تا $t_2 = 5\text{ s}$ را محاسبه کنید؟
 ج) $\begin{cases} a = ? \\ t_1 = 2\text{ s} \\ t_2 = 5\text{ s} \end{cases}$



د : شتاب لحظه ای آن در لحظه ۸۰ ثانیه چه مقدار است؟

الف)

$$x_1 = 3 \times 1^2 - (2 \times 1) - 4 = -3$$

$$x_2 = 3 \times 3^2 - (2 \times 3) - 4 = 17$$

$$V = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{17 - (-3)}{3 - 1} = \frac{20}{2} = 10 \frac{m}{s}$$

ب)

$$V = \frac{dx}{dt} = 6t - 2 \rightarrow t = 4s \rightarrow V = 6 \times 4 - 2 = 22 \frac{m}{s}$$

ج)

$$V = 6t - 2 \begin{cases} t_1 = 2s \rightarrow V_1 = 10 \frac{m}{s} \\ t_2 = 5s \rightarrow V_2 = 28 \frac{m}{s} \end{cases}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{V_2 - V_1}{t_2 - t_1} = \frac{28 - 10}{5 - 2} = \frac{18}{3} = 6 \frac{m}{s^2}$$

د)

$$a = \lim \frac{\Delta V}{\Delta x} = \frac{dv}{dx} = 6 \frac{m}{s^2}$$

چون a عددی ثابت شد یعنی شتاب لحظه ای در تمام لحظات $a=6$ است.

محاسبه سرعت لحظه ای :

طبق تعریف سرعت لحظه ای، حد سرعت متوسط در بازه های زمانی بسیار کوچک برابر سرعت لحظه ای است. پس می توان نوشت :

$$\left. \begin{aligned} \vec{V} &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ V &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V} \end{aligned} \right\} \Rightarrow V \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = V = \frac{dx}{dt}$$

$$\text{اگر } a = 2t^3 + 3t^2 - 4t \Rightarrow V = \frac{dx}{dt} = 6t^2 + 6t - 4$$

تعیین رابطه شتاب لحظه ای :

طبق تعریف شتاب لحظه ای برابر است با حد شتاب متوسط در بازه های زمانی بسیار کوچک که Δt به سمت صفر میل می کند.



$$\begin{aligned}\bar{V} &= \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \\ V &= \frac{dx}{dt} \\ \bar{a} &= \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \\ a &= \frac{dv}{dt}\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}\bar{a} &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ a &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}\end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$$\left\{ \begin{aligned}a &= \frac{dv}{dt} \\ V &= \frac{dx}{dt}\end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$x = 2t^4 + 3t^2 - t + 5$$

$$V = \frac{dx}{dt} = 8t^3 + 6t - 1$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 24t^2 + 6$$

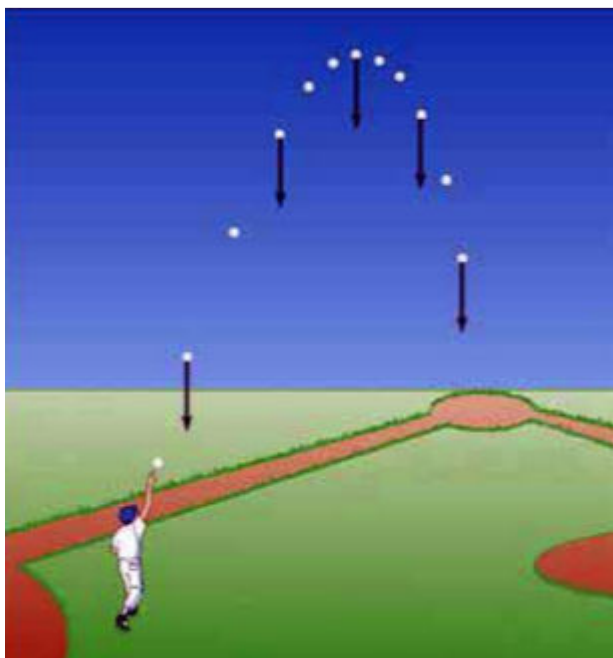
نکته :

برای محاسبه V (سرعت) باید به سراغ x برویم اگر سرعت لحظه ای را می خواهیم از مشتق می گیریم اما اگر سرعت متوسط را می خواهیم x_1 و x_2 را در دو لحظه t_1 و t_2 بدست می آوریم. همچنین برای محاسبه شتاب a باید به سراغ V برویم حال اگر شتاب لحظه ای را بخواهیم از V مشتق می گیریم اما اگر شتاب متوسط را بخواهیم V_1 و V_2 را در لحظات t_1 و t_2 حساب می کنیم.

نکته :

شتاب و سرعت متوسط همیشه بین دو لحظه t_1 و t_2 محاسبه می شود. اما شتاب و سرعت لحظه ای همیشه در یک زمان t بدست می آید. و برای محاسبه آنها مشتق گیری لازم است.

حرکت دو بعدی یا حرکت صفحه ای



حرکت در دو بُعد یا حرکت در صفحه

در این بخش به بررسی حرکت در صفحه که آن را حرکت دو بُعدی نیز می نامیم، می پردازیم. حرکت گلوله توپی که شلیک می شود و یا حرکت یک سیاره به دور خورشید و یا حرکت اتومبیل در پیچ جاده و ... مثال هایی از حرکت دوبعدی هستند.



شکل ۱-۲۱- مسیر توپ گلف

مکان جسم در یک صفحه، با بردار $\vec{r}$ نمایش داده می شود. این بردار را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad (۱۷-۱)$$

که در آن $\vec{i}$ و $\vec{j}$ به ترتیب بردارهای یکه در جهت های x و y هستند.

چون هنگام حرکت جسم، در هر لحظه بردار مکان آن تغییر می کند، برای مشخص کردن مکان جسم در حین حرکت، کافی است که مؤلفه های x و y را به صورت تابع هایی از زمان داشته باشیم :

$$x = f(t) \text{ و } y = g(t) \quad (۱۸-۱)$$

رابطه های ۱-۱۸ معادله های حرکت یک جسم را در دو بُعد نشان می دهند. واضح است که در حرکت دو بُعدی، بردار مکان نیز تابعی از زمان است :

$$\vec{r} = f(t) \vec{i} + g(t) \vec{j} \quad (۱۹-۱)$$

جابه جایی و سرعت متوسط : برای بررسی حرکت جسم روی مسیری مطابق شکل ۱-۲۲،

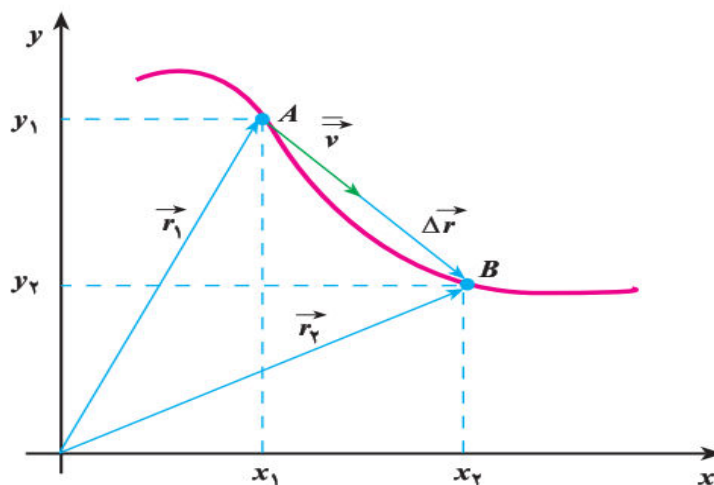
فرض کنید متحرکی در لحظه t_1 در نقطه A (مکان r_1) و در لحظه t_2 در نقطه B (مکان r_2) باشد. برداری که از A به B رسم می شود جابه جایی (تغییر مکان) جسم را در بازه زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ نمایش می دهد. این بردار که در شکل ۱-۲۲ رسم شده است از رابطه زیر به دست می آید :

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (20-1)$$

$$\vec{\Delta r} = (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}) - (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j})$$

$$\vec{\Delta r} = (\Delta x) \vec{i} + (\Delta y) \vec{j} \quad (21-1)$$

در رابطه ۲۱-۱، $\Delta x = x_2 - x_1$ و $\Delta y = y_2 - y_1$ است.



شکل ۲۲-۱- بردار سرعت متوسط و بردار تغییر مکان هم جهت اند.

سرعت متوسط جسم در یک بازه زمانی معین، همانند حالت یک بعدی، به صورت زیر تعریف

می شود:

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} \quad (22-1)$$

با استفاده از رابطه ۲۱-۱ داریم:

$$\vec{v} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \vec{i} + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t} \right) \vec{j} \quad (23-1)$$

اگر $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ را با $\bar{v}_x$ و $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ را با $\bar{v}_y$ نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\vec{v} = (\bar{v}_x) \vec{i} + (\bar{v}_y) \vec{j} \quad (24-1)$$

مثال ۱-۱۵

معادله‌های حرکت جسمی در دو بُعد، در SI به صورت زیر است :

$$x = 2t \text{ و } y = -t^2 + 4t$$

الف) بردار مکان جسم را در لحظه‌های $t_1 = 1s$ و $t_2 = 2s$ به دست آورید.

ب) سرعت متوسط آن را در بازه زمانی ۱ تا ۲ ثانیه تعیین و بزرگی آن را حساب کنید.

پاسخ

الف) در $t_1 = 1s$:

$$x_1 = 2m \text{ و } y_1 = +3m$$

$$\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$x_2 = 4m \text{ و } y_2 = 4m$$

به همین ترتیب در $t_2 = 2s$:

$$\vec{r}_2 = 4\vec{i} + 4\vec{j}$$

ب) در بازه زمانی ۱ تا ۲ ثانیه :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 4 - 2 = 2m$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 4 - 3 = 1m$$

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2}{1} = 2m/s$$

$$\bar{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1}{1} = 1m/s$$

$$\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$$

و در نتیجه

$$(\bar{v})^2 = (\bar{v}_x)^2 + (\bar{v}_y)^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

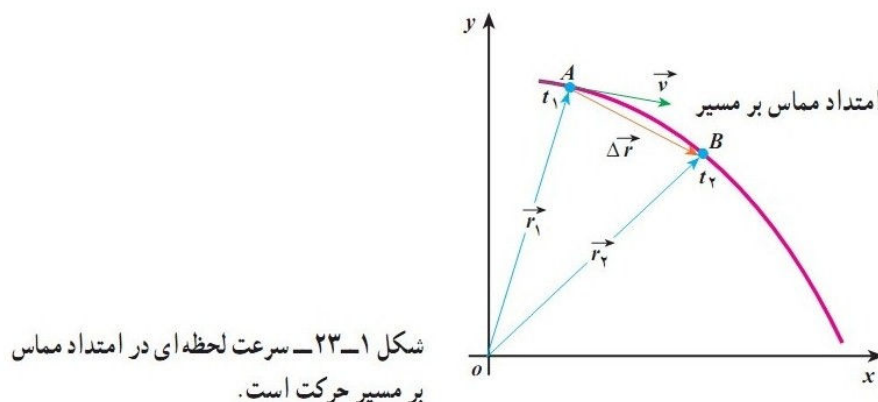
$$\bar{v} = \sqrt{5} \approx 2.23m/s$$

سرعت لحظه‌ای : در شکل ۱-۲۳ نمودار حرکت جسمی روی یک مسیر خمیده در صفحه xoy

نشان داده شده است. مکان جسم در دو لحظه t_1 و t_2 مشخص شده است. پیش‌تر گفتیم که بردار سرعت متوسط در یک بازه زمانی معین، با بردار جابه‌جایی مربوط به آن، هم‌جهت است. همچنین می‌دانید هنگامی که بازه زمانی Δt ، کوچک و کوچک‌تر شود، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای

نزدیک و نزدیک تر می شود؛ یعنی، بردار سرعت لحظه ای حد بردار سرعت متوسط است وقتی Δt به سمت صفر، میل می کند :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{v}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (25-1)$$



به عبارت دیگر می توان گفت که «سرعت لحظه ای، مشتق بردار مکان جسم، نسبت به زمان است» :

$$\vec{v} = \frac{d \vec{r}}{dt} \quad (26-1)$$

در حدی که Δt به سمت صفر میل کند، با استفاده از رابطه ۱-۲۱ می توان سرعت لحظه ای جسم را بر حسب مؤلفه های آن در دو امتداد x و y به دست آورد :

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt} \right) \vec{i} + \left(\frac{dy}{dt} \right) \vec{j}$$

$$\vec{v} = (v_x) \vec{i} + (v_y) \vec{j} \quad (27-1)$$

در شکل ۱-۲۳ می بینید که وقتی t_1 به سمت t_2 میل کند، راستای بردار جابه جایی $\Delta \vec{r}$ ، به سمت راستای مماس بر منحنی مسیر، در نقطه A میل خواهد کرد. بنابراین، چون بردار سرعت متوسط همواره هم جهت با جابه جایی است، در حدی که Δt به سمت صفر میل می کند، بردار سرعت لحظه ای بر مسیر حرکت در نقطه A مماس خواهد شد. بدین ترتیب می توان گفت هنگامی که جسم روی یک مسیر خمیده حرکت می کند، جهت بردار سرعت آن که همواره بر مسیر حرکت مماس است، در هر لحظه تغییر می کند. از این پس، برای اختصار، بردار سرعت لحظه ای را سرعت می نامیم.

مثال ۱-۱۴

خودرویی در یک صفحه افقی که آن را در اینجا صفحه xoy می نامیم، حرکت می کند. معادله های حرکت آن در SI به صورت زیر است:

$$x = 6t + 5 \text{ و } y = 4t^2$$

بزرگی سرعت خودرو را در $t = 1s$ به دست آورید.

پاسخ

با استفاده از رابطه ۱-۲۷ مؤلفه های سرعت به دست می آید:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6 \text{ m/s}$$

ملاحظه می شود که مؤلفه افقی سرعت مقدار ثابتی دارد و تابع زمان نیست. به همین ترتیب برای مؤلفه قائم سرعت داریم:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 8t$$

همان گونه که ملاحظه می شود این مؤلفه، تابع زمان است و بزرگی آن در $t = 1s$

برابر است با:

$$v_y = 8 \text{ m/s}$$

پس بزرگی سرعت در $t = 1s$ برابر است با:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ m/s}$$

شتاب متوسط و شتاب لحظه ای

می دانید وقتی که سرعت جسم در حال حرکت تغییر می کند، حرکت را شتاب دار می گویند. البته این تغییر سرعت می تواند به معنای تغییر در بزرگی سرعت، تغییر در جهت سرعت و یا هر دو باشد. دیدیم که وقتی مسیر حرکت جسم خمیده است، جهت سرعت آن الزاماً تغییر می کند. بنابراین، حرکت بر روی مسیر منحنی، حرکتی شتاب دار است. حتی اگر بزرگی سرعت هم تغییر نکند.

در شکل ۱-۲۴ الف بردارهای سرعت در دو لحظه t_1 و t_2 روی مسیر نشان داده شده است. برای محاسبه تغییر سرعت در بازه زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ بردارهای مساوی با $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ را مطابق شکل ۱-۲۴ ب از مبدأ مشترک O رسم می کنیم و $\Delta \vec{v}$ را به دست می آوریم. در اینجا نیز، مشابه حرکت یک بعدی، بردار شتاب متوسط را در بازه زمانی Δt به صورت زیر تعریف می کنیم:

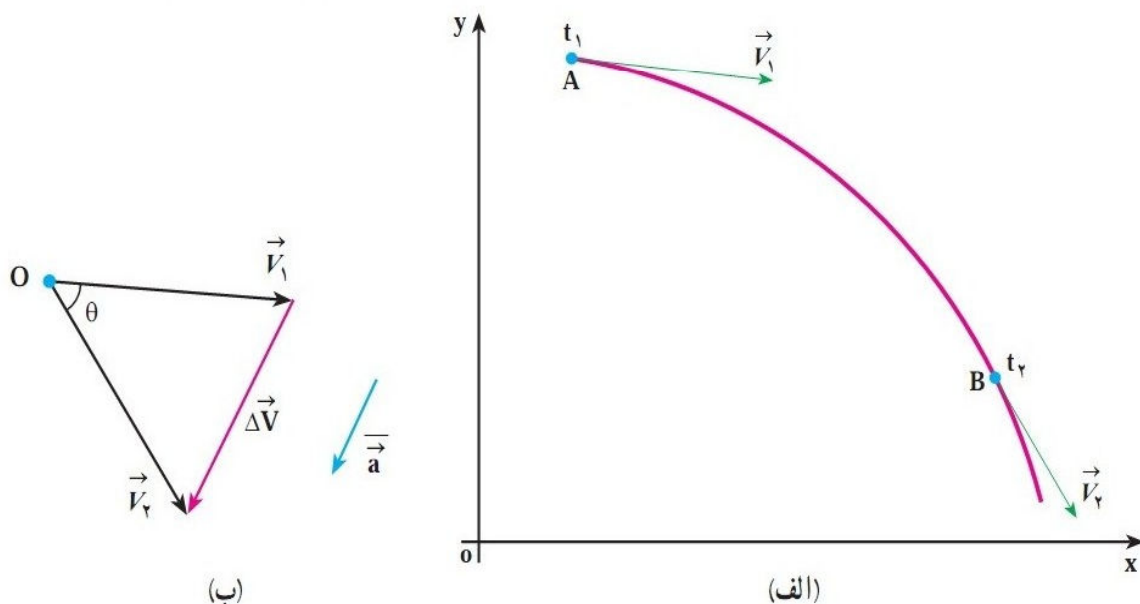
$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (1-28)$$

با استفاده از رابطه ۱-۲۷ داریم:

$$\vec{a} = \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t} \right) \vec{i} + \left(\frac{\Delta v_y}{\Delta t} \right) \vec{j}$$

که آن را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{a} = (\bar{a}_x) \vec{i} + (\bar{a}_y) \vec{j} \quad (1-29)$$



شکل ۱-۲۴ بردار شتاب متوسط با $\Delta \vec{v}$ هم جهت است.

شتاب لحظه ای در لحظه t_1 را نیز می توان به صورت حد شتاب متوسط، هنگامی که Δt به سمت صفر میل می کند، تعریف کرد؛ یعنی:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (۳۰-۱)$$

با توجه به مفهوم مشتق، رابطه ۳۰-۱ به صورت زیر نوشته می شود:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (۳۱-۱)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2(\vec{r})}{dt^2} \quad (۳۲-۱)$$

به کمک رابطه ۲۹-۱ می توانیم بنویسیم:

$$\vec{a} = \left(\frac{dv_x}{dt}\right) \vec{i} + \left(\frac{dv_y}{dt}\right) \vec{j} \quad (۳۳-۱)$$

که در آن $\frac{dv_x}{dt} = a_x$ و $\frac{dv_y}{dt} = a_y$ مؤلفه های شتاب لحظه ای هستند.

در نتیجه می توان نوشت:

$$\vec{a} = (a_x) \vec{i} + (a_y) \vec{j} \quad (۳۴-۱)$$

رابطه ۲۸-۱ نشان می دهد که $\vec{a}$ و $\Delta \vec{v}$ هم جهت اند، ولی همان طور که در شکل ۲۴-۱ ب نشان داده شده است، در حرکت روی مسیر خمیده، معمولاً بردار شتاب متوسط $\vec{a}$ ، با بردارهای سرعت، $\vec{v}_1$ یا $\vec{v}_2$ هم جهت نیست؛ درحالتی هم که Δt به سمت صفر میل می کند و بردار $\vec{v}_2$ به بردار $\vec{v}_1$ بسیار نزدیک می شود، شتاب لحظه ای با سرعت لحظه ای نیز معمولاً هم جهت نخواهد بود، ولی به کمک رابطه ۳۳-۱ و با داشتن معادله سرعت، جهت بردار شتاب لحظه ای را که از این پس آن را به اختصار شتاب خواهیم نامید، می توان به دست آورد.

مثال ۱-۱۷

معادله حرکت دو بعدی جسمی در SI به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x = 20t^2 \\ y = -5t^3 \end{cases}$$

بردارهای سرعت و شتاب این جسم را در لحظه $t = 1s$ به دست آورید. آیا این

دو بردار هم جهت اند؟

پاسخ

برای تعیین بردار سرعت، ابتدا مؤلفه‌های v_x و v_y را در $t = 1s$ به دست

می‌آوریم :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4 \cdot t \Rightarrow v_x = 4 \cdot m/s \quad t=1s$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -15t^2 \Rightarrow v_y = -15 \cdot m/s \quad t=1s$$

بنابراین بردار سرعت لحظه‌ای در $t = 1s$ چنین خواهد بود :

$$\vec{v} = 4 \cdot \vec{i} - 15 \cdot \vec{j}$$

برای تعیین بردار شتاب نیز ابتدا مؤلفه‌های شتاب، یعنی a_x و a_y را به دست

می‌آوریم. مؤلفه افقی شتاب، ثابت است :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 4 \cdot m/s^2$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = -3 \cdot t$$

a_y تابع زمان است و در $t = 1s$ برابر است با :

$$a_y = -3 \cdot m/s^2$$

با توجه به مقدارهای a_x و a_y در لحظه فوق، بردار شتاب در $t = 1s$ نیز نوشته

می‌شود :

$$\vec{a} = 4 \cdot \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}$$

زاویه‌ای که بردارهای سرعت و شتاب در لحظه $t = 1s$ با محور افقی می‌سازند

به ترتیب برابرند با :

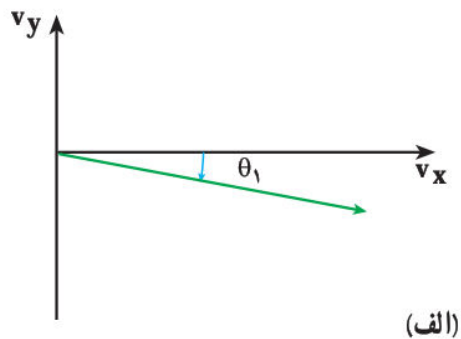
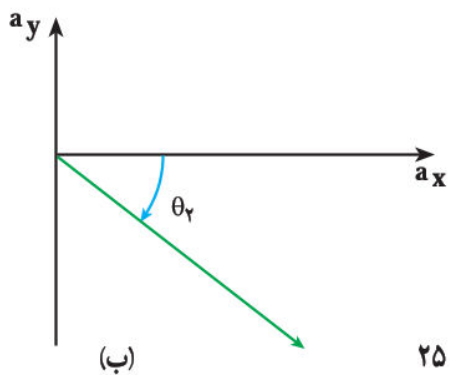
$$\tan \theta_1 = \frac{v_y}{v_x} = \frac{-15}{4}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{-3}{8} \approx -7^\circ$$

$$\tan \theta_2 = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-3}{4}$$

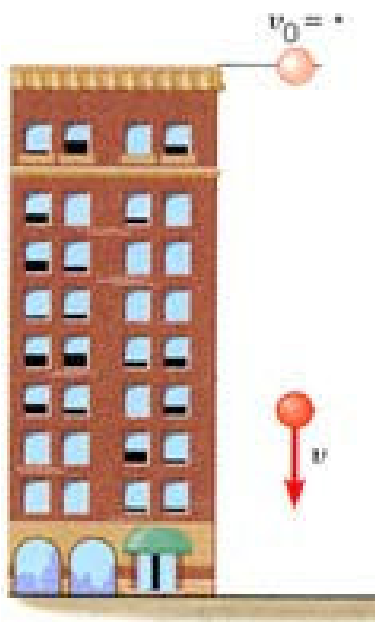
$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{-3}{4} \approx -37^\circ$$

با مقایسه زاویه های θ_1 و θ_2 در شکل ۱-۲۵ می توان نتیجه گرفت که بردارهای سرعت و شتاب در این لحظه هم جهت نیستند.



شکل ۱-۲۵

سقوط آزاد





دانشگاه فنی و حرفه ای (دانشکده فنی کشاورزی مراغه) گروه مکانیک

حرکت اجسام به سمت پایین یا به سمت بالا در راستای قائم را سقوط آزاد گویند. در حرکت سقوط آزاد اگر سمت بالا مثبت انتخاب شد به دلیل آنکه شتاب گرانشی g همیشه به سمت پایین است بنابراین g منفی خواهد شد. اما در مورد سرعت اگر متحرک چه از پایین مبدأ یا چه از بالای مبدأ به سمت بالا حرکت کند مقدار سرعت آن مثبت اما برعکس اگر به سمت پایین حرکت کند سرعت آن منفی است اما اگر متحرک بالای مبدأ برود مکان های y آن مثبت اما اگر زیر مبدأ حرکت کنند مکان های y آن منفی است.

$$Y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

$$v = -gt + v_0$$

$$v^2 - v_0^2 = -2gy$$

مثال: سنگی را از بالای ساختمان بلندی به ارتفاع $45m$ رها می کنیم، الف) سنگ پس از چه زمانی به زمین می رسد؟ ب) سرعت آن، هنگام رسیدن به زمین چقدر است؟
($g = 10 m/s^2$)

پاسخ

الف) برای بررسی حرکت سقوط آزاد اجسام، محور y را در راستای قائم و روبه بالا و مبدأ آن را نقطه رها کردن جسم در نظر می گیریم. در این صورت، معادله حرکت با شتاب ثابت به صورت زیر به دست می آید:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$-45 = -\frac{1}{2}(10)t^2 \Rightarrow t = 3s$$

ب) با استفاده از معادله سرعت داریم:

$$v = -gt$$

$$v = -10 \times 3 = -30 m/s$$

مثال) جسمی از بالای ساختمان به ارتفاع $50m$ به سمت بالا پرتاب می شود اگر سرعت اولیه پرتاب $20 m/s$ باشد محاسبه کنید:

الف) از بالای ساختمان این جسم حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می رود.

ب) این ارتفاع را در چه مدت زمانی طی می کند

ج) چه زمانی طول می کشد تا به زمین برسد

د) سرعت جسم هنگام برخورد با زمین چقدر است؟



دانشگاه فنی و حرفه ای (دانشکده فنی کشاورزی مراغه) گروه مکانیک

در بالاترین نقطه ای که جسم می رسد جسم لحظه ای ساکن مانده و سرعت در آنجا صفر است. چون به سمت بالا پرتاب شده پس مقدار V_0 مثبت است و جسم بالای مبدأ هم رفته پس y هم مثبت است.

$$v^2 - v_0^2 = -2gy \Rightarrow 0^2 - 20^2 = -2 \times 10y \Rightarrow -400 = -20y \Rightarrow y = \frac{-400}{-20} = 20 \Rightarrow y = 20m$$

$$v = -gt + v_0 \Rightarrow 0 = -10t + 20 \Rightarrow 10t = 20 \Rightarrow t = 2s$$

ج) چون حین پرتاب اولیه V_0 به سمت بالا بود لذا V_0 عددی مثبت است ضمناً مکان آن هم ۵۰ متر پایین مبدأ است لذا $y = -50m$ و مکان پرتاب مبدأ است. $y_0 = 0$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t + V_0 \Rightarrow -50 = \frac{1}{2} \times 10 \times t^2 + 20t + 0 \Rightarrow -50 = -5t^2 + 20t$$

$$\Rightarrow 5t^2 - 20t - 50 = 0 \Rightarrow t^2 - 4t - 10 = 0$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = t = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-10)}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 40}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{56}}{2}$$

$$= \frac{4 + 7.48}{2} = \frac{11.48}{2} = 5.74$$

$$t = 5.74s$$

$$v = -gt + v_0 \Rightarrow v = -10 \times 5.74 + 20 \Rightarrow v = -57.4 + 20 \Rightarrow v = -37.4 \text{ m/s}$$

مثال) در مسئله قبل اگر جسم با سرعت 20 m/s به سمت پایین پرتاب می شود چه زمانی طول می کشید به زمین برسد و با چه سرعتی به زمین می رسید.

چون این بار با سرعت اولیه به سمت پایین پرتاب شده و جهت پایین خلاف جهت مثبت است لذا در رابطه مقدار V_0 را منفی قرا می دهیم و چون ما به سمت زیر مبدأ حرکت می کنیم مقدار $y = -50$ یعنی منفی است.

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

$$\Rightarrow -50 = -\frac{1}{2} \times 10 \times t^2 + (-20)t + 0 \Rightarrow -50 = -5t^2 - 20t$$

$$\Rightarrow 50 = 5t^2 + 20t \Rightarrow 5t^2 + 20t - 50 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 + 4t - 10 = 0$$



$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow t = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-10)}}{2 \times 1} \Rightarrow t = \frac{-4 \pm 7/48}{2}$$

$$= \frac{-4 + 7/48}{2} = 1/74s \Rightarrow t = 1/74s$$

$$v = -gt + v_0 \Rightarrow v = -10 \times 1/74 - 20 = -17/4 - 20 = -37/4 m/s$$

$$v = -37/4 m/s$$

مثال) جسمی را با سرعت $10 m/s$ به سمت بالا پرتاب می کنیم در این صورت محاسبه کنید:

الف) این جسم تا چه ارتفاعی بالا می رود و چه زمانی طول می کشد؟

ب) سرعت این جسم در ارتفاع $2m$ چقدر است و چه زمانی طول می کشد تا به این ارتفاع برسد؟
چون که جسم به سمت بالا پرتاب می شود مقدار سرعت اولیه به سمت بالا مثبت است. ضمناً جسم به بالای مبدأ می رود. لذا مکان های y آن مثبت است همچنین در بالاترین ارتفاع سرعت صفر است.

الف) $v_f^2 - v_0^2 = -2gy \Rightarrow 0^2 - 10^2 = -2 \times 10y = -100 = -20y \Rightarrow y = 5m$

$$v = -gt + v_0 \Rightarrow 0 = -10t + 10 \Rightarrow 10t = 10 \Rightarrow t = 1s$$

مقدار $y=2$ چون بالای مبدأ است مقدار مثبت دارد.

$$v^2 - v_0^2 = -2gy \Rightarrow v^2 - 10^2 = -2 \times 10 \times 2 \Rightarrow v^2 - 100 = -40 \Rightarrow v^2 = 100 - 40$$

ب) $\Rightarrow v^2 = 60 \Rightarrow v\sqrt{60} \Rightarrow v = 7/74 m/s$

$$v = -gt + v_0 \Rightarrow 7/74 = -10t + 10 \Rightarrow 10t = 10 - 7/74 \Rightarrow 10t = 2/26 \Rightarrow t = /226s$$

سقوط آزاد:

حرکت افقی شتابدار	حرکت سقوط آزاد	مستقل از	کاربرد برای پیدا کردن
$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$	$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$ معادله حرکت (مکان - زمان)	v	y, t
$v = at + v_0$	$v = -gt + v_0$ معادله سرعت - زمان	x	v, t
$v_f^2 - v_i^2 = 2a\Delta x$ $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$	$v_f^2 - v_i^2 = -2g\Delta y$ معادله مستقل از زمان	t	v, y



دانشگاه فنی و حرفه ای (دانشکده فنی کشاورزی مراغه) گروه مکانیک

مثال)

گلوله ای را از ساختمانی به ارتفاع $30m$ به سمت بالا پرتاب می کنیم، اگر این گلوله ۸ ثانیه

طول بکشد تا به نقطه پرتاب برسد در این صورت محاسبه کنید:

الف) با چه سرعت اولیه ای به سمت بالا پرتاب شده است؟

ب) حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می رود؟

ج) از لحظه پرتاب تا رسیدن گلوله به زمین چه مدت زمانی طول می کشد؟

د) گلوله با چه سرعتی به زمین برخورد می کند؟



جواب:

الف) اگر گلوله با سرعت $V_0 +$ بالا رود هنگام برگشت در همان نقطه ، چون جهتش به سمت پایین است سرعتی $V_0 -$ دارد.

$$(الف) \quad V = gt + V_0$$

$$-V_0 = -10 \times 8 + V_0$$

$$-V_0 - V_0 = -80 \Rightarrow -2V_0 = -80$$

$$V_0 = \frac{-80}{-2} = 40 \Rightarrow V_0 = 40 \text{ m/s}$$

در نقطه اوج $V^2 = B$

$$V_2^2 - V_1^2 = -2g\Delta y$$

$$(ب) \quad V^2 - V_0^2 = -2gh \Rightarrow 0^2 - 40^2 = -2 \times 10h$$

$$-40^2 = -20h \Rightarrow h = \frac{-1600}{-20} = 80(m)$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t + y_0$$

$$-30 = -\frac{1}{2} \times 10t^2 + 40t + 0$$

$$5t^2 - 40t - 30 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t - 6 = 0$$

$$(ج) \quad t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$t = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1}$$

$$t = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 24}}{2} = \frac{8 + \sqrt{88}}{2} = 8/69(s) \rightarrow t = 8/69(s)$$

$$(د) \quad V^2 - V_0^2 = -2g\Delta y$$

$$V^2 - (40)^2 = -2 \times 10 \times (-30) \Rightarrow V^2 - 1600 = 600$$

$$V^2 = 600 + 1600 = 2200 \Rightarrow V = \sqrt{2200} = 46/9 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow V = -gt + V_0 = -10 \times 8/69 + 40 = -86/9 + 40 = -46/9$$

$$(راه دوم) \Rightarrow V = -46/9 \text{ m/s}$$



نکته :

در مسئله قبل گلوله ۸ ثانیه طول کشیده تا از پشت بام بالا رفته و دوباره به سطح آن باز گردد. پس طبق قسمت ج (زمان ۸/۶۹ ثانیه) تنها ۰/۶۹ ثانیه طول می کشد تا گلوله از پشت بام به زمین برسد. که این موضوع در مسئله بعد تحقیق می شود. اگر طبق مسئله قبل گلوله ای با سرعت 40 m/s از پشت بامی به ارتفاع 30 m مستقیماً به سمت زمین پرتاب شود. در این صورت:

الف) مدت زمانی که طول می کشد تا گلوله به زمین برسد را محاسبه کنید؟

ب) سرعت آن هنگام برخورد به زمین را بدست آورید؟

$$\rightarrow y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t + V_0$$

$$\text{الف) } -30 = -\frac{1}{2} \times 10t^2 - 40t + 0$$

$$5t + 40t - 30 = 0 \Rightarrow t^2 + 8t - 60 = 0$$

$$t = \frac{(-a) \pm \sqrt{(8)^2 - 4 \times 1 \times (-6)}}{2 \times 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{88}}{2} \Rightarrow t = \frac{-8 \pm \sqrt{88}}{2} = \frac{-8 + 9.38}{2} = \frac{9.38}{2} = 0.69$$

$$t = 0.69(s)$$

$$V = -gt + V_0 \Rightarrow V = -10 \times 0.69 - 40 = -6.9 - 40$$

$$\text{ب) } V = 4.69 \text{ m/s}$$

مثال

از بالای یک ساختمان بسیار بلند گلوله اول از حالت سکون و ۲ ثانیه بعد گلوله دوم با سرعت اولیه 10 m/s به سمت پایین پرتاب می شود. در این صورت این دو گلوله پس از طی چه مکانی و زمانی به هم می رسند؟

$$\text{گلوله اول) } y_1 = -\frac{1}{2}gt_1^2 + v_{01}t_1 \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2} \times 9.8t_1^2 + 0t_1$$

$$\text{گلوله دوم) } y_2 = -\frac{1}{2}gt_2^2 + v_{02}t_2 \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{2} \times 9.8(t-2)^2 + 10(t-2)$$

در جایی که به هم می رسند $[y_1 = y_2] \leftarrow$

$$\begin{cases} y_1 = -4.9t^2 \\ y_2 = -4.9(t-2)^2 - 10(t-2) \end{cases}$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow -4.9t^2 = -4.9(t-2)^2 - 10(t-2)$$

$$-4.9t^2 = -4.9(t^2 - 4t + 4) - 10t + 20$$

$$-4.9t^2 = -4.9t^2 + 19.6 - 10t + 20$$



دانشگاه فنی و حرفه ای (دانشکده فنی کشاورزی مراغه) گروه مکانیک

چون t منفی شد یعنی به هم نمی رسند.

$$0 = 19/6t - 10t - 19/6 + 20 \Rightarrow 9/6 + 0/4 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-0/4}{9/6}$$

$$y = -4/9t^2 \Rightarrow y = -4/9(1/337)^2$$

$$y = -8/75(m)$$

از یک ساختمان بسیار بلند گلوله اول $10m/s$ به سمت پایین پرتاب می شود و یک ثانیه بعد گلوله دوم با سرعت $30m/s$ به سمت پایین پرتاب می شود. در این صورت این دو گلوله پس از طی چه زمان و مسافتی به هم می رسند.

$$(گلوله اول) \quad y_1 = -\frac{1}{2}gh_1^2 + V_{01}t \Rightarrow y_1 = -4/9t^2 - 10t$$

$$(گلوله دوم) \quad y_2 = -\frac{1}{2}gt_2^2 + V_{02}t_2 \Rightarrow y_2 = -4/9(t-1)^2 - 30(t-1)$$

$$\begin{cases} V_{x1} = -10 \\ V_{y2} = -20 \end{cases} \quad \left/ \quad \begin{array}{l} y_1 = y_2 \\ -4/9t^2 - 10t = 4/9(t-1)^2 - 30(t-1) \end{array} \right.$$

$$t = ? \Rightarrow y = -4/9t^2 - 10t$$

(مثال)

ساختمانی به ارتفاع $50m$ وجود دارد و همزمان یکی از بالای ساختمان گلوله ای را از حال سکون رها می کند و دیگری از روی زمین گلوله ای دیگر را با سرعت $20m/s$ به سمت بالا پرتاب می کند. در این صورت این گلوله ها پس از چه زمانی و در چه ارتفاعی به هم می رسند.

* دقت شود که مکان y_0 با مبدأ یکی نیست مثلاً در همین مسئله اگر زمین مبدأ باشد $y_{01} = 0$ اما $y_{02} = 50m$ است.

$$y_1 = y_2$$

$$(گلوله اول) \quad y_1 = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{01}t + y_0$$

$$(گلوله دوم) \quad y_2 = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{02}t + y_{02}$$

$$\begin{cases} y_1 = -4/9t^2 + 20t + 0 \Rightarrow y_1 = -4/9t^2 + 20t \\ y_2 = -4/9t^2 + 0t + 50 \Rightarrow y_2 = -4/9t^2 + 50 \end{cases}$$



دانشگاه فنی و حرفه ای (دانشکده فنی کشاورزی مراغه) گروه مکانیک

$$y_1 = y_2 \Rightarrow -4/9t^2 + 20t = -4/9t^2 + 50$$

$$20t = 50 \Rightarrow t = \frac{50}{20} = 2/5(s)$$

$$y_2 = -4/9t^2 + 50 = -4/9 \times (2/5)^2 + 50$$

$$y = -4/9 \times 6/25 + 50 = -30/825 + 50 \Rightarrow y = 19/175m$$

مثال)

الف) گلوله ای را با چه سرعتی در امتداد قائم به طرف بالا پرتاب کنیم تا به ارتفاع $15m$ برسد؟

ب) این گلوله چه مدت در هوا خواهد ماند؟

چون فقط تا ارتفاع $15m$ می خواهیم گلوله بالا برود پس در ارتفاع $15m$ لحظه ای ساکن ایستاده و سرعتش صفر است چون حرکت به سمت بالا بوده و همچنین بالای مبدأ است هم سرعت و هم مکان y هر دو مثبتند.

در بالاترین نقطه سرعت برابر صفر است.

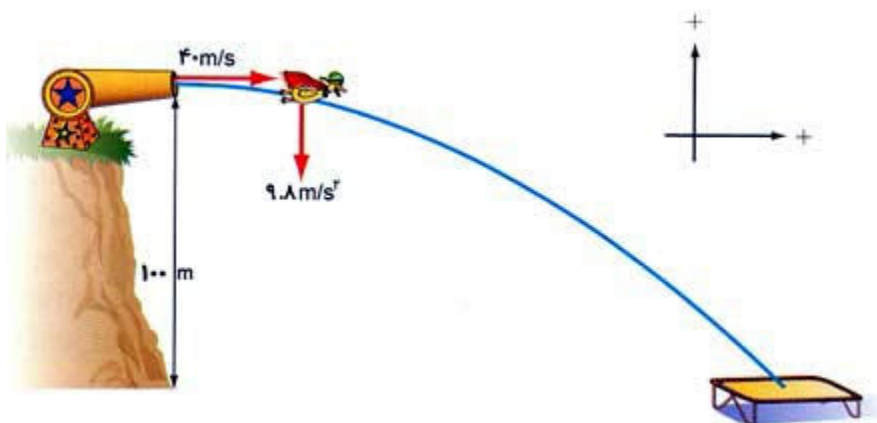
الف) $v^2 - v_0^2 = -2gy \Rightarrow 0^2 - v_0^2 = -2 \times 10 \times 15 \Rightarrow 0 - v_0^2 = -300m \Rightarrow v_0^2 = 300$

$$v_0 = \sqrt{300}$$

$$v_0 = \sqrt{300} = 17/22 \Rightarrow v_0 = 17/3 m/s$$

ب) $v = -gt + v_0 \Rightarrow 0 = -10t + 17/3 \Rightarrow 10t = 17/3 \Rightarrow t = \frac{17/3}{10}$
 $= 1/73 \Rightarrow t = 1/73s$

حرکت پرتابی





در این نوع حرکت متحرک و جسم به دلیل پرتاب در دو بعد حرکت می کنند که با مشخص بودن جهت سرعت اولیه می توان مقادیر جابجایی سرعت و شتاب را به صورت روابط زیر بدست آوریم.

$$\text{شتاب} \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{array} \right.$$

$$\text{سرعت اولیه} \left| \begin{array}{l} v_{x_0} = v_0 \cos \theta_0 \\ v_{y_0} = v_0 \sin \theta_0 \end{array} \right.$$

$$\text{جابجایی} \left| \begin{array}{l} x = v_0 \cos \theta_0 t + x_0 \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \theta_0 t + y_0 \end{array} \right.$$

در بالاترین نقطه حرکت پرتابی $v_y = 0$ به شرط آنکه جسم به همان سطح برگردد.

$$t = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \quad \text{زمان رسیدن تا نقطه اوج}$$

$$t = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g} \quad \text{زمان پرواز}$$

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} \quad \text{معادله حرکت}$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} \quad \text{ارتفاع بیشینه}$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \quad \text{برد}$$

برد: به شرط آنکه پرتاب به همان سطح افقی باز گردد.

* محاسبه سرعت و زاویه آن نسبت به افق در هر لحظه

$$\tan a = \frac{-gt + v_0 \sin \theta_0}{v_0 \cos \theta_0}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

مثال) زاویه پرتاب چقدر باشد تا بعد پرتاب با ارتفاع اوج برابر باشد.

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} \quad \text{و} \quad \sin 2\theta_0 = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0 \quad , \quad H = R \Rightarrow \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{g}$$

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} = \frac{v_0^2 (2 \sin \theta_0 \cos \theta_0)}{g} \Rightarrow \frac{\sin \theta_0}{2} = 2 \cos \theta_0 \Rightarrow \sin \theta_0 = 4 \cos \theta_0$$

$$\frac{\sin \theta_0}{\cos \theta_0} = 4 \Rightarrow \tan \theta_0 = 4 \Rightarrow \theta_0 = 76^\circ$$

مثال) جسمی تحت زاویه 60° و با سرعت اولیه 20 m/s پرتاب می شود در این صورت محاسبه کنید.



دانشگاه فنی و حرفه ای (دانشکده فنی کشاورزی مراغه) گروه مکانیک

الف) ارتفاع اوج

ب) برد پرتاب

ج) زمان رسیدن به نقطه اوج

د) زمان رسیدن همان سطح افقی

ه) در ارتفاع $5m$ به چه اندازه ای مسیر افقی طی کرده است.

$$\text{الف)} \quad v_0 = 20 \text{ m/s} \quad \theta_0 = 60^\circ \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} = \frac{20^2 \times \sin^2 60^\circ}{2 \times 10} = \frac{400 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{20} \Rightarrow H = 20 \times \frac{3}{4} = 15m$$

$$\text{ب)} \quad R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{20^2 \sin 2 \times 60^\circ}{10} = \frac{400 \times \sin 120^\circ}{10} \Rightarrow R = 34m$$

$$\text{ج)} \quad t = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} = \frac{20 \times \sin 60^\circ}{10} \Rightarrow t = 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow t = \sqrt{3}s$$

$$\text{د)} \quad t = \frac{2v_0 \sin \theta_0}{g} = \frac{2 \times 20 \sin 60^\circ}{10} = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = 2\sqrt{3}s$$

$$\text{ه)} \quad y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} + x \tan \theta_0 \Rightarrow 5 = \frac{-10x^2}{2 \times 20^2 \times \cos^2 60^\circ} + x \tan 60^\circ$$

$$5 = \frac{-10x^2}{800 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2} + x\sqrt{3} \Rightarrow 5 = \frac{-x^2}{80 \times \frac{1}{4}} + x\sqrt{3} \Rightarrow 5 = \frac{-x^2}{20} + \sqrt{3}x$$

$$100 = -x^2 + 20\sqrt{3}x \Rightarrow x^2 - 20\sqrt{3}x + 100 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{20\sqrt{3} \pm \sqrt{(-20\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 100}}{2 \times 1} \Rightarrow x = \frac{20\sqrt{3} \pm \sqrt{1200 - 400}}{2}$$

$$= \frac{20\sqrt{3} \pm \sqrt{800}}{2} = \frac{20\sqrt{3} \pm 20\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 10\sqrt{3} \pm 10\sqrt{2} \quad \left| \begin{array}{l} x = 10\sqrt{3} + 10\sqrt{2} = 10 \times 1/7 + 10 \times 1/4 = 31m \\ x = 10\sqrt{3} - 10\sqrt{2} = 10 \times 1/7 - 10 \times 1/4 = 3m \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = 31m \\ x = 3 \end{array} \right.$$

مثال) هواپیمای بمب افکنی که تحت زاویه 53° نسبت به خط قائم شیرجه می رود بمبی را در ارتفاع $730m$ رها می کند بمب $5s$ بعد از رها شدن به زمین می رسد.

الف) سرعت بمب افکن چقدر بوده است؟

ب) در این مدت بمب چه مسافتی را در راستای افقی طی کرده است؟

ج) مولف های افقی و قائم سرعت آن درست قبل از برخورد با زمین چقدر بوده است؟



دانشگاه فنی و حرفه ای (دانشکده فنی کشاورزی مراغه) گروه مکانیک

نکته : اگر هواپیما در راستای افقی پرواز می کرد و تحت زاویه ای شیرجه نمی رفت در این صورت زاویه اولیه آن صفر بود اما در این مسئله تحت زاویه شیرجه رفته است پس $\theta_0 = 53^\circ$ است.
* سرعت بمب افکن همان سرعت اولیه بمب است :

الف) $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta_0 t \Rightarrow 730 = -\frac{1}{2} \times 10 \times 5^2 + v_0 \sin 53^\circ \times 5$

$$730 = -125 + v_0 \times 0.8 \times 5 \Rightarrow 730 - 125 = 4v_0 \Rightarrow v_0 = \frac{855}{4} = 213.75 \text{ m/s}$$

سرعت بمب افکن

ب) $x = v_0 \cos \theta_0 t \Rightarrow x = 213.75 \times \cos 53^\circ \times 5 = 213.75 \times 0.6 \times 5 = 641.25 \text{ m}$

ج) $V_x = v \cos a = v_0 \cos \theta_0, V_y = v \sin a = -gt + v_0 \sin \theta_0 \Rightarrow V_x = 213.75 \times \cos 53^\circ = 128$

$$V_y = -10 \times 5 + 213.75 \times \sin 53^\circ = -50 + 213.75 \times 0.8 = 120.98$$

د) سرعت V حین برخورد به زمین و زاویه برخورد به زمین را حساب کنید.

$$v \cos a = 128/22$$

$$\tan a = \frac{120.98}{128/22}$$

$$v \sin a = 120.98$$

$$v = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(128/22)^2 + (120.98)^2}$$

مثال) تویی از زمین به هوا پرتاب شده است، سرعت آن در ارتفاع $9/1 \text{ m}$ از رابطه $\vec{v} = 7/6\vec{i} + 6/1\vec{j} \text{ m/s}$ بدست می آید.

الف) این توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می رود؟

ب) مسافت کل افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟

ج) سرعت توپ از نظر بزرگی و جهت قبل از برخورد به زمین چقدر است؟

الف) در بالاترین ارتفاع v_{y_2} پس می توان نوشت :

$$V_x = 7/6 = V_{0x}$$

$$V_y = 6/1, V_y = -gt + V_{0y}$$

$$v_{y_2}^2 - v_{y_1}^2 = -2gy \Rightarrow 0^2 - (6/1)^2 = -2 \times 10(H - y) - 37/21 = -20(H - 9/1)$$

$$\Rightarrow \frac{37/21}{20} = H - 9/1$$

$$\Rightarrow H = 10/96 \text{ m}$$



$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g} \Rightarrow H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{20} \Rightarrow v_0^2 \sin^2 \theta_0 = 220 \Rightarrow v_0 \sin \theta_0 = \sqrt{220}$$

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 - 7/6 \Rightarrow v_0 \cos \theta_0 = 7/6$$

ب)
$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{2(v_0 \sin \theta_0)(v_0 \cos \theta_0)}{g} = \frac{2 \times \sqrt{220} \times 7/6}{20} = \frac{2 \times 14/8 \times 7/6}{10} = 22/5$$

$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g}$$

$$V_{y_3}^2 - V_{y_1}^2 = -2g(y_3 - y_1) \Rightarrow V_{y_3}^2 - (6/1)^2 = -2 \times 10(0 - 9/1), V_{y_3}^2 - V_{y_1}^2 = -2g(y_3 - y_1)$$

$$V_{y_3}^2 - 37/21 = 20 \times 9/1 = 182$$

$$V_{y_3}^2 = 182 + 37/21 = 219/21 \quad V_{y_3} = \sqrt{219/21} = 14/8$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(7/6)^2 + (14/8)^2} = \sqrt{57/76 + 219/21}$$

$$V = \sqrt{276/97} = 16/6 \Rightarrow V = 16/6 \text{ m/s}$$

$$\tan \theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{14/8}{7/6} = 1/94 \Rightarrow \tan \theta = 1/94 \Rightarrow \theta = 62/8$$

د) سرعت اولیه و زاویه اولیه هنگام پرتاب را حساب کنید؟

$$\left| \begin{array}{l} v_0 \sin \theta_0 = \sqrt{220} = 14/8 \\ v_0 \cos \theta_0 = 7/6 \end{array} \right. \Rightarrow \frac{v_0 \sin \theta_0}{v_0 \cos \theta_0} = \frac{14/8}{7/6} = 1/94 \Rightarrow \theta_0 = 62/8$$

$$v_0 \sin \theta_0 = 14/8 \Rightarrow v_0 \sin 62/8 = 14/8$$

$$v_0 \times 0/88 = 14/8 \Rightarrow v_0 = \frac{14/8}{0/88} = 16/6 \Rightarrow v_0 = 16/6 \text{ m/s}$$

مثال) شخصی به توپی که در ارتفاع $1/2 \text{ m}$ بالاتر از زمین قرار دارد طوری ضربه می زند که زاویه پرتاب آن 45° و سرعت اولیه آن 33 m/s باشد توپ به جایی می رسد که در آنجا حصار به ارتفاع $7/2 \text{ m}$ قرار دارد و فاصله آن از محل پرتاب 98 m است آیا توپ از روی حصار خواهد گذشت؟

در فاصله 98 m مقدار y را محاسبه می کنیم اگر از $7/2$ متر بیشتر شد پس توپ از حصار خواهد گذشت اما اگر کمتر شد توپ به حصار برخورد می کند.

$$v_0 = 1/2 \quad v_0 = 33, x = 98 \quad \theta = 45^\circ \quad y = ?$$

$$y = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} + x \tan \theta_0 + y_0 \Rightarrow y = -\frac{10 \times (98)^2}{2(33)^2 \times \cos^2 45} + 98 \times \tan 45 + 1/2 = 11/01 > 7/2$$

توپ از حصار رد می شود.



حرکت دایره ای



حرکت دایره‌ای

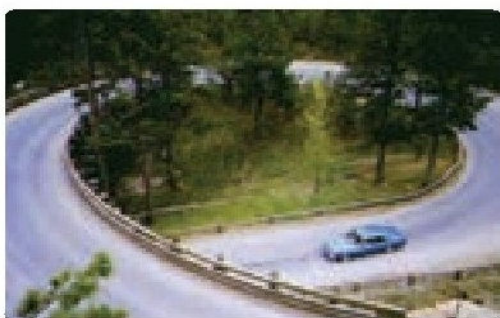
حرکت یک جسم در مسیر دایره‌ای، نمونه دیگری از حرکت در صفحه است. مسیر حرکت ماه و ماهواره‌ها به دور زمین و برخی سیاره‌ها به دور خورشید تقریباً دایره‌ای است. در بعضی وسایل خانگی مانند لباس شویی، آب میوه‌گیری و... اجسام درون آنها در مسیر دایره‌ای حرکت می‌کنند. در تصویرهای زیر نمونه‌هایی از حرکت اجسام بر مسیر دایره‌ای را مشاهده می‌کنید.



شکل ۲-۱۱-ب- طرحی از چرخش ماهواره امید به دور زمین



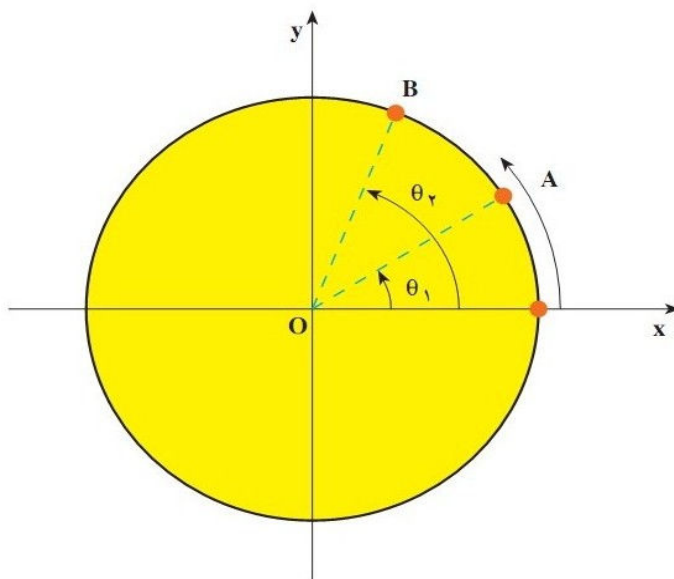
شکل ۲-۱۱-الف- تصویری از یک قطار هوایی در پارک تفریحی



شکل ۲-۱۱-پ- تصویری از حرکت اتومبیل در شیبی عرضی

اکنون به بررسی حرکت دایره‌ای و دینامیک آن می‌پردازیم.

سرعت زاویه‌ای متوسط: ذره‌ای را در نظر بگیرید که روی مسیر دایره‌ای در جهت مخالف عقربه‌های ساعت در حرکت است (شکل ۲-۱۲). در این جا منظور از ذره، جسم کوچکی است که ابعاد آن در برابر شعاع دایره ناچیز باشد. مکان ذره را روی دایره در هر لحظه می‌توان با زاویه θ نسبت



شکل ۲-۱۲

به محور ox نمایش داد. به θ ، مکان زاویه ای می گوئیم. بنابراین هنگامی که ذره در نقطه A قرار دارد مکان آن را با زاویه θ_1 و هنگامی که در نقطه B قرار دارد، مکان آن را با زاویه θ_2 نشان می دهیم. $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ را جابه جایی زاویه ای ذره می نامیم. سرعت زاویه ای متوسط ذره در حرکت دایره ای، به صورت نسبت جابه جایی زاویه ای به زمان آن تعریف می شود؛ یعنی :

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (۵-۲)$$

یکای سرعت زاویه ای، رادیان بر ثانیه (rad/s) است.

مثال ۵-۲

حرکت زمین به دور خورشید تقریباً دایره ای است، سرعت زاویه ای متوسط زمین به دور خورشید را محاسبه کنید.

پاسخ

زمین در مدت ۳۶۵ روز، یک بار به دور خورشید می چرخد و در این مدت 2π رادیان طی می کند؛ بنابراین :

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 3600} = \frac{2\pi}{31536000} \approx 2 \times 10^{-7} (rad/s)$$



سرعت زاویه ای لحظه ای: سرعت زاویه ای لحظه ای را، مانند آنچه در مورد تعریف سرعت

لحظه ای در فصل ۱ دیدیم، چنین تعریف می کنیم:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

و یا

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (2-6)$$

از این به بعد، سرعت زاویه ای لحظه ای را به اختصار سرعت زاویه ای می گوئیم.

۲-۵ - حرکت دایره ای یکنواخت

هرگاه اندازه سرعت زاویه ای ذره ای که بر روی مسیر دایره ای در حرکت است ثابت بماند، می گوئیم ذره، حرکت دایره ای یکنواخت دارد. در چنین حرکتی، سرعت زاویه ای متوسط در هر بازه زمانی با سرعت زاویه ای لحظه ای ذره برابر است.

$$\bar{\omega} = \omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - 0}$$

و یا

$$\theta = \omega t + \theta_0 \quad (2-7)$$

برای بررسی حرکت دایره ای یکنواخت، کمیت های زیر را تعریف می کنیم:

دوره: زمانی که طول می کشد تا ذره روی مسیر دایره ای یک دور کامل طی کند، دوره نامیده می شود. دوره را با T نمایش می دهند و یکای آن ثانیه است.

بسامد: تعداد دورهای ذره را در یک ثانیه بسامد (فرکانس) می گویند. بسامد را با f نمایش می دهند. یکای بسامد $\frac{1}{s}$ یا هرتز (Hz) است.

روشن است که:

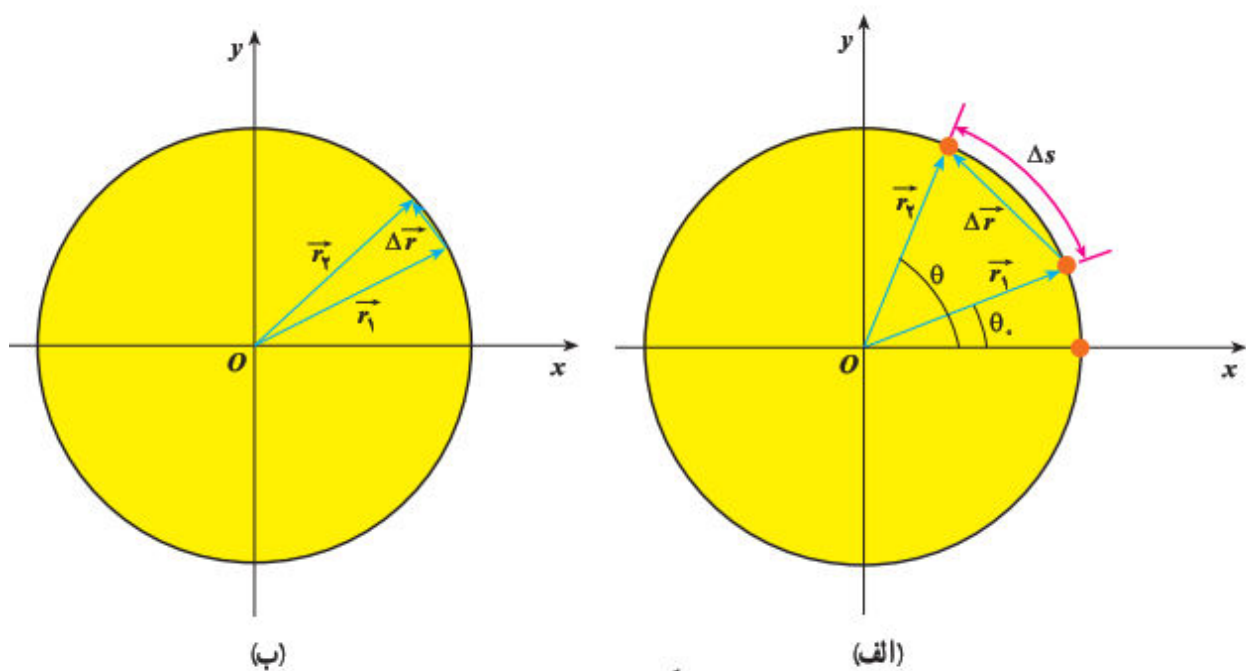
$$T = \frac{1}{f} \quad (2-8)$$

چون ذره در هر دور، 2π رادیان طی می کند، سرعت زاویه ای آن برابر است با:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (2-9)$$

سرعت خطی در حرکت دایره ای: در فصل قبل دیدید که موقعیت ذره را در صفحه می توان

با بردار مکان مشخص کرد (شکل ۲-۱۳). اگر بردار مکان ذره در لحظه t_1 ، $\vec{r}_1$ و در لحظه t_2 ، $\vec{r}_2$ باشد، جابه جایی ذره در بازه زمانی $\Delta t = t_2 - t_1$ برابر $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ خواهد بود. ذره در این بازه زمانی کمان Δs را می پیماید. اگر بازه زمانی Δt بسیار کوچک باشد، کمان Δs کوچک می شود و می توان طول کمان Δs را تقریباً با طول وتر مقابل آن، یعنی $|\Delta \vec{r}|$ برابر گرفت.



شکل ۲-۱۳



در فصل قبل دیدیم که سرعت متوسط متحرک را می توان از رابطه ۱-۲۲ به دست آورد و بزرگی سرعت لحظه ای نیز با رابطه زیر تعریف می شود :

$$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t}$$

از آنجایی که در حالت حد، $|\Delta \vec{r}| = \Delta s$ داریم :

$$|\vec{v}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (۱۰-۲)$$

در درس ریاضی خوانده اید که زاویه $\Delta\theta$ بر حسب رادیان برابر است با نسبت طول کمان مقابل به آن زاویه، به شعاع دایره.

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{r}$$

یعنی :

و یا

$$\Delta s = r\Delta\theta \quad (۱۱-۲)$$

بنابراین رابطه ۱۰-۲ را می توان به صورت زیر نوشت :

$$v = r \frac{d\theta}{dt}$$

و یا

$$v = r\omega \quad (۱۲-۲)$$

در فصل ۱ دیدیم که بردار سرعت جسم، همواره مماس بر مسیر حرکت است. v را سرعت خطی متحرک نیز می نامند.

مثال ۲-۴



شکل ۲-۱۴

در یک شهر بازی، گردونه‌ای افراد را در یک سطح افقی و در مسیر دایره‌ای می‌گرداند (شکل ۲-۱۴). به طوری که هر فرد حرکت دایره‌ای یکنواختی دارد. اگر گردونه در هر ۱۰ ثانیه یک دور بزند و شعاع چرخش برای هر نفر ۵ متر باشد، سرعت زاویه‌ای و سرعت خطی هر شخص را در این گردونه محاسبه کنید.

پاسخ

دوره چرخش $T = 10\text{ s}$ است.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \text{ rad/s}$$

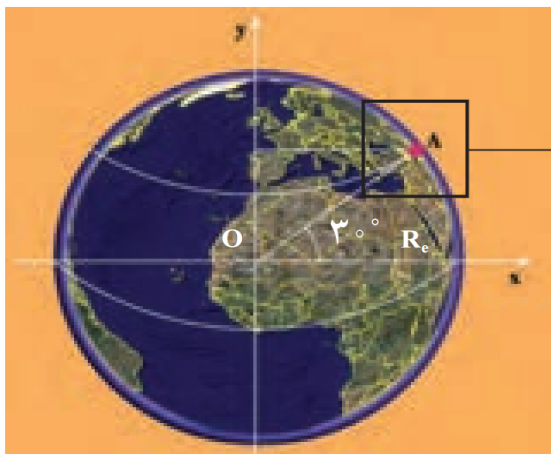
پس سرعت زاویه‌ای برابر است با:

و سرعت خطی آن نیز برابر خواهد بود با:

$$v = r\omega = 5 \times \frac{\pi}{5} = \pi / 1 \text{ m/s}$$

مثال ۲-۷

شهر آبادان در مدار جغرافیایی 30° شمالی قرار دارد. سرعت زاویه‌ای و سرعت خطی شخصی را که در این شهر زندگی می‌کند حساب کنید. شعاع زمین را $R_e = 6370 \times 10^3 \text{ m}$ بگیرید.



شکل ۲-۱۵

پاسخ

سرعت زاویه ای حرکت وضعی زمین، در تمام نقاط زمین یکسان است (چرا؟).
با توجه به این که دوره چرخش زمین به دور خود، ۲۴ ساعت است، می توانیم سرعت زاویه ای هر نقطه از زمین را محاسبه کنیم.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 24 \times 60 \times 60 = 86400 \text{ s}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{86400} = 7/27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$$

فاصله آبادان از محور چرخش زمین، با توجه به شکل ۲-۱۵ برابر است با:

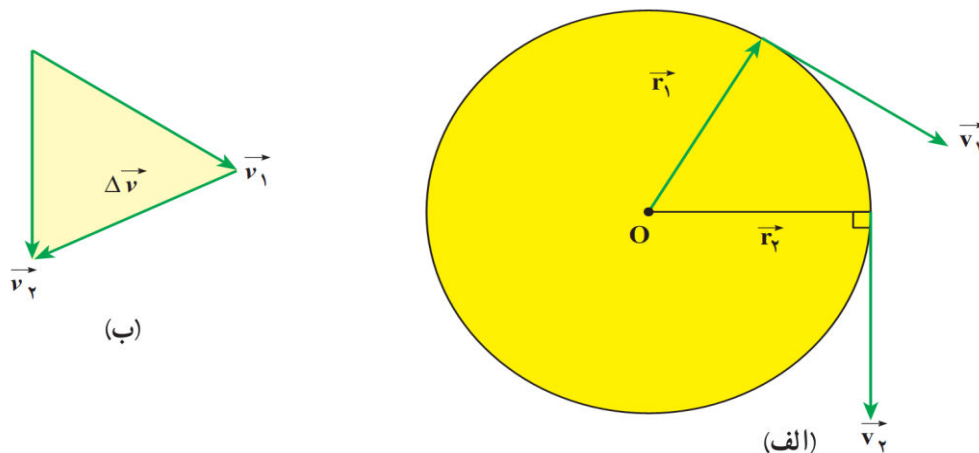
$$r = 6/4 \times 10^6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5/54 \times 10^6 \text{ m}$$

و سرعت خطی شخص در آبادان برابر است با:

$$v = r\omega = 5/54 \times 10^6 \times 7/27 \times 10^{-5} = 402/76 \text{ m/s}$$

شتاب در حرکت دایره ای یکنواخت: ذره ای را در نظر بگیرید که دارای حرکت دایره ای

یکنواخت است (شکل ۲-۱۶ الف). در فصل قبل دیدیم که بردار سرعت در هر لحظه مماس بر مسیر است. اگر مکان ذره در لحظه t_1 ، $\vec{r}_1$ و در لحظه t_2 ، $\vec{r}_2$ باشد، بردارهای سرعت متحرک در این نقاط به ترتیب بر $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ عمودند. بردار $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ در شکل ۲-۱۶ ب رسم شده است.



شکل ۲-۱۶



ملاحظه می شود با این که بزرگی بردار سرعت ثابت است، به علت تغییر راستای بردار سرعت $\Delta \vec{v} \neq 0$ است. اندازه شتاب متوسط حرکت در این حالت را می توان با استفاده از رابطه $|\vec{a}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$ به دست آورد. می توان نشان داد، هنگامی که Δt به سمت صفر میل می کند، شتاب حرکت از رابطه زیر به دست می آید:

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (2-13 \text{ الف})$$

و یا

$$a = r\omega^2 \quad (2-13 \text{ ب})$$

راستای این شتاب در راستای شعاع دایره و سوی آن به طرف مرکز است، به این ترتیب، این شتاب را شتاب مرکزگرا گویند.

مثال ۸-۲

خودرویی در یک جاده به شعاع انحنای 200 m با سرعت ثابت 20 m/s در حرکت است. شتاب مرکزگرای این خودرو را حساب کنید.

پاسخ

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{400}{200} = 2 \text{ m/s}^2$$

۲-۶- دینامیک حرکت دایره ای یکنواخت

در بخش ۲-۵ دیدیم که در حرکت دایره ای یکنواخت، شتاب جسم در راستای شعاع دایره و جهت آن به طرف مرکز است. بنابر قانون دوم نیوتون نیرو و شتاب هم جهت اند، در نتیجه در حرکت دایره ای

یکنواخت، برآیند نیروهای وارد بر جسم در راستای شعاع و به سوی مرکز است. از این رو برآیند نیروهای وارد بر جسم را که منجر به حرکت دایره‌ای می‌شوند نیروی مرکزگرا می‌نامند.

با توجه به رابطه‌های ۲-۱۳ قانون دوم نیوتون در حرکت دایره‌ای یکنواخت به صورت زیر درمی‌آید:

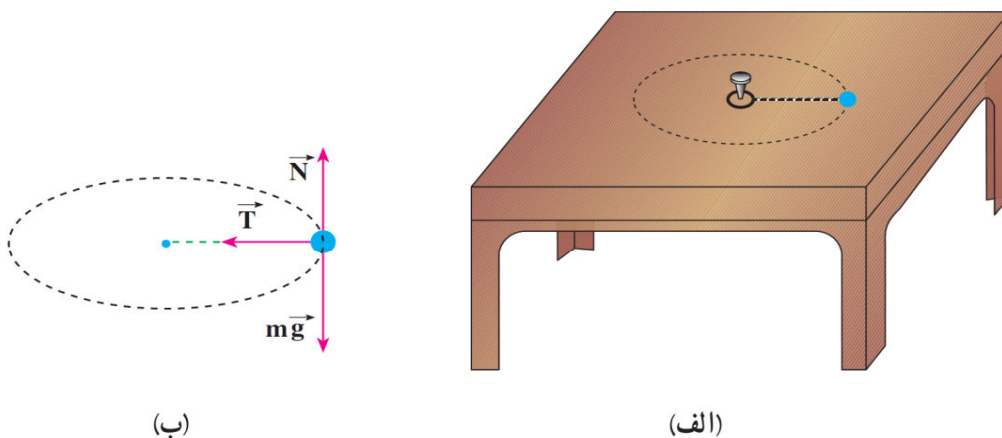
$$F = \frac{mv^2}{r} \quad (2-14 \text{ الف})$$

$$F = mr\omega^2 \quad (2-14 \text{ ب})$$

در این رابطه، F بزرگی برآیند نیروهای وارد بر جسم در راستای شعاع دایره است.

مثال ۴۲

مهره‌ای به جرم $20g$ را به نخ می‌بندیم و به انتهای دیگر نخ، حلقه کوچکی وصل می‌کنیم، سپس حلقه را مطابق شکل ۲-۱۷ الف با میخ کوتاهی در وسط یک میز ثابت می‌کنیم. نیروی اصطکاک مهره با میز ناچیز است.



شکل ۲-۱۷

فاصله مهره از میخ $25cm$ است، با یک ضربه که به مهره وارد می‌کنیم آن را روی مسیر دایره‌ای به حرکت درمی‌آوریم. نیروهای وارد بر مهره را با رسم شکل مشخص کنید. اگر مهره در هر ثانیه یک دور بزند، بزرگی نیروی کشش نخ را محاسبه کنید.

پاسخ

نیروهای وارد بر مهره در شکل ۲-۱۷ ب نشان داده شده است.
در راستای قائم، نیروی وزن و نیروی عمودی تکیه گاه بر جسم اثر می کنند. برآیند
این دو نیرو صفر است :

$$N - mg = 0$$

$$\Rightarrow N = mg$$

تنها نیروی کشش نخ می ماند که در اینجا همان نیروی مرکز گرا، یعنی : $T = m \frac{v^2}{r}$
است. سرعت زاویه ای برابر است با :

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \text{ rad/s}$$

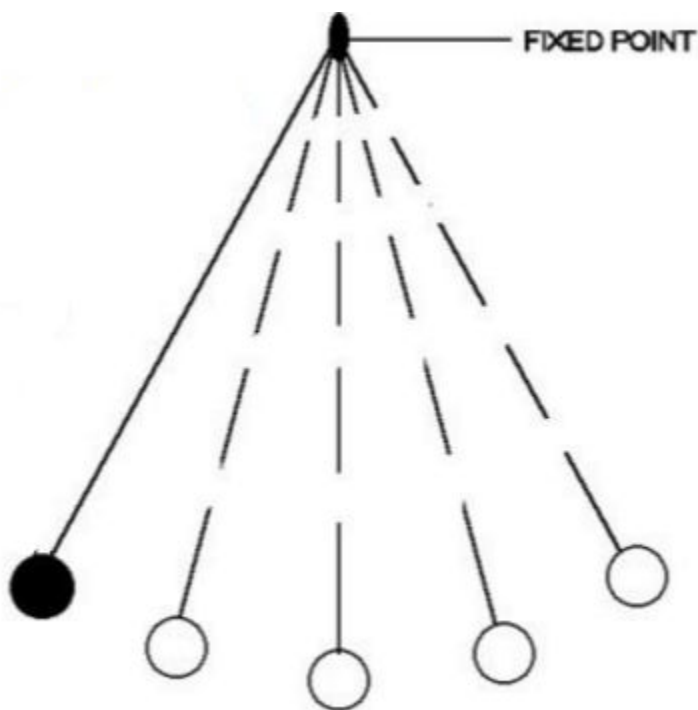
و سرعت خطی نیز برابر است با :

$$v = r\omega = 0.25 \times 2\pi = \frac{\pi}{2} \approx 1.57 \text{ m/s}$$

و نیروی کشش نخ برابر است با :

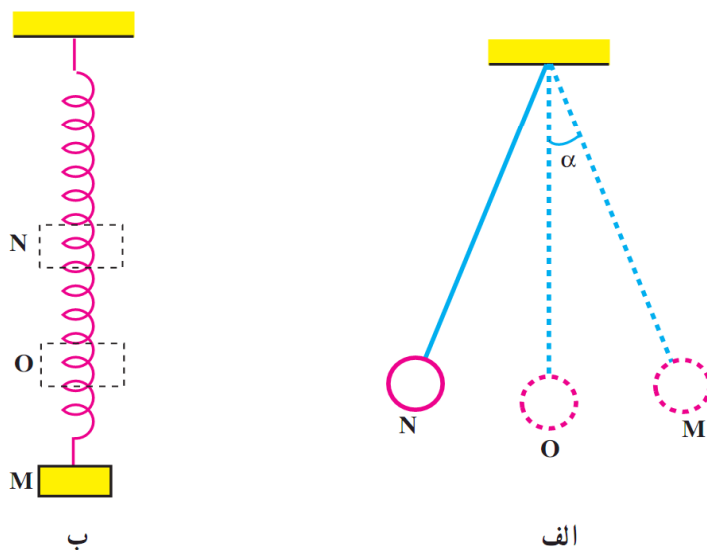
$$T = m \frac{v^2}{r} = 20 \times 10^{-3} \times \frac{\pi^2}{4} \times \frac{1}{0.25} \approx 0.2 \text{ N}$$

حرکت نوسانی



حرکت نوسانی

نگاهی به فصل: گردش زمین به دور خورشید، گردش ماه به دور زمین، ضربان قلب انسان، ارتعاش تارهای کمانچه، تار و یا سه تار، بالا و پایین رفتن تاب بازی، پیدایش فصل های سال، طلوع و غروب خورشید، یا حرکت یک آونگ ساده (شکل ۱-۳-الف)، حرکت وزنه ای که به یک فنر متصل است (شکل ۱-۳-ب) و مثال های بسیار دیگری مانند اینها، حرکت های دوره ای هستند که با گذشت زمان بارها تکرار می شوند. در حرکت های دوره ای، متحرک پس از طی زمان معینی به وضعیت اولیه برمی گردد و حرکت خود را از نو آغاز می کند. در این فصل پس از معرفی پدیده های دوره ای به توصیف حرکت هماهنگ ساده می پردازیم؛ زیرا شناخت و بررسی این حرکت، پایه و اساس مناسبی برای درک امواج و انتشار آنها فراهم می کند.



شکل ۱-۳

۱-۳- حرکت هماهنگ ساده

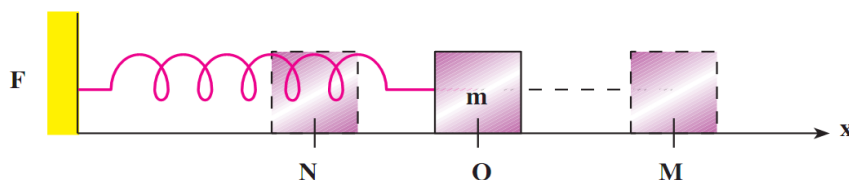
یک حرکت نوسانی را هماهنگ ساده می نامیم؛ وقتی مسیر رفت و برگشت متحرک روی یک پاره خط حول نقطه ای واقع در وسط آن باشد. برای مثال، حرکت آونگ (شکل ۱-۳-الف)، وقتی زاویه α خیلی کوچک باشد، به گونه ای که بتوان تانژانت و سینوس آن را برابر گرفت و همچنین بالا و

پایین رفتن وزنه آویخته به فنر (شکل ۱-۳-ب). در این دو حرکت، متحرک، در بازه‌های زمانی یکسان، از ابتدای پاره خط، یعنی از نقطه M به نقطه N می‌رود و برمی‌گردد و به این ترتیب، حول نقطه O واقع در وسط پاره خط نوسان می‌کند. از این پس دستگاهی را که دارای حرکت هماهنگ ساده است نوسانگر هماهنگ ساده می‌نامیم. نوسانگر وزنه-فنر در شکل ۱-۳-ب الگوی مناسبی برای بررسی حرکت نوسانی ساده است. ابتدا برخی مفهومی‌ها را در این حرکت معرفی می‌کنیم.

دوره و بسامد: در حرکت هماهنگ ساده بازه زمانی بین دو وضعیت یکسان و متوالی را دوره می‌نامیم. به عبارت دیگر دوره، زمان یک نوسان (زمان یک رفت و برگشت به وضع قبلی) است و با T نشان داده می‌شود. همچنین تعداد دوره‌ها یا تعداد نوسان‌ها را در یک ثانیه بسامد می‌نامیم و آن را با f نشان می‌دهیم. یکای بسامد در SI ، s^{-1} است که هرتز (Hz) نامیده می‌شود. با توجه به تعریف دوره، معلوم می‌شود که بسامد وارون دوره است:

$$f = \frac{1}{T} \quad (۱-۳)$$

دامنه نوسان: جسمی به جرم m را در نظر بگیرید که به سرآزاد یک فنر متصل است و می‌تواند در راستای محور x ، روی یک سطح افقی که اصطکاک آن ناچیز است، جابه‌جا شود (شکل ۲-۳). در حالتی که فنر طول عادی خود را دارد برآیند نیروهای وارد به جسم صفر و در نتیجه جسم در حال تعادل است.



شکل ۲-۳

حال اگر مبدأ محور مختصات، یعنی نقطه O را منطبق بر مکان جسم در حالت تعادل اختیار نماییم و سپس جسم را تا نقطه M به سمت راست بکشیم و سپس رها کنیم، جسم حول وضع تعادلش (نقطه O) با حرکت هماهنگ ساده شروع به نوسان می‌کند. در ضمن نوسان جسم، فاصله آن از مبدأ تغییر می‌کند، اما هیچ‌گاه فاصله آن از مبدأ بیش از OM یا ON نمی‌شود. این بیشترین فاصله نوسانگر از مبدأ را دامنه می‌نامیم و معمولاً آن را با A نشان می‌دهیم.

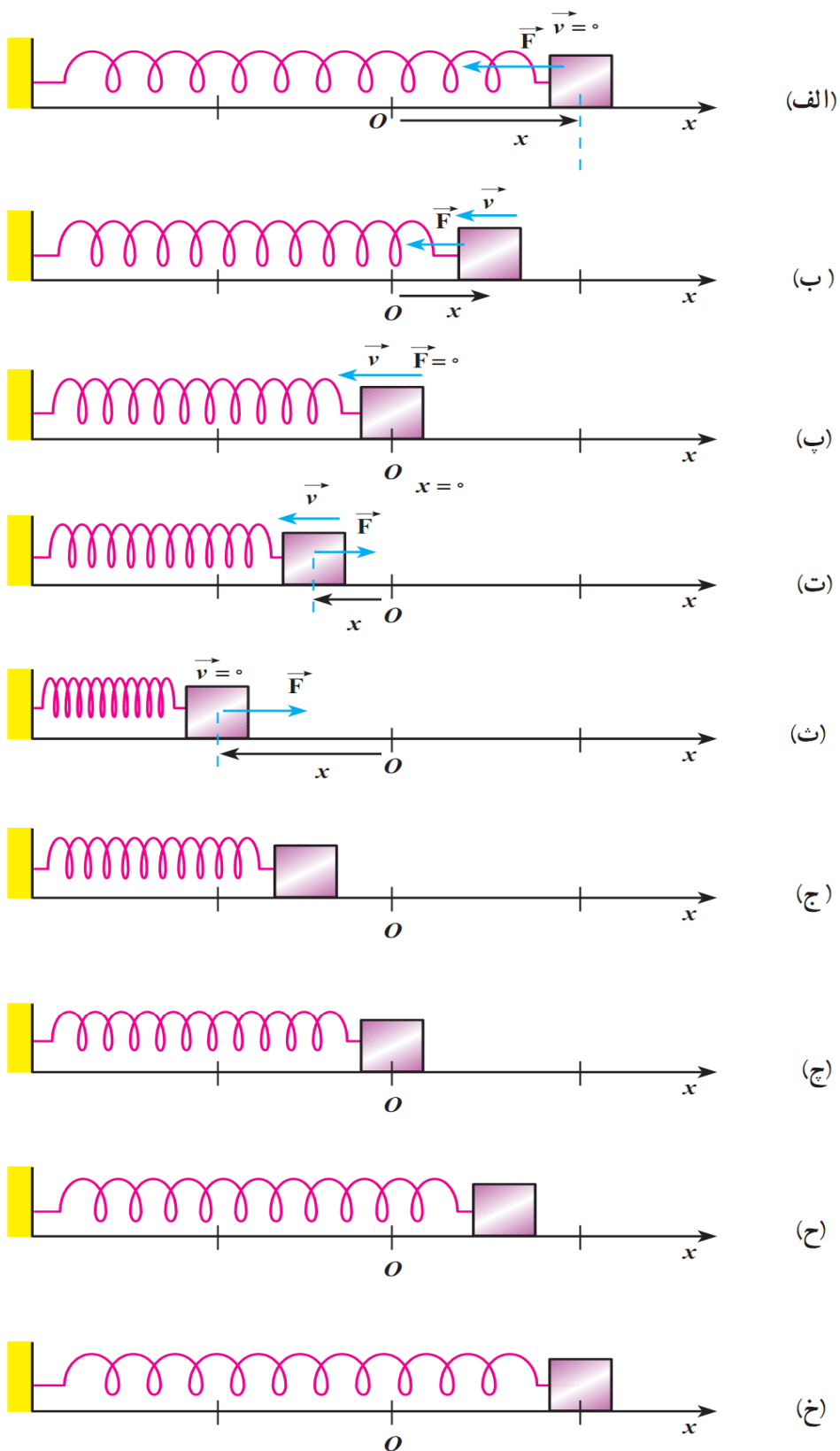


نیروی بازگرداننده: در شکل ۲-۳، جهت نیروی فنر همواره به گونه ای است که می خواهد جسم را به حالت تعادل (نقطه O) برگرداند، این نیرو، نیروی بازگرداننده نامیده می شود. نیروی بازگرداننده فنر با تغییر طول فنر، متناسب است و از رابطه زیر که به قانون هوک معروف است، به دست می آید:

$$F = -kx \quad (2-3)$$

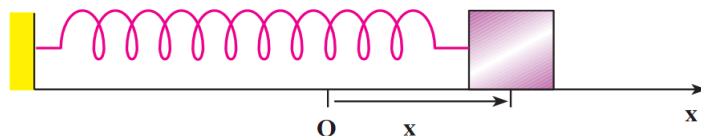
در این رابطه، x تغییر طول فنر، F نیروی بازگرداننده فنر و k ثابت تناسب است که به ویژگی های فنر بستگی دارد و آن را ثابت نیروی فنر می نامیم. یکای k در SI نیوتون بر متر (N/m) است. علامت منفی در رابطه ۲-۳ نشان می دهد که جهت نیروی بازگرداننده فنر همواره خلاف جهت بردار مکان جسم است. هر دستگاهی که نیروی بازگرداننده آن از قانون هوک پیروی کند، حرکت هماهنگ ساده خواهد داشت.

حال اثر نیروی بازگرداننده را در نوسانگر وزنه - فنر، در یک دوره، بررسی می کنیم. همان طور که در شکل ۳-۳ الف تا پ دیده می شود، اگر جسم را پس از خارج کردن از وضع تعادل رها کنیم، تحت اثر نیروی بازگرداننده به طرف وضع تعادل خود (نقطه O) برمی گردد و پس از رسیدن به نقطه O ، به سبب داشتن انرژی جنبشی، به حرکتش به سمت چپ ادامه می دهد (شکل پ). از این لحظه به بعد، مکان و سرعت جسم منفی و نیروی بازگرداننده در جهت محور x و مثبت است. بنا به قانون دوم نیوتون، چون شتاب با نیروی برآیند هم جهت است در این مرحله از حرکت شتاب نیز مثبت است. اما چون سرعت آن منفی است، حرکت جسم کند شونده است (شکل ت)؛ یعنی از سرعت آن کاسته می شود و در یک لحظه به صفر می رسد. در این لحظه فنر بیشترین فشردگی یا تغییر طول را دارد و نیروی بازگرداننده بیشینه است (شکل ث).



۳-۲- معادله حرکت هماهنگ ساده

یک نوسانگر را در نظر بگیرید که مطابق شکل ۳-۴ در فاصله x از وضع تعادل قرار دارد.



شکل ۳-۴

بنا به رابطه ۳-۲ نیروی وارد بر وزنه در این لحظه $F = -kx$ است؛ اگر جرم وزنه m باشد بنا به قانون دوم نیوتون داریم :

$$a = \frac{F}{m}$$

$$a = -\frac{k}{m}x \quad (3-3)$$

بنا به آنچه در فصل ۱ دیدیم، شتاب مشتق دوم مکان نسبت به زمان است؛ یعنی :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

بنابراین $x = f(t)$ باید به صورتی باشد که مشتق دوم آن نسبت به زمان، با علامت منفی، با x متناسب باشد. با توجه به این که تابع سینوسی که در درس ریاضی خوانده‌اید، همین ویژگی را دارد، معادله حرکت هماهنگ ساده باید به صورت زیر باشد* :

$$x = A \sin \omega t \quad (4-3)$$

اگر از رابطه ۳-۴ دو بار نسبت به زمان مشتق بگیریم خواهیم داشت :

$$\frac{dx}{dt} = A \omega \cos \omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A \omega^2 \sin \omega t$$

با توجه به رابطه ۳-۴ می‌توان نوشت :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$



از مقایسه رابطه اخیر با رابطه ۳-۳ نتیجه زیر حاصل می شود.

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (۵-۳)$$

ω را بسامد زاویه ای می نامیم. یکای بسامد زاویه ای رادیان بر ثانیه است. در رابطه ۳-۴، x مکان متحرک در لحظه t و A دامنه نوسان است (چرا؟) همچنین $\varphi = \omega t$ فاز حرکت در لحظه t می باشد؛ اگر در لحظه t_1 فاز حرکت :

$$\varphi_1 = \omega t_1$$

و در لحظه t_2 فاز حرکت

$$\varphi_2 = \omega t_2$$

باشد، تغییر فاز بین دو لحظه t_1 و t_2 برابر است با :

$$\Delta\varphi = \omega t_2 - \omega t_1 = \omega(t_2 - t_1)$$

یا

$$\Delta\varphi = \omega \Delta t \quad (۶-۳)$$

در رابطه ۳-۶ اگر $\Delta t = 1s$ باشد، $\Delta\varphi = \omega$ می شود؛ یعنی، بسامد زاویه ای (ω) تغییر فاز در هر ثانیه است.

رابطه بسامد زاویه ای و دوره تناوب : چون دوره تناوب تابع سینوسی، 2π است باید در هر دوره (یعنی در زمان T) فاز به اندازه 2π تغییر کند. بنابراین، با توجه به رابطه ۳-۶ می توان چنین نوشت :

$$\Delta\varphi = \omega T = 2\pi$$

و از آنجا

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (۷-۳)$$

اکنون با توجه به رابطه های ۳-۵ و ۳-۷ رابطه های زیر به دست می آید :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (۸-۳)$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (۹-۳)$$

رابطه ۳-۸ نشان می دهد که دوره به ویژگی های فیزیکی نوسانگر بستگی دارد؛ چنان که اگر وزنه را تغییر دهیم (m تغییر کند) یا فنر را عوض کنیم (k تغییر کند) دوره و در نتیجه بسامد نوسان های دستگاه،



تغییر می کند. از طرف دیگر دوره و بسامد به دامنه بستگی ندارد؛ به همین دلیل گفته می شود که بسامد یک نوسانگر از ویژگی های ساختاری آن نوسانگر است و بسامد طبیعی آن نامیده می شود.

مثال ۱-۳

معادله حرکت نوسانگری در SI به صورت زیر است.

$$x = 0.05 \sin 6\pi t$$

الف) دامنه، دوره و بسامد این حرکت چه مقدار است؟

ب) مکان نوسانگر را در لحظه صفر و در لحظه $\frac{1}{36}$ ثانیه به دست آورید.

پاسخ

الف) باتوجه به معادله ۳-۴ و رابطه ۳-۷ نتایج زیر حاصل می شود:

$$A = 0.05 \text{ m}$$

دامنه:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 6\pi \Rightarrow T = \frac{1}{3} \text{ s}$$

دوره:

$$f = \frac{1}{T} = 3 \text{ Hz}$$

بسامد:

$$x_0 = 0.05 \sin 6\pi \times 0 = 0.05 \times 0 = 0$$

ب)

$$x = 0.05 \sin 6\pi \times \frac{1}{36} \Rightarrow x = 0.05 \sin \frac{\pi}{6} = 0.025 \text{ m}$$

مثال ۲-۳

دامنه نوسان نوسانگر هماهنگ ساده ای ۲ cm و بسامد آن ۲ Hz است. معادله

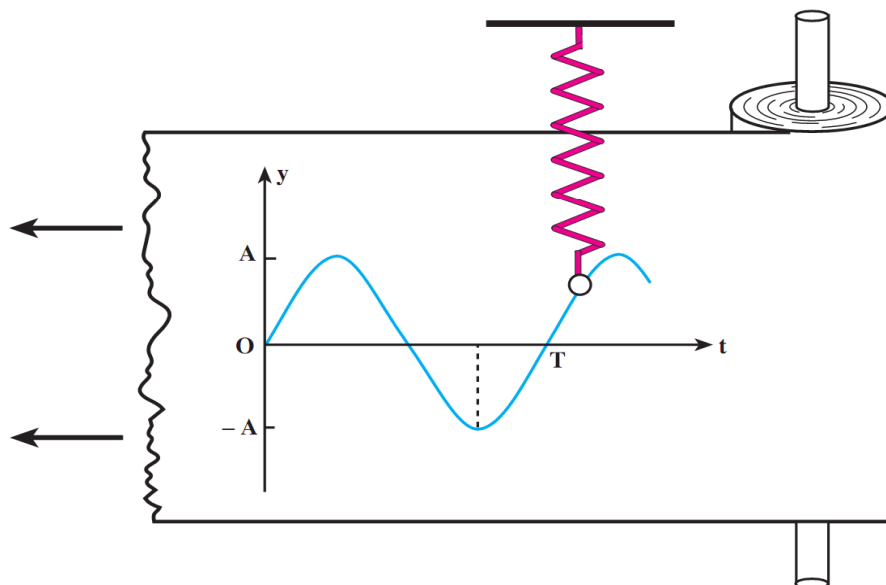
حرکت آن را بنویسید.

$$A = 0.02 \text{ m}, f = 2 \text{ Hz}, \omega = 2\pi f \Rightarrow \omega = 4\pi \text{ rad/s},$$

پاسخ

$$x = A \sin \omega t \Rightarrow x = 0.02 \sin 4\pi t$$

رسم نمودار یک نوسانگر هماهنگ ساده: یکی از روش‌های نمایش نمودار مکان - زمان حرکت نوسانگر هماهنگ ساده در شکل ۳-۵ نشان داده شده است.



شکل ۳-۵

در این روش، نوار کاغذی روی استوانه‌ای که در امتداد قائم قرار دارد پیچیده شده است. استوانه می‌تواند به طور یکنواخت حول محورش بچرخد. نوسانگر وزنه - فنر در امتداد قائم طوری نصب شده است که وزنه متصل به آن به وسیله نوک یک مداد با نوار کاغذی در تماس است. اگر نوسانگر ساکن باشد و نوار کاغذی به سمت چپ کشیده شود نوک مداد یک خط افقی (محور زمان) روی نوار ثبت می‌کند. اگر نوار ساکن باشد و نوسانگر را به نوسان درآوریم، نوک مداد خطی در امتداد قائم رسم می‌کند، که نشان‌دهنده جابه‌جایی نوسانگر است. حال اگر نوار کاغذی را با سرعت ثابت بکشیم و در همان حال نوسانگر را به نوسان واداریم نمودار حرکت هماهنگ ساده که یک نمودار سینوسی است رسم می‌شود، محور افقی زمان حرکت و محور قائم مکان متحرک را در هر لحظه نشان می‌دهد.

شما در درس ریاضی با چگونگی رسم نمودار تابع سینوسی آشنا شده‌اید. به همان ترتیب هم می‌توان نمودار حرکت هماهنگ ساده را به کمک نقطه‌یابی رسم کرد. برای این کار نقطه‌های بیشینه، کمینه و محل برخورد نمودار را با محور زمان معلوم نموده و با مشخص کردن آنها در صفحه مختصات $x - t$ نمودار را رسم می‌کنیم. به مثال‌هایی در این باره توجه کنید:

مثال ۳-۳

دوره و دامنه نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به ترتیب $\frac{\pi}{2}$ s و ۶ cm است. معادله حرکت این نوسانگر را بنویسید و نمودار مکان-زمان آن را رسم کنید.

پاسخ

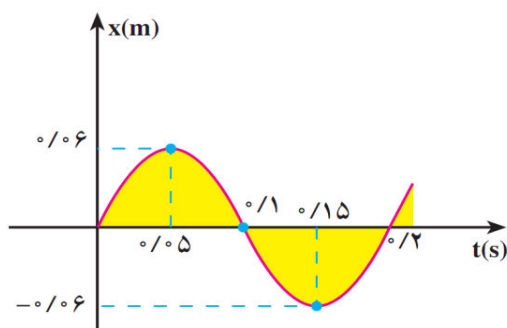
$$T = \frac{\pi}{2} \text{ s}, \quad A = 0.06 \text{ m}, \quad \omega = 1 \cdot \pi \text{ rad/s}$$

$$x = A \sin \omega t \Rightarrow x = 0.06 \sin 1 \cdot \pi t$$

معادله حرکت :

برای رسم نمودار تغییرات x بر حسب t به کمک نقطه‌یابی به ترتیب زیر، عمل

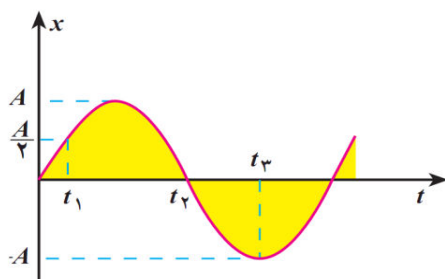
می‌کنیم :



شکل ۳-۶

$t(s)$	$x(m)$
۰	۰
$\frac{T}{4} = 0.125$	$0.06 = +A$
$\frac{T}{2} = 0.25$	۰
$\frac{3T}{4} = 0.375$	$-0.06 = -A$
$T = 0.5$	۰

مثال ۳-۴



شکل ۳-۷

نمودار شکل ۳-۷ مربوط به حرکت هماهنگ ساده‌ای است که دوره آن $\frac{\pi}{2}$ ثانیه است. زمان‌های t_1 و t_2 و t_3 را به دست آورید.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1 \cdot \pi \text{ rad/s} \Rightarrow x = A \sin 1 \cdot \pi t$$

پاسخ

با توجه به شکل ۷-۳ در لحظه t_1 مکان برابر $A/2$ است؛ بنابراین:

$$+\frac{A}{2} = A \sin 1 \cdot \pi t_1 \Rightarrow \sin 1 \cdot \pi t_1 = \frac{1}{2}$$

$$1 \cdot \pi t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{1}{6} \text{ s}$$

در لحظه t_2 مکان صفر است؛ بنابراین:

$$0 = A \sin 1 \cdot \pi t_2$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \pi t_2 = 0 \quad \text{یا} \quad 1 \cdot \pi t_2 = \pi$$

از تساوی $1 \cdot \pi t_2 = 0$ زمان t_2 ، صفر به دست می آید، در حالی که در شکل t_2

مثبت است؛ بنابراین:

$$1 \cdot \pi t_2 = \pi \Rightarrow t_2 = \frac{1}{1} \text{ s}$$

در لحظه t_3 مکان $-A$ است؛ بنابراین:

$$-A = A \sin 1 \cdot \pi t_3 \Rightarrow \sin 1 \cdot \pi t_3 = -1$$

$$1 \cdot \pi t_3 = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow t_3 = \frac{3}{2} \text{ s}$$

۳-۳- معادله های سرعت و شتاب در حرکت هماهنگ ساده

الف) معادله سرعت: با توجه به این که سرعت، مشتق مکان نسبت به زمان است با مشتق گیری

از رابطه ۳-۴ خواهیم داشت:

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v = A \omega \cos \omega t \quad (10-3)$$

معادله ۱۰-۳ نشان می دهد که سرعت به ازای $\cos \omega t = \pm 1$ بیشینه می شود؛ پس داریم:

$$v_{\max} = A \omega \quad (11-3)$$

در لحظه ای که $\cos \omega t = \pm 1$ است، $\sin \omega t = 0$ و در نتیجه $x = 0$ ؛ یعنی، سرعت بیشینه مربوط

به لحظه ای است که نوسانگر در حال گذر از وضع تعادل است.



ب) معادله شتاب : می دانیم که شتاب مشتق سرعت نسبت به زمان، یا مشتق دوم مکان نسبت به زمان است؛ در نتیجه با استفاده از رابطه ۳-۴ یا ۳-۱۰ داریم :

$$a = -A\omega^2 \sin \omega t \quad (۱۲-۳)$$

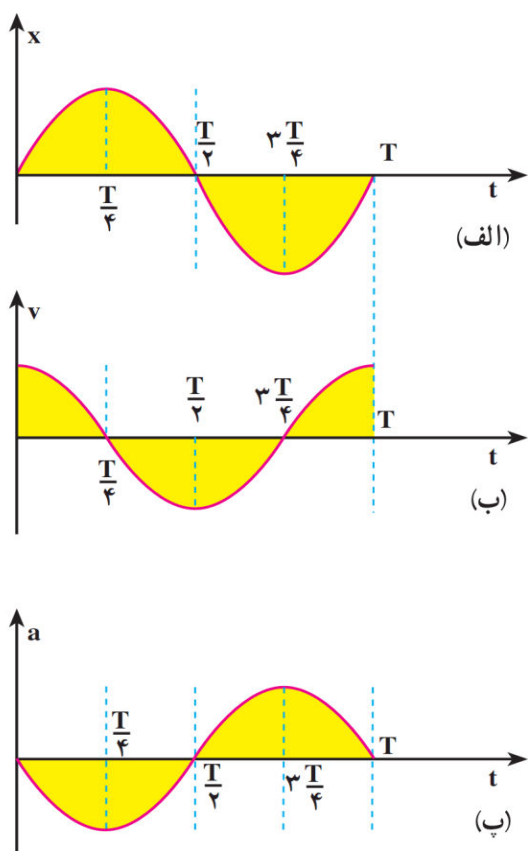
معادله ۳-۱۲ نشان می دهد که در حرکت هماهنگ ساده، شتاب نیز به طور دوره ای تغییر می کند و بیشینه آن از رابطه زیر به دست می آید :

$$a_{\max} = A\omega^2 \quad (۱۳-۳)$$

با استفاده از رابطه ۳-۴ می توان رابطه ۳-۱۲ را به صورت زیر نوشت :

$$a = -\omega^2 x \quad (۱۴-۳)$$

که رابطه شتاب را با مکان نوسانگر به دست می دهد. این رابطه همچنین نشان می دهد که بردار شتاب در خلاف جهت بردار مکان است.



شکل ۳-۹

در شکل های ۳-۹-الف - ب و پ، به ترتیب، نمودارهای مکان-زمان و سرعت-زمان و شتاب-زمان برای حرکت هماهنگ ساده ای که معادله آن به صورت $x = A \sin \omega t$ است نشان داده شده است.

همان طور که در این نمودارها دیده می شود در لحظه $t = 0$ ، $x = 0$ است. در این لحظه سرعت بیشینه و مثبت و شتاب صفر است. در لحظه $\frac{T}{4}$ ، x بیشینه و مثبت، سرعت صفر و شتاب بیشینه و منفی است. در لحظه $\frac{T}{2}$ ، $x = 0$ ، سرعت بیشینه و منفی و شتاب صفر است. در لحظه $\frac{3T}{4}$ ، x بیشینه و منفی، سرعت صفر و شتاب بیشینه و مثبت است. در لحظه T ، x صفر، سرعت بیشینه و مثبت و شتاب صفر است.

مثال ۳-۵

دامنه یک نوسانگر وزنه - فنر، ۵ cm است. اگر جرم وزنه $g = 2^\circ$ و ثابت فنر ۲ N/m باشد:

- الف) بیشینه سرعت و شتاب در SI چه اندازه است؟
ب) در لحظه ای که مکان نوسانگر ۴ cm + است، سرعت و شتاب آن را به دست آورید.

پاسخ
الف)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{0.02}} = 10 \text{ rad/s}$$

$$v_{\max} = A\omega = 0.05 \times 10 = 0.5 \text{ m/s}$$

$$a_{\max} = A\omega^2 = 0.05 \times 100 = 5 \text{ m/s}^2$$

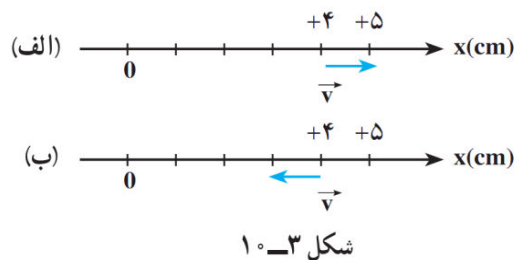
ب) در تمرین ۱-۳ دیدیم که $v = \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$ ، بنابراین

$$v = \pm 10 \sqrt{(0.05)^2 - (0.04)^2} = \pm 0.3 \text{ m/s}$$

علامت ($\pm$) نشان دهنده این است که در مکان $x = +4 \text{ cm}$ ممکن است سرعت در جهت محور x یا در خلاف جهت محور x باشد؛ یعنی، در لحظه ای که $x = +4 \text{ cm}$ است؛ ممکن است متحرک در حال دور شدن از مبدأ باشد که در این صورت $v = +0.3 \text{ m/s}$ است و یا در حال نزدیک شدن به مبدأ باشد که در این صورت $v = -0.3 \text{ m/s}$. این وضعیت به ترتیب، در شکل های ۱-۳ الف و ۱-۳ ب نشان داده شده است.

$$a = -\omega^2 x = -100 \times 0.04 = -4 \text{ m/s}^2$$

پس معلوم می شود در مکان $x = +4 \text{ cm}$ شتاب منفی و در خلاف جهت محور x است.



۳-۴- انرژی مکانیکی نوسانگر (دستگاه جرم - فنر)

در فیزیک ۲ و آزمایشگاه دیدیم، هنگامی که فنری فشرده یا کشیده می شود در آن انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره می شود؛ می توان نشان داد مقدار این انرژی از رابطه زیر به دست می آید :

$$U_e = \frac{1}{2} kx^2$$

با جای گذاری x از معادله ۳-۴ خواهیم داشت :

$$U_e = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 \omega t \quad (15-3)$$

با استفاده از رابطه ۳-۵ می توان نوشت :

$$U_e = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t \quad (16-3)$$



از طرفی با توجه به رابطه ۳-۱۰ انرژی جنبشی این نوسانگر از رابطه زیر به دست می آید :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t \quad (3-17)$$

بنابراین، انرژی مکانیکی، یعنی مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی این نوسانگر به ترتیب زیر به دست می آید :

$$E = U_e + K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t + \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 [\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t]$$

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \quad (3-18)$$

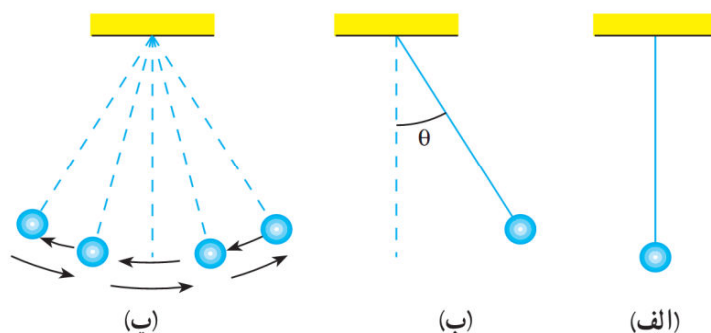
از رابطه های ۳-۱۵ و ۳-۱۷ می توان دریافت که انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نوسانگر وزنه - فنر با زمان تغییر می کنند؛ یعنی، در لحظه ای که نوسانگر در فاصله x از مبدأ قرار دارد، بخشی از انرژی آن به صورت پتانسیل و بقیه به صورت جنبشی است. اما رابطه ۳-۱۸ نشان می دهد که انرژی مکانیکی نوسانگر مستقل از زمان است.

اگر چه ما انرژی مکانیکی را برای نوسانگر وزنه - فنر محاسبه کردیم، ولی می توان نشان داد که برای هر نوع نوسانگر ساده دیگری نیز، انرژی مکانیکی با مربع دامنه و مربع بسامد متناسب است.

۳-۵- آونگ ساده

آونگ ساده وزنه کوچکی است به جرم m که با نخ سبکی به یک نقطه آویخته شده است. در حالت تعادل، آونگ در امتداد قائم قرار دارد (شکل ۱۱-۳-الف).

اگر وزنه را پس از خارج کردن آونگ از وضع تعادل رها کنیم (شکل ۱۱-۳-ب) حول وضع تعادلش نوسان می کند (شکل ۱۱-۳-پ). در نوسان آونگ، نیروی بازگرداننده، مؤلفه نیروی وزن جسم در راستای مماس بر مسیر است.



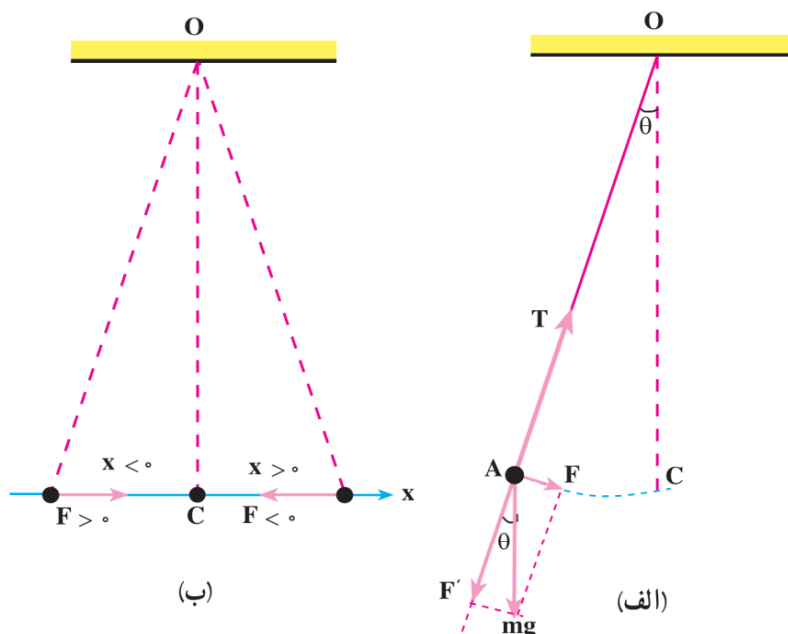
شکل ۱۱-۳

اگر زاویه انحراف اولیه از وضع قائم (θ) به اندازه کافی کوچک باشد، مسیر حرکت وزنه تقریباً یک پاره خط افقی است (شکل ۱۲-۳-ب). در این صورت، وزنه مانند وزنه متصل به فنریک حرکت هماهنگ ساده با دامنه کم (حرکت نوسانی کم دامنه) انجام می دهد.

محاسبه دوره آونگ ساده کم دامنه : در آونگ ساده اگر اصطکاک قابل چشم پوشی و جرم نخ ناچیز باشد، بر وزنه آونگ نیروی وزن ($m\vec{g}$) و نیروی کشش نخ ($\vec{T}$) وارد می شود. همان طور که شکل ۱۲-۳-الف نشان می دهد نیروی کشش نخ در امتداد نخ است و در هر لحظه بر مسیر حرکت وزنه عمود است. بنابراین، در راستای مماس بر مسیر، مؤلفه ندارد. مؤلفه نیروی وزن در امتداد مماس بر مسیر $F = mg \sin \theta$ و در امتداد عمود بر مسیر $F' = mg \cos \theta$ است. مؤلفه مماس بر مسیر که نیروی بازگرداننده است می خواهد آونگ را به وضع تعادل برگرداند.

دیدیم که اگر زاویه انحراف آونگ از وضع تعادل (θ) کوچک باشد، مسیر حرکت وزنه تقریباً یک خط راست افقی است؛ در این صورت، اگر طول آونگ را با l نمایش دهیم، $\sin \theta \approx \theta = \frac{x}{l}$ است و می توان نوشت :

$$|F| = mg\theta = mg\frac{x}{l}$$



شکل ۳-۱۲

همان گونه که در شکل ۳-۱۲ ب دیده می شود مؤلفه نیروی وزن جسم در راستای مماس بر مسیر و همواره در خلاف جهت بردار مکان است. بنابراین :

$$F = -mg \frac{x}{l}$$

همان طور که می بینید، نیروی بازگرداننده از قانون هوک (رابطه ۳-۲) پیروی می کند و حرکت آونگ ساده کم دامنه یک حرکت هماهنگ ساده است.

اکنون با توجه به قانون دوم نیوتون داریم :

$$F = ma \Rightarrow -mg \frac{x}{l} = ma$$

$$a = -\frac{g}{l}x \quad (۳-۱۹)$$

از رابطه ۳-۱۴ و ۳-۱۹ نتیجه می گیریم که :

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

و

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (۳-۲۰)$$



مثال ۷-۳

اندازه دوره و بسامد حرکت نوسانی کم دامنۀ یک آونگ ساده به طول 40 cm چقدر است؟ ($g = 10\text{ m/s}^2$).

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

پاسخ

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.4}{10}} = 2\pi \times \frac{2}{10} \approx 1.25\text{ s} \quad \text{و} \quad f = \frac{1}{T} = 0.8\text{ Hz}$$

مثال ۷-۳

طول آونگ ساده کم دامنۀ باید چند سانتی متر باشد تا بتواند در هر دقیقه 30 نوسان انجام دهد؟ ($g = 9.8\text{ m/s}^2$ و $\pi^2 = 10$).

$$T = \frac{t}{n} = \frac{60}{30} = 2\text{ s}$$

پاسخ

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g}$$

$$4 = 4 \times 10 \times \frac{l}{9.8} \Rightarrow l = 0.98\text{ m} = 98\text{ cm}$$

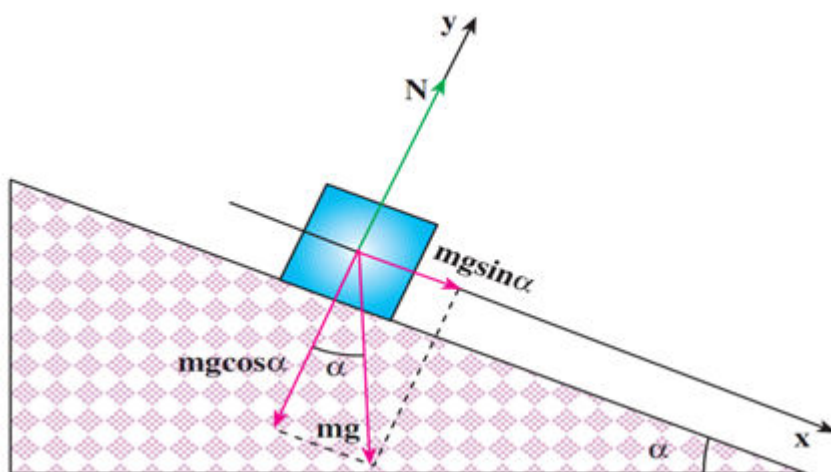
۳-۶- تشدید

در بخش‌های قبل دیدیم که وقتی یک نوسانگر ساده نظیر آونگ و یا دستگاه وزنه - فنر را از وضع تعادل منحرف می‌کنیم و آن را برای نوسان آزاد می‌گذاریم، دستگاه حول وضع تعادل خود شروع به نوسان می‌کند. این حرکت نوسانی، نوسان طبیعی یا آزاد دستگاه نامیده می‌شود. بسامد (یا دوره) نوسان طبیعی از ویژگی‌های ساختاری نوسانگر است؛ مثلاً، بسامد آونگ ساده کم دامنه به طول آونگ (l) بستگی دارد؛ یعنی، اگر با دادن انرژی به یک آونگ دامنه نوسان آن را افزایش دهیم (به طوری که زاویه انحراف آونگ کوچک باقی بماند) بسامد نوسان‌های آن تغییر نمی‌کند، در حالی که برای تغییر بسامد، لازم است طول آونگ را تغییر دهیم.

هنگامی که نوسانگر را از حالت تعادل خارج می‌کنیم و آن را به نوسان درمی‌آوریم، به علت نیروهای اتلافی از قبیل اصطکاک و مقاومت هوا، دامنه نوسان آن به تدریج کاهش می‌یابد و دستگاه پس از چند نوسان می‌ایستد. این نوسان‌ها را نوسان میرا می‌نامیم. ساده‌ترین مثال برای نوسان میرا آونگ ساده و نیز تاب بازی در بوستان‌هاست. می‌دانید هنگامی که تاب را به نوسان درمی‌آوریم و آن را رها می‌کنیم پس از تعدادی نوسان می‌ایستد؛ ولی اگر بخواهیم تاب به نوسان خود ادامه دهد باید به آن نیرو وارد کنیم؛ مثلاً، می‌توانیم پس از یک رفت و برگشت، هنگامی که تاب می‌خواهد نوسان بعدی را شروع کند به آن نیرو وارد کنیم. در این حالت دوره وارد کردن نیرو با دوره نوسان تاب برابر است. با اعمال این نیرو دامنه نوسان افزایش می‌یابد و به یک مقدار بیشینه می‌رسد و از این پس حرکت نوسانی بدون کاهش دامنه ادامه می‌یابد. در این حالت نیروی اعمال شده اثر نیروهای اتلافی را خنثی می‌کند.

پدیده تشدید ممکن است مفید و یا برعکس مشکل‌زا باشد؛ مثلاً، در ساعت کوکی این پدیده مفید است. فنر کوک شده یک نیروی دوره‌ای بر رقاصک ساعت اعمال می‌کند که بسامد آن با بسامد نوسان رقاصک برابر است و در نتیجه تشدید رخ می‌دهد و باعث می‌شود که حرکت نوسانی رقاصک ادامه یابد. پدیده تشدید ممکن است اثر مخرب نیز داشته باشد و باعث تخریب ساختمان‌ها و تأسیسات شود.

قوانین حرکت





نگاهی به فصل: قانون‌های نیوتون از جمله قانون‌های اساسی و بنیادی در دانش فیزیک به شمار می‌روند. این قانون‌ها، کاربردهای گسترده‌ای در فناوری و غالب رشته‌های مهندسی دارند. در صنعت، امور ساختمانی، دریانوردی، فضاوردی و... اصول حاکم بر پدیده‌ها از قانون‌های نیوتون پیروی می‌کنند.

شما در فیزیک (۲) و آزمایشگاه، با قانون‌های نیوتون آشنا شدید و دیدید که چگونه می‌توان آنها را برای حل مسئله‌های دینامیک در یک بُعد به کار برد. در این فصل، پس از یادآوری این قانون‌ها، کاربرد آنها را در حل مسئله‌ها، در دینامیک دوبعدی، بررسی می‌کنیم.

۱-۲- قانون‌های نیوتون

قانون اول نیوتون: «هر جسمی، حالت سکون و یا حرکت یکنواخت خود را روی خط راست حفظ می‌کند، مگر آنکه تحت تأثیر نیرو یا نیروهایی، مجبور به تغییر آن حالت شود.»

قانون دوم نیوتون: «نیروی برآیند وارد بر جسم برابر است با حاصل ضرب جرم جسم در شتاب آن» به عبارت دیگر شتاب یک جسم در همان جهت نیروی برآیند وارد بر آن است و با نیروی برآیند تقسیم بر جرم جسم برابر است؛ یعنی:

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

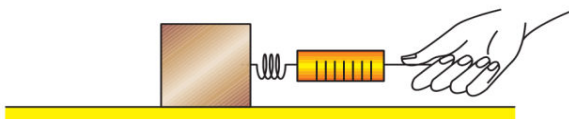
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (1-2)$$

توجه کنید در رابطه بالا $\vec{F}$ برآیند نیروهای وارد بر جسم است.

قانون سوم نیوتون: «هرگاه جسمی به جسم دیگر نیرو وارد کند، جسم دوم هم به جسم اول نیرویی هم‌اندازه، هم راستا و در خلاف سوی آن وارد می‌کند.»

همچنین در فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم، نیرویی که جسم اول وارد می‌کند، «کنش» و نیرویی که جسم دوم وارد می‌کند «واکنش» نام دارد. این دو نیرو همواره هم‌اندازه، هم راستا و در سوی مخالف یکدیگرند و هر یک بر دیگری وارد می‌شود.

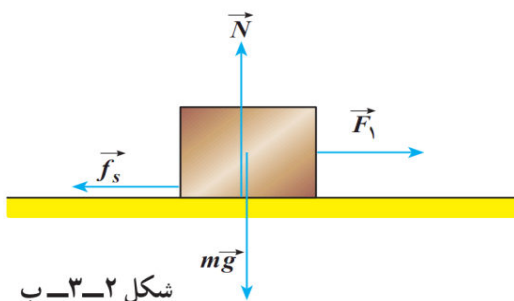
مثال ۱-۲



شکل ۲-۳-الف

صندوقی به جرم 10 kg روی یک سطح افقی با ضریب اصطکاک ایستایی 0.4 و ضریب اصطکاک جنبشی 0.2 قرار دارد.

مطابق شکل ۲-۳-الف نیروسنج را به صندوق وصل می کنیم و آن را می کشیم :
الف) نخست با نیرویی برابر با 20 N صندوق را می کشیم. آیا صندوق شروع به حرکت می کند؟ در این حالت نیروی اصطکاک بین صندوق و سطح چه مقدار است؟
ب) نیروی وارد بر صندوق را به 60 N می رسانیم، در این حالت نیروی اصطکاک چه مقدار است؟ شتاب حرکت صندوق را در این حالت حساب کنید.



شکل ۲-۳-ب

پاسخ

الف) در فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم، برای آنکه جسمی به حرکت درآید باید نیروی وارد بر آن از نیروی اصطکاک در آستانه حرکت بیشتر باشد. بنابراین ابتدا نیروی اصطکاک در آستانه حرکت (بیشینه نیروی اصطکاک) را محاسبه می کنیم :

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N = mg = 10 \times 10 = 100\text{ N}$$

$$f_{s,\max} = \mu_s N \Rightarrow f_{s,\max} = 0.4 \times 100 = 40\text{ N}$$

در این حالت، چون نیروی وارد شده، از نیروی اصطکاک در آستانه حرکت کمتر است، صندوق ساکن می ماند و در نتیجه شتاب حرکت آن صفر است. بنابر قانون دوم نیوتون داریم :

$$\Sigma F_x = ma \Rightarrow F_1 - f_s = ma = 0 \Rightarrow f_s = 20\text{ N}$$

ب) در این حالت، چون نیروی وارد شده، از نیروی اصطکاک در آستانه حرکت بیشتر است، جسم حرکت می کند و نیروی اصطکاک، جنبشی است و با استفاده از رابطه $f_k = \mu_k N$ محاسبه می شود.

$$f_k = 0.2 \times 100 = 20\text{ N}$$

برای محاسبه شتاب حرکت، قانون دوم نیوتون را می نویسیم :

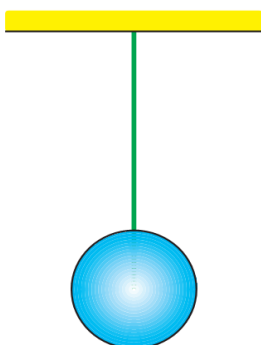
$$F - f_k = ma \Rightarrow 60 - 20 = 10a \Rightarrow a = 4\text{ m/s}^2$$

۲-۲- چگونگی استفاده از قانون های نیوتون در حرکت یک جسم

در فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم که برای حل مسئله های دینامیک یک بعدی چه نکاتی را باید در نظر بگیریم. اکنون برای حل مسئله های دینامیک دوبعدی این نکات را یادآوری و تکمیل می کنیم:

- ۱- شکل ساده ای از جسم و تکیه گاه آن را رسم می کنیم.
 - ۲- نیروهایی را که اجسام دیگر بر جسم وارد می کنند، روی شکل مشخص می کنیم.
 - ۳- دستگاه محورهای مختصات مناسب انتخاب می کنیم. (ضمن حل مسئله، با نحوه انتخاب دستگاه مختصات مناسب آشنا خواهیم شد.)
 - ۴- نیروها را روی محورهای مختصات تجزیه می کنیم؛ یعنی، مؤلفه های هر نیرو را روی محورها تعیین می کنیم.
 - ۵- با نوشتن قانون دوم نیوتون روی هر یک از محورها، شتاب حرکت جسم را روی هر محور محاسبه می کنیم. به عبارت دیگر، مؤلفه های نیرو را روی هر محور به طور جداگانه، به صورت $F_x = ma_x$ و $F_y = ma_y$ می نویسیم.
 - ۶- هرگاه چند جسم به هم متصل باشند، در صورتی که بردار شتاب حرکت همگی یکسان باشد، مجموعه را می توانیم به عنوان یک دستگاه (با جرمی برابر مجموع جرم ها) در نظر بگیریم و قانون دوم را برای آن بنویسیم.
- نحوه استفاده از قانون های نیوتون در مثال هایی که در ادامه می آید، نشان داده شده است.

مثال ۲-۲

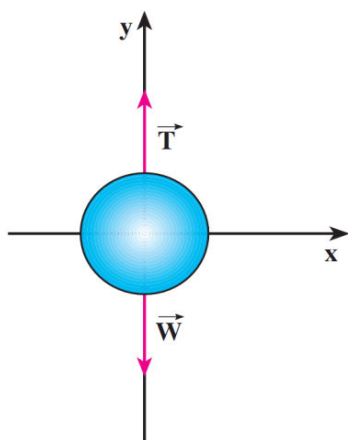


شکل ۲-۴- الف

جسمی به جرم $m = 12 \text{ kg}$ را با طنابی که جرم آن ناچیز است مطابق شکل ۲-۴- الف می آویزیم. نیروهای وارد بر جسم را تعیین کنید و مقدار هر یک را به دست آورید.

پاسخ

نیروهای وارد بر جسم عبارتند از:
نیروی وزن، که از طرف زمین بر جسم وارد می شود و
نیروی که از طرف طناب به جسم وارد می شود. چون جسم ساکن است، باید برابری نیروهای وارد بر آن صفر باشد. در نتیجه باید از طرف طناب،



شکل ۲-۴ ب

نیروی در امتداد قائم و رو به بالا بر جسم اعمال شود. این نیرو را کشش طناب (نخ) می نامند که آن را با $\vec{T}$ نمایش می دهیم.

نیروهای وارد بر جسم، در راستای محور y هستند و در شکل ۲-۴ ب نشان داده شده اند. بنابر قانون دوم نیوتون داریم:

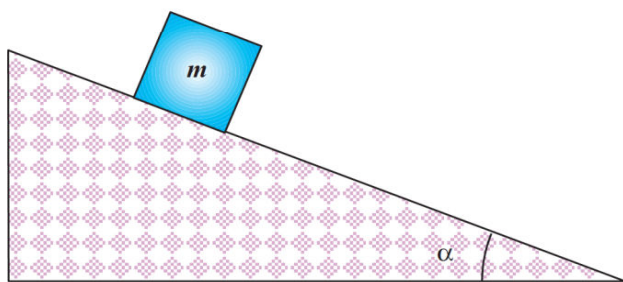
$$T - mg = ma$$

چون $a = 0$ ، داریم:

$$T = mg = 12 \times 10 = 120 \text{ N}$$

در هر نقطه از طناب کشیده شده، نیرویی از طرف یک بخش بر بخش دیگر وارد می شود. نیروی کشش طناب در هر نقطه برابر نیرویی است که در صورت پاره شدن طناب در آن نقطه، باید وارد کنیم تا وضعیت اولیه آن حفظ شود؛ یعنی، اگر جسم ساکن بوده با جایگزینی این نیرو در آن نقطه همچنان ساکن بماند و اگر در حرکت بوده با همان حالت قبل از پاره شدن حرکت کند.

مثال ۳-۲



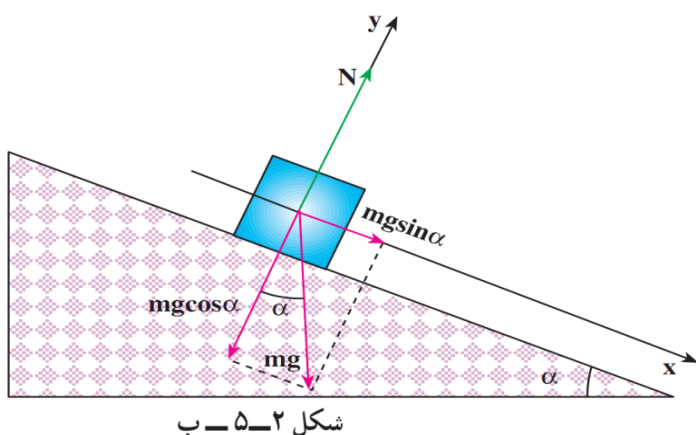
شکل ۲-۵ الف

جسمی به جرم m را روی سطح شیب داری که با افق زاویه α می سازد قرار می دهیم:
(الف) شتاب حرکت جسم و نیروی عمودی تکیه گاه را محاسبه کنید. (در این قسمت اصطکاک را نادیده بگیرید.)

(ب) اگر در اثر نیروی اصطکاک، جسم روی سطح ساکن بایستد، نیروی اصطکاک را محاسبه کنید.

پاسخ

الف) ابتدا نیروهای وارد بر جسم را رسم می کنیم. جسم در امتداد سطح شیب دار حرکت می کند، محور x را در راستای سطح شیب دار و در جهت حرکت و محور y را عمود بر آن سطح، انتخاب می کنیم.



شکل ۲-۵ ب

مؤلفه های وزن روی محورهای x و y به ترتیب عبارت اند از:

$$mg \sin \alpha \text{ و } mg \cos \alpha$$

با توجه به قانون دوم نیوتون در راستای محور x داریم:

$$F_x = mg \sin \alpha = ma$$

$$a = g \sin \alpha$$

چون جسم در راستای محور y حرکت ندارد:

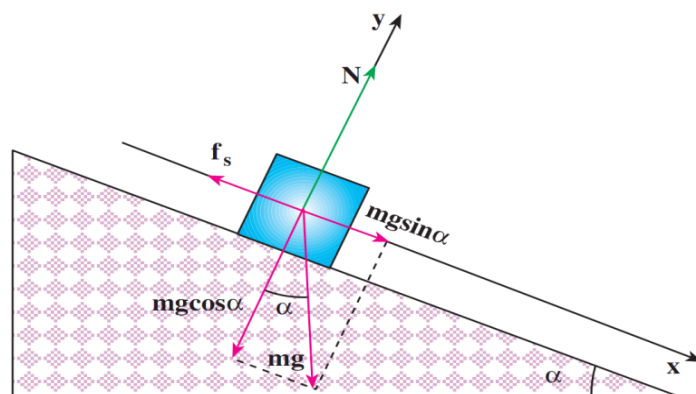
$$F_y = 0$$

$$N - mg \cos \alpha = 0$$

و در نتیجه:

$$N = mg \cos \alpha$$

ب) نمودار نیروهای وارد بر جسم در شکل ۲-۶ نشان داده شده است؛ چون جسم ساکن است، برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است:



شکل ۲-۶

$$F_x = 0$$

$$mg \sin \alpha - f_s = 0$$

و از آنجا داریم:

$$f_s = mg \sin \alpha$$



شکل ۲-۷

۲-۳- تکانه (اندازه حرکت)

در شکل ۲-۷ یک خودروی سواری و یک کامیون مجاور هم با سرعت یکسان در حرکت اند. با نزدیک شدن به چراغ قرمز خودرو و کامیون باید پس از طی مسافت $50m$ متوقف شوند. به نظر شما نیروی لازم برای

متوقف کردن کدام یک از آنها با شتاب ثابت بیشتر است؟ برای بررسی دقیق تر، فرض کنید جرم کامیون 10 تن و جرم خودروی سواری 1 تن باشد و هر کدام با سرعت $20m/s$ در حرکت باشند. شتاب حرکت کندشونده برای کامیون و خودروی سواری، در این جابه جایی برابر است با :

$$|a_1| = |a_2| = \left| \frac{v^2 - v_0^2}{2\Delta x} \right| = \frac{400}{2 \times 50} = 4 m/s^2$$

نیروی لازم برای توقف کامیون برابر است با :

$$F_1 = m_1 a = 10000 \times 4 = 4 \times 10^4 N$$

و نیروی لازم برای توقف خودروی سواری برابر است با :

$$F_2 = m_2 a = 1000 \times 4 = 4 \times 10^3 N$$

نتیجه می گیریم که نیروی لازم برای متوقف کردن کامیون بیشتر از نیروی لازم برای متوقف کردن خودروی سواری است.

در مثال های بالا دیدیم که نیروی لازم برای متوقف کردن خودروها به جرم و سرعت آنها بستگی دارد. در فیزیک کمیتی به نام تکانه (اندازه حرکت) تعریف می شود که به هر دو کمیت جرم و سرعت بستگی دارد. «تکانه یک جسم، حاصل ضرب جرم جسم در سرعت آن است.»

تکانه را با $\vec{P}$ نمایش می دهند و یکای آن کیلوگرم متر بر ثانیه (kgm/s) است. بنابراین می توان نوشت :

$$\vec{P} = m \vec{v} \quad (2-2)$$

تکانه، کمیتی برداری است؛ چرا؟

رابطه بین نیرو و تکانه : با به کارگیری قانون دوم نیوتون، به سادگی رابطه نیرو و تکانه به دست می آید؛ با استفاده از رابطه ۱-۲ داریم :

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

چون جرم جسم، مقداری ثابت است، می توان نوشت :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = d(m\vec{v}) \Rightarrow \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

(۳-۲)

یعنی آهنگ تغییر تکانه یک جسم نسبت به زمان برابر برآیند نیروهای وارد بر جسم است. به بیان دیگر، برآیند نیروهای وارد بر جسم، مشتق تکانه آن نسبت به زمان است.

اگر در بازه زمانی Δt تغییر تکانه یک جسم $\Delta \vec{P}$ باشد، نیروی متوسط وارد بر آن از رابطه زیر به دست می آید :

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t}$$

(۴-۲)

مثال ۴-۲



شکل ۲-۸

چکشی به جرم $1/5 \text{ kg}$ را با سرعت 10 m/s به سر میخی می کوبیم (شکل ۲-۸). اگر زمان برخورد چکش با سر میخ 0.005 s باشد، بزرگی نیروی متوسطی که به چکش وارد می شود، چه مقدار است؟

پاسخ

$$\vec{F} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = m \left(\frac{v - v_0}{\Delta t} \right)$$

$$|\vec{F}| = \left| 1/5 \frac{(0 - 10)}{0.005} \right| = 3000 \text{ N}$$



فهرست منابع

- 1- Physics Raymond, A. Serway Jerry S. Faughn 1999 by Holt Rinehart and Winston.
- 2- Physics for Scientists and Engineers, Paul A. Tipler 1999 by W. H. Freedman and Company.
- 3- College Physics, Raymond A. Serway Jerry S. Faughn 1999, 2000, Saunders College Publishing.
- 4 - Fundamentals of Physics.
David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker 2001 John Wiley & Sons, Inc.
- 5 - Physics. principles with Applications, Douglas C. Giancoli 1991 Prentice-Hall International Editions.
- 6 - Understanding Physics , Robin Millar 1994 Collins Educational.
- 7 - Physics Classical and Modern, Frederick J. Keller W. Edward Gettys, Malcolm J. Skove 1993 Mc Graw Hill.
- 8 - University Physics, Hugh D. Young, Roger A. Freedman, 2000 Addison Wesley Longman, Inc.
- 9- Contemporary College Physics, Jones / Childers 1999 by Mc Graw Hill Companies.
- 10 - Physics 2 David Sanq 2001 Cambridge University Press.
- 11 - The Physical Universe, Krauskopf / Beiser, 1993 Mc Graw Hill, Inc.
- 12 - Physics, Hugh D. Young, Eight Edition, 1992, Addison Wesley Publishing Company.